



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

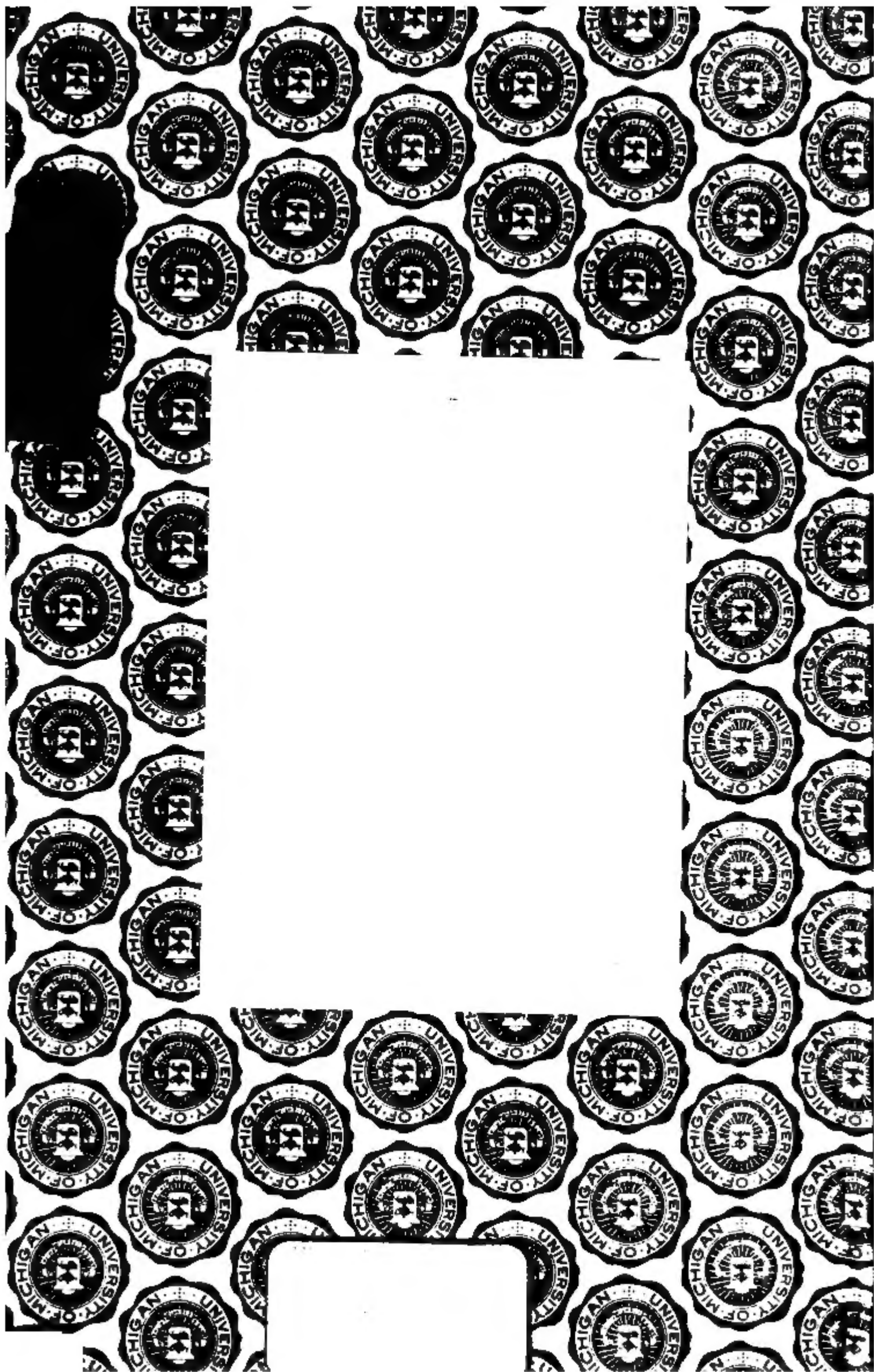
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



QA
35
.526
1778

C O U R S
D E
MATHÉMATIQUES.

T O M E I.

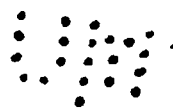
*Hac qui spernit , id est , has semitas sapientiae , ei denuncio non
rectè philosophandum. BOETIUS. ARIT. Lib. I. Cap. I.*

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ SAURI,
*ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE
EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.*



TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez JEAN-FRANÇOIS BASTIEN, Libraire, rue du
Petit-Lion, Fauxbourg Saint-Germain.



M. DCC. LXXVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

QA
35
S26
1778

Hist. & Sci.
Baudouin
7-27-27
15430
5v.



A MONSEIGNEUR
LE COMTE
DE NOAILLES,

*Duc de Mouchy , Grand d'Espagne
de la premiere classe , Lieutenant-
Général des Armées du Roi , Che-
valier de ses Ordres , de la Toison
d'or & Grand - Croix de l'Ordre
de Malthe , Gouverneur des Villes
& Châteaux de Versailles & de
Marly , Lieutenant-Général de la
Province de Guyenne , &c. &c. &c.*

MONSEIGNEUR,

*L'OUVRAGE que j'ai l'honneur de vous
présenter a un rapport essentiel avec cette science
sublime qui apprend à conduire les armées &
à repousser les ennemis de l'Etat. Si la Tac-
tique a , pour ainsi dire , changé de face de-
puis environ un siecle , si elle a fait de nos jours
des progrès étonnans , c'est aux Mathémati-
ques dont le goût est si généralement répandu ,*

Tome I.

a *

É P I T R E.

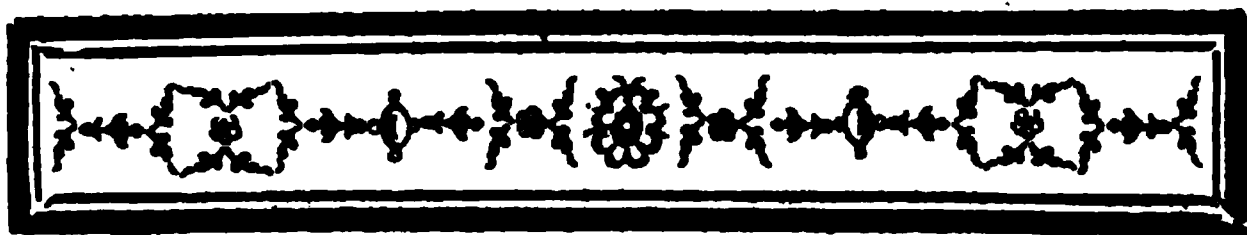
que nous devons cette révolution. Un Ouvrage qui renferme les découvertes les plus intéressantes des Géomètres anciens & modernes, n'avoit-il pas droit, MONSEIGNEUR, de paroître sous vos heureux auspices? Héritier des vertus & des talens militaires des Héros de votre illustre famille, vous avez prouvé à Ettinghen, & dans toutes les occasions, que vous étiez digne d'une si noble origine. Pendant la paix, au milieu de l'éclat que donnent la naissance & les dignités, au milieu du tumulte de la Cour, vous pensez, vous vivez en sage, protégeant les Arts & cultivant les Sciences. Mais, MONSEIGNEUR, je dois me souvenir que vous aimez à mériter des éloges, non à les entendre, & qu'on s'expose à vous déplaire, quand on entreprend de vous louer. Aussi ne me suis-je proposé, en vous faisant l'hommage public de mon Livre, que de vous donner une foible marque de la vive reconnoissance dont je suis pénétré pour les bontés dont vous daignez m'honorer.

Je suis avec un profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant
Serviteur

S A U R I.



DISCOURS

PRÉLIMINAIRE.

QUOIQUE les Grecs aient enrichi la Géométrie de très-belles découvertes, & qu'ils aient beaucoup travaillé sur quelques Courbes, principalement sur les Sections Coniques, je ne puis me persuader que leurs Géomètres aient fait usage de ce genre d'Analyse que nous appellons *Algebre*. En effet, avec quelque soin qu'on parcourre les Écrits des anciens Grecs, & sur-tout ceux de Pappus qui a fait la collection de leurs admirables découvertes, on n'y trouve aucun vestige de notre Analyse.

Le seul Diophante a fait un Ouvrage d'Algebre en Langue Grecque, mais quoiqu'on ignore le temps auquel il a vécu, tout le monde convient néanmoins qu'il a écrit après la naissance de Jésus-Christ. On prétend qu'il avoit composé treize Livres sur l'Analyse algébrique. Guillaume Xilandre a donné une traduction Latine des six premiers, imprimée à Basle en 1576 : les

autres paroissent perdus. Bacchet de Mazierac en donna une édition Grecque-Latine en 1621. Enfin le célèbre Fermat en fit paroître une autre en 1670, accompagnée de plusieurs Notes très-intéressantes.

Diophante ne traite nullement de ce genre de Problèmes, que nous appellons *déterminés*, il parle seulement de cette espèce de Problèmes *sémi-déterminés* qui regardent les quarrés ou les cubes des nombres, pour la solution desquels il faut éviter les quantités radicales, ce qui demande souvent beaucoup d'industrie.

Avant qu'on connût en Europe les Ouvrages de Diophante, l'Algebre des Arabes étoit déjà assez répandue. F. Lucas Paccioli fit imprimer le premier un Livre sur l'Algebre, qui a pour titre : *Summa Arithmeticae & Geometriae, proportionumque & proportionalitatum*. Si nous en croyons Wallis, l'édition en parut à Venise en 1494. L'Auteur de cet Ouvrage avoue qu'il a pris beaucoup de choses de plusieurs Savans qu'il nomme, tels que Léonard de Pise, Jordan, &c.

F. Lucas parle fort au long de l'Arithmétique & de l'Algebre ; mais il ne va pas au-delà des Équations du second degré. C'est là

aussi que les Arabes s'étoient arrêtés. De sorte que F. Lucas & les autres Analystes Européens qui l'ont précédé n'ont fait autre chose que simplifier ce que les Arabes leur avoient transmis. Cardan, s'appuyant sur le témoignage de Léonard de Pise, assure que nous devons l'invention de l'Algebre à Mahomet, fils de Mosis. A celui-là l'on peut joindre un autre Mahomet de Bagdad, Geber, & d'autres dont les noms sont à peine connus; & il est douteux s'ils se sont occupés de l'Algebre, ou seulement de l'étude de l'Astronomie.

Les Auteurs qui ont écrit avant Cardan; tels que Michel Stifeli; bien plus, plusieurs de ceux qui ont travaillé depuis Cardan, comme Pierre Nonnius, Professeur de Conimbre, n'ont rien ajouté à cette Science.

En 1545 parut *le grand Art* de Jérôme Cardan de Milan, Ouvrage dans lequel, outre la résolution des Équations Quadratiques, on trouve encore celle des Équations Cubiques. Ce Géometre avoue ingénument que la méthode de résoudre les Équations du troisième degré appartient à Scipion Ferreo de Boulogne. Celui-ci cacha pendant longtemps sa découverte, ne l'ayant communi-

quée qu'au seul Antoine Florido, Vénitien, son Auditeur. Ce dernier ayant proposé dans un combat littéraire, à Nicolas Tartalea quelques Problèmes qui supposoient la résolution des Équations du troisième degré, son adversaire travailla avec tant de succès qu'il trouva enfin la solution désirée. Tartalea découvrit la règle à Cardan, mais ne lui communiqua point la démonstration. Celui-ci à force de méditations & de travaux trouva & perfectionna cette démonstration; & comme il fut le premier qui la rendit publique, on a appelé *formule de Cardan* celle dans laquelle se résout une Équation du troisième degré.

Dans le même Ouvrage de Cardan on trouve une autre découverte plus admirable encore, je veux parler de la résolution des Équations du quatrième degré, que nous devons, au témoignage même de ce Géometre, à Louis de Ferrariis, son Auditeur. Raphaël Bombelli la publia dans son Algebre en 1574. Depuis ce temps-là on a fait très-peu de découvertes relativement à la résolution des Équations, & il nous manque encore & il nous manquera sans doute encore longtemps une méthode générale pour résoudre celles qui passent le quatrième degré;

cependant Vincent Ricati a trouvé la manière de résoudre les Équations de tous les degrés lorsqu'elles ont certaines conditions qui les rendent susceptibles d'une formule semblable à celle de Cardan.

Dans ce temps-là les Algébristes ne faisoient usage des lettres alphabétiques ou des autres signes, que pour indiquer les quantités inconnues, employant les nombres pour désigner les quantités connues. Cet usage rendoit les solutions moins universelles, & lorsque les données étoient changées dans un Problème de la même espèce, on étoit obligé de recommencer le calcul.

Le célèbre Viète, François, un peu avant 1600 introduisit l'usage de donner des noms aux quantités connues & inconnues par le moyen des symboles algébriques; il appella cela l'*Arithmétique Spécieuse*. On ne sauroit douter que cette méthode n'ait fait changer de face à l'Algebre & rendu les solutions des Problèmes plus faciles, plus simples & plus universelles.

Après Viète, Guillaume Oughtred, Anglois, publia un Livre intitulé *Clavis Mathematica*, en 1631. La même année parut l'Algebre de Thomas Hariot aussi Anglois,

ouvrage posthume, dont l'Auteur étoit mort en 1621. En 1637 le grand Descartes donna sa savante Géométrie, qu'on doit plutôt regarder comme un Traité d'Algebre. Ces Auteurs firent connoître la formation des Équations composées, & diviserent les Racines en négatives & positives, en rationnelles & radicales, en réelles & imaginaires. On a ensuite découvert plusieurs autres vérités & plusieurs usages qui ont enrichi l'Algebre.

On ne doit pas passer sous silence l'Ouvrage posthume d'un certain Marin Getald de Raguse, qui a pour titre : *de Compositione, & Resolutione Mathematicâ*, imprimé à Rome en 1630. On y trouve une méthode très-claire pour construire géométriquement, & pour déterminer les Racines réelles des Équations du premier & du second degré, après qu'elles ont été résolues.

Mais le célèbre Descartes a rendu le plus grand service aux Mathématiques en appliquant l'Analyse aux Courbes : car il a démontré leurs propriétés & construit par leur moyen les Équations supérieures au second degré. Plusieurs Géometres travaillant après ses idées ont répandu une nouvelle lumière sur ces matieres, parmi lesquels on doit

compter le célèbre Rabuel , qui nous a donné un Commentaire très-savant sur la Géométrie de Descartes.

Il seroit trop long de faire mention ici de tous les Analystes qui ont écrit après Descartes ; je me contenterai de parler de ce qui me paroîtra le plus digne d'attention. Premièrement, quoiqu'une Équation ait des Racines réelles , il est souvent très-pénible de les trouver. Les Analystes ont donné plusieurs méthodes pour y parvenir ; mais le savant Clairaut paroît avoir épuisé la matiere. Bien plus , il a enseigné la maniere de trouver les Facteurs Rationels du second degré qui peuvent diviser une Formule donnée.

Le subtil Taylor ayant proposé un certain Problème à tous les Mathématiciens non Anglois , Jean Bernoulli , Jacob Herman , Gabriel Manfredi & Julien de Fagnan découvrirent la méthode de résoudre plusieurs Binomes & Trinomes en Facteurs réels du second degré. Les Ouvrages posthumes de M. Cotes prouvent assez que cette méthode ne lui étoit pas inconnue : puisqu'on y trouve un Théorème très-élégant sur la division de la circonférence d'un Cercle en parties égales , qui est le fondement de

cette invention. Il ne fera pas inutile de lire ce que le célèbre Euler a écrit sur cette matière dans son Introduction à l'Analyse des infiniment-petits. Le célèbre M. d'Alembert a démontré que toutes les quantités imaginaires de quelle forme qu'elles soient, peuvent toujours se réduire à la forme $A + B \cdot \sqrt{-1}$, A & B, étant des quantités réelles.

Euler a ajouté à l'Analyse le nouveau Calcul des Sinus & des Co-sinus, qui est de la plus grande utilité. Vincent Ricati ne s'est pas contenté d'augmenter ce Calcul, il a inventé celui des sinus & des co-sinus hyperboliques, qui ont une très-grande analogie avec les circulaires.

Plusieurs Savans ont fait usage des Séries, ceux sur-tout qui ont traité de probabilités dans les hasards, comme Montmort, Jacques Bernoulli & Moivre ; mais Vincent Ricati a parlé fort au long de cette matière dans un Ouvrage intitulé : *de Seriebus recipientibus summam algebraicam, aut exponentialem Commentarius*.

L'usage de l'Algebre dans la Géométrie a été perfectionné & augmenté depuis Descartes. Newton nous a donné l'énumération des

lignes du troisième ordre , mais sans démonstration & sans parler des règles qu'il avoit suivies ; de sorte qu'on l'a accusé d'avoir écrit plutôt pour se faire admirer que pour instruire. Cependant on s'est aperçu que sa méthode étoit fondée sur le parallélogramme analytique que le savant de Gua a changé en triangle. Le célèbre Stirling non-seulement a développé les principes de Newton , il a même corrigé avec soin les erreurs qui étoient échappées à ce grand homme. Après lui M. Nicole nous a donné dans les Mémoires de l'Académie des Sciences l'énumération des Lignes du troisième ordre , en développant tous les principes que Newton avoit pu suivre. M. de Bragelogne a aussi entrepris l'énumération des lignes du quatrième ordre ; mais son travail est imparfait. Il a parlé fort au long des points multiples, mais il n'a presque rien dit des branches infinies. Le célèbre de Gua a développé dans un ~~fa-~~ vant Ouvrage les usages de l'Analyse Carthésienne pour la recherche des propriétés des Lignes géométriques d'un ordre quelconque. Ce Mathématicien auroit , pour ainsi dire, épuisé cette théorie , s'il n'étoit tombé dans une espèce de paralogisme , en voulant juger des Séries par leur seul premier terme. Cette recherche a été enfin finie par Cramer

dans son Livre intitulé : *Introduction à l'Analyse des Lignes courbes algébriques*. Cet Ouvrage in-4°. de 680 pages a été imprimé à Genève en 1750. L'Auteur y fait usage du Triangle algébrique , ce qui rend ses opérations longues & pénibles ; il ne parle d'ailleurs ni des courbes qu'on appelle *transcendantes* , ni des courbes à *double courbure*.

Peu de temps auparavant avoit paru *l'Introduction à l'Analyse des infiniment-petits* de M. Euler , Ouvrage latin , en deux volumes in-4°. Cet Auteur traite , comme Cramer , des branches infinies des courbes & de leurs genres , des points de contact , des rayons osculateurs , des points singuliers , des points conjugués ou solitaires , des points multiples , &c. Ces Savans sont d'accord dans les conséquences , quoique leurs méthodes soient différentes : mais celle d'Euler est plus facile à entendre & à retenir.

Outre les Ouvrages dont nous venons de parler , il y en a plusieurs autres dont nous croyons devoir faire mention , telle est l'Algebre de Jean Wallis , Anglois , qu'on trouve dans le second Tome de ses Ouvrages ; le Chevalier Newton dans son Arithmétique universelle , Ouvrage très-

digne d'un si grand Géomètre ; le Marquis de L'hôpital, qui dans son *Traité des Sections Coniques* parle des équations supérieures au second degré ; le célèbre Boscovich, Clairaut, dont l'Algebre a fait tant de bruit ; Maclaurin , Saunderfon , Emerson ; l'Algebre de M. Bezout , celle de M. l'Abbé Marie , celle de M. l'Abbé Bossut qui a paru en 1773 ; la traduction françoise de celle de M. Euler , en deux vol. in-8°. qui a paru la même année. Nous avons renfermé dans notre Ouvrage les découvertes & les méthodes les plus dignes d'attention qu'on trouve dans les Livres dont nous venons de parler, & nous avons tâché de les mettre à la portée des esprits médiocres.

Le Pere Reineau de l'Oratoire nous a donné en 1708 un Cours complet intitulé *l'Analyse démontrée*. Il faut convenir que cet Ouvrage a formé plusieurs Mathématiciens ; mais parce que dans ce temps-là les découvertes des grands hommes, sur-tout dans le calcul intégral , étoient très-fréquentes , cet Ouvrage est aujourd'hui très-imparfait. Je ne dois pas passer sous silence le Cours de M. Wolf ; mais cet Auteur n'a donné que les premiers élémens de l'Algebre. La célèbre Marie Agnesi a publié en 1748 de savantes Institutions analytiques en deux vo-

lumes in-4°. Cet Ouvrage Italien, qui a été reçu avec applaudissement, a eu le plus grand succès, & il n'est plus possible aujourd'hui de se le procurer à quelque prix que ce soit. Enfin Vincent Riccati & Jérôme Saladini ont composé de concert des Institutions analytiques en deux volumes in-fol. Dans le premier Tome, en 390 pages, on trouve l'Algebre & son application à la Géométrie avec le Calcul des sinus & des co-sinus, & un Traité de lignes courbes algébriques; mais il n'y est pas question de courbes transcendantes, ni à double courbure. Le second Tome, en 769 pages, traite du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral, j'en rendrai compte dans le Discours Préliminaire qui précédera la seconde Partie de ce Cours de Mathématiques : mais cet Ouvrage latin est peu connu en France.

Il nous reste maintenant à donner une idée tant de la méthode que nous avons suivie, que des matieres que nous avons traitées. Nous avons divisé notre Ouvrage en deux parties; la premiere, dont nous allons rendre compte, renferme le Calcul, la Géométrie, les Courbes algébriques, les Courbes transcendantes & à double courbure. Dans le premier Volume je traite
d'abord

d'abord des regles ordinaires de l'Arithmétique, des Fractions ordinaires & décimales, de l'évaluation des fractions, de la multiplication & division des Nombres complexes. Je passe tout de suite à l'Algebre, dont j'ai développé les regles le plus clairement qu'il m'a été possible; je n'ai pas oublié de donner la méthode de trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités, méthode utile dans la résolution des équations; je viens ensuite à la formation des puissances des Monomes & Polynômes, à l'extraction des Racines, au calcul des Radicaux & des Exposans, & je démontre la fameuse Formule du Binome de Newton : suivent les raisons & les proportions. Je parle bientôt après des progressions arithmétiques & géométriques; je développe ensuite la théorie des Logarithmes & leurs usages *. Je viens après cela aux Equations; je donne d'abord quelques principes, mais j'en fais tout de suite l'application à plusieurs questions très-intéressantes. Après avoir parlé des Problèmes déterminés, je passe à ceux que les Géometres appellent *indéterminés*, *sémi-*

* L'invention en est due au célèbre Neper, Ecossois, & on la regarde, avec raison, comme une des plus belles découvertes, dont les Mathématiques aient été enrichies dans ces derniers siècles.

déterminés & plus que déterminés. Je résous douze Problèmes sémi-déterminés du premier degré , & cinquante-deux des degrés supérieurs : car ce n'est que par le grand nombre d'exemples qu'on peut se flatter de former les jeunes Géomètres ; mais j'ai eu l'attention de rendre les solutions faciles , & de choisir des questions capables de piquer la curiosité des Commençans.

De-là passant aux Equations du second degré à plusieurs inconnues , je donne la méthode de résoudre ces sortes d'équations , & j'en fais l'application à plusieurs Problèmes intéressans. Je n'oublie pas de parler des Equations à deux termes , de celles qui , quoique plus élevées que le second degré , peuvent néanmoins se résoudre par la méthode du second ; & à cette occasion je donne une formule générale , pour avoir la racine m d'une quantité de cette forme $a^m + b$, b étant une quantité fort petite en comparaison de a^m .

Je passe tout de suite aux équations de tous les degrés , dont je développe la formation ; j'apprends à délivrer une équation des radicaux , de son second terme , des fractions qu'elle peut contenir , du coefficient de son premier terme ; à changer les

racines positives en négatives, & réciproquement; à changer les racines d'une équation sans les connoître, soit en les augmentant ou en les diminuant d'une quantité donnée, ou en faisant qu'elles soient à ce qu'elles étoient dans un rapport donné; à trouver les limites des racines d'une équation; à trouver les racines commensurables & les diviseurs rationels tant du premier que du second degré. Je traite après cela de la résolution des équations par le moyen des diviseurs d'un ordre quelconque. J'apprends ensuite à trouver les racines approchées, lorsqu'on ne peut pas en avoir d'exactes; à trouver les racines égales d'une équation quand il y en a. Je donne la méthode de trouver les racines de tous les degrés d'une quantité de cette forme $A + \sqrt{B}$, ce qu'on ne savoit faire dans tous les cas que pour quelques degrés. Les Equations du troisième & du quatrième degré sont trop célèbres pour les passer sous silence; c'est pourquoi j'en ai parlé assez au long. J'ai cru même faire plaisir à mes Lecteurs en leur expliquant une méthode très-élégante de résoudre les équations du quatrième degré, que nous devons au savant Euler.

Quoi qu'il n'y ait aucune méthode, du moins praticable, pour résoudre les équations

tions supérieures dans tous les cas , cependant lorsqu'une des racines peut s'exprimer par une formule semblable à celle de Cardan, on peut trouver cette racine , ainsi que je l'ai fait voir par plusieurs exemples ; j'ai donc cru devoir donner la méthode générale pour connoître les Equations qui se trouvent dans ce cas. Je parle ensuite de l'Infini , des Séries ou Suites des Nombres figurés & Polygones ; de la méthode de trouver le terme général & le terme sommatoire des suites, soit algébriques , soit récurrentes, soit algébrico-géométriques. Outre les Séries récurrentes ordinaires & qu'on peut appeller *Séries récurrentes simples* , j'ai encore parlé d'une autre espece de Séries récurrentes que j'appelle *composées* : elles se forment d'un certain nombre de termes antécédens , multipliés par des quantités constantes , en ajoutant à leur somme une même quantité positive ou négative.

Parce que les Séries récurrentes peuvent être d'un grand secours dans la recherche des racines des équations , j'ai cru devoir développer les principes sur lesquels cette méthode est fondée , en faisant voir par plusieurs exemples la maniere dont on doit s'en servir : enfin je termine mon Traité d'Algebre par la théorie des Fractions continues ,

dont on peut faire usage dans la résolution de plusieurs Problèmes. M. de la Grange en a traité fort au long dans les Additions qu'on trouve à la fin de l'Edition françoise des Elémens d'Algebre de M. Euler. Mais la théorie de ce grand Géometre paroît trop savante pour être mise à la suite d'un Ouvrage aussi élémentaire que celui de M. Euler ; ce n'est pas que nous soyons de l'avis de ceux qui assurent (voyez l'Avertissement des Editeurs de l'original) qu'un jeune homme qui avoit appris le Métier de Tailleur, & qui ne pouvoit être mis, quant à sa capacité, qu'au rang des esprits ordinaires, avoit non-seulement très-bien saisi tout ce que son Maître lui enseignoit & lui dictoit, mais qu'il s'étoit encore trouvé en peu de tems en état d'achever tout seul les Calculs algébriques les plus difficiles, & de résoudre promptement toutes les questions analytiques qu'on lui proposoit. Ce sont-là de pures fables qu'on voudra bien nous dispenser de croire. Nous ne révoquons pas cependant le fait en doute : nous prétendons seulement que le jeune homme en question avoit des dispositions plus que communes ; parce que, quoique l'Ouvrage de M. Euler soit écrit avec beaucoup de méthode & de netteté, un esprit ordinaire ne peut se flatter de l'apprendre qu'avec beaucoup de peine &

de travail *. Au reste nous avons parcouru cette Algebre avec beaucoup d'attention , & quoiqu'elle ne soit pas complete , la lecture peut cependant en être très-utile aux Commencans. Mais on trouvera dans la nôtre tout ce qu'il y a d'intéressant dans celle du savant Auteur dont nous venons de parler , & sur-tout les méthodes qui regardent l'Analyse de Diophante , avec plusieurs Problèmes dont ce Savant n'a point parlé.

Il seroit difficile de fixer l'époque de l'origine de la Géométrie ; mais on ne peut douter qu'elle ne soit de la plus grande antiquité : dès les premiers temps on eut besoin de mesurer les terrains , & bientôt après la curiosité porta les hommes à chercher des méthodes pour connoître la largeur d'une rivière qu'on ne pouvoit passer , la hauteur d'une montagne , la solidité d'une muraille , &c. on tâtona sans doute long-temps ; & ce ne fut qu'après bien des efforts qu'on trouva des moyens faciles de réussir. Euclide fut le premier , il y a environ deux mille ans , qui fit la collection des Principes Géométriques connus de son temps : & son Ouvrage con-

* Cet Ouvrage en deux volumes in-8°. a été imprimé à Lyon en 1773.

sacré par l'estime générale des siècles éclairés, est un de ces monumens précieux qui ont échappé aux injures des temps.

La Géométrie, comme tout le monde le fait, n'est autre chose que la Science de l'Espace ou de l'Étendue en *longueur*, *largeur* & *profondeur*; c'est-à-dire, la Science des *Lignes*, des *Surfaces* & des *Solides*. Après avoir parlé de l'Algebre, je viens à la Géométrie; je traite d'abord des Lignes & de leurs propriétés, des Angles & de leurs mesures. Les Géometres enseignent communément que les Angles qui ont les côtés parallèles sont égaux: je démontre qu'ils sont égaux, ou supplémens l'un de l'autre. Je parle de l'égalité & de la similitude des triangles, des Lignes proportionnelles, &c. Je passe à la mesure & au rapport des Surfaces, aux propriétés des Plans, aux Angles solides, &c. Je traite ensuite des Solides, de la mesure & du rapport de leur surface & de leur solidité. Enfin venant à la Trigonométrie, je développe les méthodes connues de résoudre les Triangles, soit rectangles soit obliquangles. J'apprends à mesurer la largeur d'une Riviere, la hauteur d'une Tour, celle d'une Montagne, la distance de deux Lieux inaccessibles; à lever

une Carte Géographique ; à trouver le rapport approché du Diametre à la circonférence d'un Cercle ; &c.

Reprenant ensuite la théorie des Sinus , Co-sinus , Tangentes , Co-tangentes , &c. j'enseigne à trouver soit le Sinus , soit le Co-sinus , soit la Tangente , soit la Co-tangente des Arcs multiples. J'applique cette théorie à la résolution des Équations du troisième degré dans le cas irréductible. Enfin je résous ce Problème : couper la demi-circonférence d'un Cercle en un nombre quelconque de parties égales par des lignes tirées d'un point , situé sur le diametre , mais hors du centre ; l'Équation à laquelle je parviens , renferme le beau Théorème de M. Cotes.

Après avoir parlé de la Trigonométrie plane ou rectiligne , je développe les principes de la Trigonométrie sphérique , science dont on ne peut se passer dans l'Astronomie , & qui est d'une si grande utilité dans la navigation. J'ai tâché de la mettre à la portée des esprits ordinaires , en la présentant sous un point de vue facile à saisir , & écartant toutes les inutilités dont certains Auteurs ont , pour ainsi dire , accablé cette partie de la Géométrie.

Pour traiter les choses dans l'ordre le plus naturel qu'il soit possible, je n'ai pas fait difficulté de faire usage de l'Algebre toutes les fois qu'il m'a paru qu'elle pouvoit simplifier les démonstrations géométriques. Ceux qui ont traité la Géométrie avant l'Algebre ont été obligés non-seulement de rendre leur ouvrage plus long, mais encore de renvoyer à l'Algebre des questions qui doivent naturellement être placées dans la Géométrie, inconvénient qui ne me paroît pas petit.

Tel est le premier volume de notre Cours de Mathématiques. Le second contient la Géométrie sublime ou la Géométrie des Courbes. Les Courbes, comme tout le monde le sçait, sont de trois especes, géométriques ou algébriques, transcendantes, & à double courbure. Parmi les Courbes algébriques, les Sections Coniques tiennent le premier rang à cause de leur utilité dans les Arts, l'Astronomie & la Méchanique : elles n'étoient pas inconnues aux anciens Géometres Grecs, qui s'en sont beaucoup occupés. Je commence donc par développer les propriétés de ces Courbes ; je n'oublie pas de parler des Logarithmes hyperboliques ordinaires, des Logarithmes simples ou d'une dimension, des Sinus & Co-sinus hyperboliques. Je viens aux Sections coni-

ques des genres supérieurs, & je fais voir que toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle, & que si elle en a plusieurs'elles sont toujours en nombre impair; de sorte que les racines imaginaires sont toujours en nombre pair: au contraire les Equations de degré pair ont des racines réelles en nombre pair, ou n'en ont aucune. Je parle aussi de quelques usages des Sections Coniques, & je donne une idée de la maniere dont on emploie la Parabole & l'Ellipse dans la construction des vaisseaux. Je fais voir aussi que la fusée d'une montre doit avoir la figure d'un hyperboloïde formé par la révolution d'un hyperbole autour de son asymptote.

Après les Sections Coniques, je parle des Courbes Algébriques de tous les genres; j'apprends à décrire la Courbe lorsqu'on a son équation; je traite ensuite de la méthode des Interpôlations, si utile dans l'Astronomie. De-là passant à d'autres objets, j'enseigne à transporter l'Équation d'une Courbe, dont les Axes des x & des y forment un Angle donné, à d'autres Axes dont l'Angle soit différent: je démontre que les seules Lignes droites sont désignées par une Équation du premier degré à une ou plusieurs inconnues. Je parle aussi de quelques pro-

priétés de Lignes de tous les ordres. Je fais voir ensuite que les Lignes du second ordre sont représentées par des Équations du second degré ; j'indique les marques auxquelles on peut reconnoître si une Ligne du second ordre est Ellipse , Parabole ou Hyperbole. Je passe aussi-tôt après aux propriétés des Lignes du troisième ordre , aux Branches infinies des Courbes , & à leurs Asymptotes rectilignes ou curvilignes. Je donne la méthode de diviser les Lignes d'un même ordre en especes. Les Lignes du second ordre sont au nombre de trois ; sçavoir , la Parabole , l'Ellipse & l'Hyperbole ; mais les Lignes du troisième ordre ont seize especes. J'ai suivi la méthode de M. Euler , qui m'a paru préférable à celle du grand Newton. Je parle ensuite d'une autre méthode pour trouver les Asymptotes des Courbes : elle est fondée sur les propriétés du Quarré analytique ou algébrique , dont je développe la construction & les usages , pour trouver les valeurs d'une inconnue par une Série qui contienne l'autre inconnue qui se trouve dans l'équation proposée : je traite aussi du retour des Suites , & je donne la méthode d'exprimer un Nombre par son Logarithme. Je parle ensuite des diametres & du centre des Courbes , de leurs tangentes & de leur

courbure , de leur figure dans un espace fini ; des Lignes courbes décrites par le moyen des instrumens ; des Courbes dont on trouve l'équation par des propriétés données qui dépendent de plusieurs points de section ; des Courbes semblables ; des intersections des Lignes algébriques ; de la construction des Problèmes & des Équations. Je résous plusieurs équations déterminées du second degré, & plusieurs Problèmes géométriques. Je traite aussi-tôt après de la construction des Équations du second degré à deux inconnues, de la résolution des Équations déterminées du troisième & du quatrième degré , des Problèmes déterminés & indéterminés , des Degrés supérieurs , & je donne une méthode par laquelle on peut facilement construire une équation déterminée d'un degré quelconque : enfin je fais voir comment on peut trouver les Racines réelles d'une Équation numérique à une seule inconnue.

Les Courbes transcendantes , qu'on appelle encore *mécaniques* , devant faire partie d'un Cours complet de Mathématiques , j'ai cru devoir parler des plus fameuses , telles que la Ligne des sinus & des co-sinus , les Spirales de différens genres , la Quadratrice de Dinostrate , la Cycloïde , la Logarithmi-

que , & je n'ai pas oublié les Courbes que M. Leibnitz appelle *intercendantes*.

Outre les Lignes dont nous venons de parler , qui sont toujours situées sur une surface plane , les Géomètres modernes considèrent encore les Courbes à double courbure , dont tous les points ne sont pas placés dans le même plan ; mais parce que la théorie des Courbes à double courbure suppose celle des surfaces courbes , je traite d'abord des équations des surfaces courbes ; & venant ensuite aux Courbes à double courbure , j'apprends à les décrire par le moyen des équations de leurs trois Courbes de projection , me réservant de parler plus au long de ces sortes de Courbes dans la seconde Partie de cet Ouvrage.

Il nous reste à dire un mot de la manière dont les Commençans peuvent étudier notre Cours de Mathématiques. Ceux qui n'ont pas le secours d'un bon Maître , chose rare dans les Provinces , doivent lire d'abord tout ce qui est écrit en caractère ordinaire , avec les Notes qui y ont rapport , Notes inutiles sans doute pour les Savans , mais que nous avons jugé à propos de multiplier , afin de nous rendre plus intelligibles , nous étant

xxx DISCOURS PRELIMINAIRE.

proposés d'instruire les Commençans , & non de nous faire admirer. Revenant ensuite sur leurs pas , ils reprendront le tout , en lisant de suite l'Ouvrage-tout entier : j'en excepte la dernière section de la seconde Partie , pour laquelle il ne sera pas nécessaire de prendre cette précaution. Le petit caractère contient (excepté dans la quatrième section de la seconde Partie) des choses moins essentielles , quoique très-intéressantes ; & ceux qui veulent approfondir les Mathématiques & devenir vraiment Géomètres , seront bien-aise de trouver rassemblés dans un petit nombre de volumes les découvertes & les travaux des Mathématiciens anciens & modernes. Une longue expérience nous ayant appris la manière dont on doit présenter la vérité aux jeunes gens pour qu'ils la saisissent avec facilité , nous espérons que les esprits même ordinaires pourront , moyennant une application un peu soutenue , comprendre facilement notre Ouvrage & devenir Géomètres sans le secours d'aucun Maître : mais ceux qui auront ce secours pourront faire des progrès plus rapides , & approfondir les Mathématiques en fort peu de temps.



A P P R O B A T I O N

D U C E N S E U R R O Y A L .

J'AI lu par l'ordre de Monseigneur le Chancelier, le *Cours complet de Mathématiques*, composé par M. l'Abbé SAURI. Ce Cours m'a paru plus complet que tous ceux qui ont paru jusqu'à présent, soit en France, soit dans le reste de l'Europe : la Géométrie, l'Algebre, les Séries, la théorie des Sinus y sont traités d'une manière aussi claire que profonde ; les Sections Coniques y sont très-bien développées ; on y trouve tout ce qu'on peut désirer sur les Courbes transcendantes & sur les Courbes à double courbure, avec la résolution des Problèmes de Géométrie qui s'y rapportent, la méthode de trouver les racines des Equations par le moyen des Courbes & du quarré analytique.

La seconde Partie de cet Ouvrage contient quatre Sections : dans la premiere sont les principes généraux du Calcul différentiel & du Calcul intégral, les applications du Calcul différentiel aux sous-tangentes, sous-normales, tangentes & normales des Courbes, soit algébriques, soit transcendantes, & aux questions importantes de *maximis* & *minimis*. L'Auteur examine, par exemple, qu'elles sont les conditions que doivent avoir les fonctions algébriques, pour être susceptibles du *maximum* & du *minimum*. Il explique les *maxima* & *minima* de la seconde espece, les rayons de courbure, les points d'inflexion & de rebroussement, les caustiques par réflexion & par réfraction, & l'usage du Calcul différentiel dans la recherche des racines des Equations. Les notions qu'il donne sur la nature du Calcul infinitésimal, sont claires & satisfaisantes ; il paroît même prouver que Newton, Euler se sont trompés dans l'idée qu'ils s'en formoient.

La seconde Section comprend les applications du Calcul intégral à la Géométrie ; on y apprend la quadrature & la rectification des Courbes, la manière de trouver le centre de gravité des Solides, la méthode inverse des tangentes, & l'application du Calcul différentiel & intégral aux Courbes à double courbure.

Dans la troisième Section, M. l'Abbé SAURI donne la manière d'intégrer les Formules & les Equations différentielles à une & à plusieurs variables ; on y apprend dans quel cas une différentielle d'un ordre quelconque peut être intégrée un certain nombre de fois dans l'état où elle est. Tout ce qu'on a

xxxij

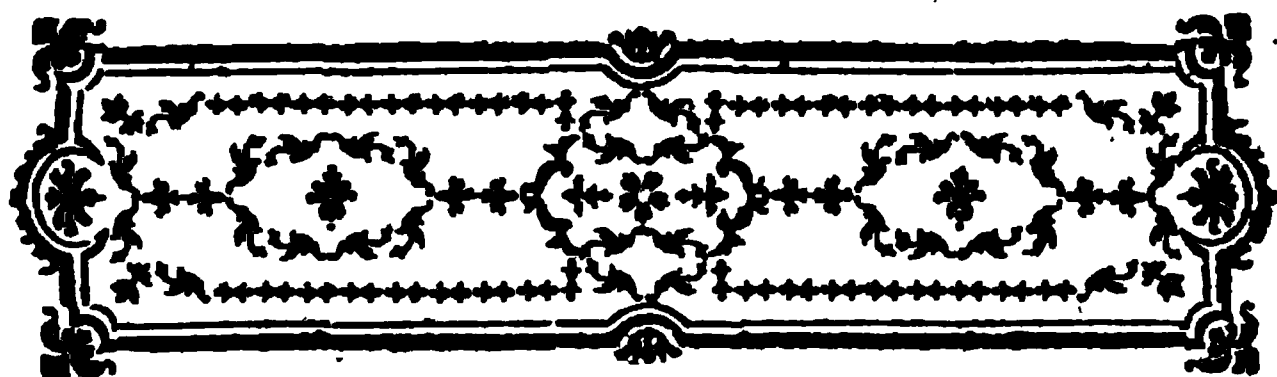
trouvé de plus intéressant sur le Calcul intégral , depuis que les plus grands Géomètres s'en sont occupés , est renfermé dans cette Section , qui tiendra lieu de plusieurs volumes à ceux qui voudront approfondir cette partie , la plus abstraite de la haute Géométrie. L'Auteur y développe la nouvelle théorie des Variations , avec les conséquences qu'on peut en tirer pour la perfection du Calcul intégral ; il fait enfin l'application de ce Calcul aux questions de *maximis & minimis* , qui ne peuvent se résoudre par le Calcul différentiel.

La quatrième Section renferme l'application de tous ces Calculs aux plus beaux Problèmes de Physique , de Marine , de Méchanique & d'Hydrodynamique.

Cet exposé du Cours de Mathématiques de M. l'Abbé SAURI fait voir qu'il étoit difficile d'y réunir plus d'avantages ; on les chercheroit inutilement dans tout autre Ouvrage. L'Auteur y a mis la plus grande clarté. Il substitue souvent aux méthodes des plus habiles Géomètres , des méthodes plus simples qui lui sont propres & qui sont ingénieuses ; il relève des erreurs dans des Auteurs célèbres , relativement à des questions importantes ; enfin il réunit tous les genres de mérite que l'on pouvoit donner à cet Ouvrage. On pourra par le moyen de ce Livre approfondir les Mathématiques plus facilement & en moins de temps qu'on ne pouvoit le faire avec le secours dispendieux d'un grand nombre de Livres étrangers & de Mémoires de différentes Académies , dont on pourra se passer au moyen du nouvel Ouvrage de M. l'Abbé SAURI. A Paris , le premier Mars 1772. Signé , DELALANDE, de l'Académie des Sciences.

*Le Privilége se trouve au Cours de Philosophie
par le même Auteur.*

COURS



COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

C A L C U L.

I. **L**ES MATHÉMATIQUES ne sont autre chose que la science de la grandeur. La *grandeur* ou *quantité* est une chose susceptible d'augmentation ou de diminution : comme les nombres qu'on peut augmenter, en leur ajoutant une ou plusieurs unités, qu'on peut diminuer en en retranchant un autre nombre : ainsi, en ajoutant trois unités au nombre douze, on a *quinze* ; & seulement *huit*, si de ce nombre l'on retranche quatre. La quantité dont les parties sont séparées, s'appelle *grandeur discrete* : tel est un amas de grains ; elle fait l'objet de l'Arithmétique. On appelle *grandeur continue*, celle dont les parties sont unies entr'elles : si ces parties existent successivement, & non toutes à la fois, c'est alors la *grandeur successive* : tel est le temps, dont les

parties se suivent les unes les autres sans aucune interruption; si les parties existent toutes à la fois, on la nomme *grandeur permanente* : telle est l'étendue qui fait l'objet de la Géométrie.

On peut diviser les Mathématiques en *purès & mixtes*. Les Mathématiques pures considèrent la grandeur en tant que grandeur; les Mathématiques mixtes considèrent la grandeur en tant que revêtue des qualités sensibles & physiques : comme la Méchanique, qui considère le mouvement des corps; l'Optique, qui traite des propriétés de la lumière. Comme nous avons déjà rendu compte du plan de notre Ouvrage, il seroit inutile de revenir là-dessus; mais, avant d'entrer en matière, il est bon d'expliquer ce qu'on entend par certains termes fort usités chez les Mathématiciens.

Un *Théorème* est une proposition dont il s'agit de démontrer la vérité.

Un *Corollaire* est une proposition qui suit d'une autre.

Un *Problème* est une proposition qui enseigne le moyen de faire quelque chose.

Un *Lemme* est une proposition qu'on démontre pour servir de principe à un autre.

Un *Scolie* est une remarque que l'on fait sur une proposition déjà démontrée, ou bien encore la recapitulation succinte d'une théorie plus étendue.

Une *Définition* est une proposition qui explique la nature d'une chose, ou la signification d'un mot.

On entend, par *Axiomes*, des vérités si palpables que personne ne les conteste : telles sont les propositions suivantes.

Le tout est plus grand qu'une de ses parties; deux choses égales à une troisième, sont égales en-

tr'elles ; si à des quantités égales on ajoute des quantités égales ; ou bien, si de quantités égales on retranche des quantités égales , elles resteront égales.

DE L'ARITHMÉTIQUE.

1. L'*Arithmétique*, ou la science des nombres , apprend à les composer & décomposer. On entend par un *nombre*, l'*assemblage de plusieurs unités* ; l'*unité* est une chose indivisible , ou qu'on regarde comme telle , mais cela n'empêche pas que certaines unités ne soient composées d'autres unités plus petites : *par exemple* , l'unité de livre est composée de seize onces. On se sert dans la numération actuelle des dix caractères suivans :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zéro	un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf

Le 0 seul ne signifie rien , mais il augmente la valeur des chiffres qui le précèdent vers la gauche : le caractère 3 , *par exemple* , ne vaut que trois unités ; mais , s'il est suivi d'un 0 , en cette manière 30 , il vaut *trente* : de même le chiffre 2 ne vaut que *deux* ; mais suivi d'un 3 ; en cette manière 23 , il vaut *vingt-trois* : de sorte que , dans la numération actuelle , la valeur des chiffres va en augmentant de droite à gauche , en proportion décuple : c'est-à-dire , l'unité d'un chiffre plus à gauche , vaut dix fois l'unité d'un chiffre immédiatement plus à droite : donc , en allant de la droite à la gauche , les unités du premier chiffre seront des unités simples ; celles du second , des dizaines ; celles du troisième , des centaines ; celles du quatrième , des mille , &c. comme on le voit ici :

2	Unités.
7	Dixaines.
8	Centaines.
5	Mille.
0	Dixaines de mille qui manquent.
3	Centaines de mille.
4	Millions.
2	Dixaines de millions.
3	Centaines de millions.
2	Billions.
9	Dixaines de billions.
3	Centaines de billions.
5	Trillions.
&c.	

Si donc on propose d'exprimer en chiffres le nombre cinquante millions cinq cens douze mille cent, je commence par les millions, en écrivant 50 ; j'écris ensuite 512, & à côté je pose encore 100, & j'ai 50, 512, 100, nombre demandé : mais, pour exprimer dans le discours le même nombre exprimé en chiffres, après l'avoir partagé en tranches, en commençant par la droite, en sorte que chaque tranche contienne trois chiffres, excepté la première à gauche qui peut en contenir moins, je vois que la première tranche (car on suppose qu'il y en a plus d'une, autrement ce que nous venons de dire n'auroit pas lieu) contient des unités ; la seconde des mille, & la troisième des millions : ainsi, en allant de la gauche à la droite, je dirai cinquante millions cinq cens douze mille cent.

DE L'ADDITION.

3. *L'Addition* est cette opération par laquelle on trouve la somme de plusieurs nombres qu'on veut joindre ensemble.

PROBLEME. Soit proposé d'ajouter ensemble les nombres 73520, 702, 897 : les ayant écrits les uns sous les autres, les unités sous les unités, les dizaines

sous les dixaines, &c. on tirera une barre au-dessous; prenant ensuite la somme des unités, on l'écrira sous les unités; on prendra ensuite la somme des dixaines, qu'on écrira sous les dixaines; puis celle des centaines, &c. Si la somme des unités ne peut s'exprimer que par 2 chiffres, on écrira sous les unités celui de la droite, & l'on retiendra celui de la gauche pour l'ajouter à la somme des dixaines; on fera la même chose à l'égard des dixaines par rapport aux centaines, &c. Ainsi je dirai 7 & 2 font 9, que j'écris sous les unités: je passe ensuite aux dixaines, en disant 9 & 2 font 11, qui valent une dixaine & 10 dixaines, c'est-à-dire, une dixaine & une centaine, c'est pourquoi j'écris 1 sous les dixaines, & je retiens 1 pour l'ajouter à la somme des centaines: je dis donc 1 de retenu & 8 font 9, & 7 font 16, & 5 font 21, j'écris 1 sous les centaines, & je retiens les 2 pour les ajouter au chiffre 3 situé dans la colonne des mille, je dis donc 2 de retenu & 3 font 5, que j'écris sous les mille; je passe ensuite à la colonne des dixaines de mille, qui ne contient que le chiffre 7 que j'écris sous cette colonne, de sorte que j'ai pour somme cherchée le nombre 75119.

4. PROBLEME. *Ajouter ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire, des nombres qui contiennent des grandeurs de différentes especes, comme livres, sols, deniers.* Il faut écrire les unités de même nature les unes sous les autres, c'est-à-dire, les deniers, par exemple, sous les deniers, les sols sous les sols, &c. On prendra ensuite la somme des plus petites especes, & l'on verra si cette somme ne contient pas une ou plusieurs unités de l'espece plus grande, dans ce cas on retiendrait cette unité,

ou ces unités, pour en faire une seule somme avec le nombre qui désigne la somme des unités de la grandeur suivante : on en feroit de même pour les sols à l'égard des livres : ainsi, pour ajouter ensemble les nombres qu'on voit ici ,

352	liv.	3	sols.	5	den.
872		18		10	
3		0		2	
1228	liv.	2	sols.	5	den.

Je prends la somme des deniers, laquelle étant 17 (on prend les 10 deniers tous à la fois) vaut 5 deniers & 12 deniers, c'est-à-dire, un sol & cinq deniers : c'est pourquoi écrivant 5 sous les deniers, je retiens un sol pour l'ajouter à la somme de la colonne suivante : je dis donc un sol de retenu & 0 & 18 font 19 & 3 font 22, qui valent 2 sols & 1 liv. c'est pourquoi j'écris 2 sols sous les sols, & je retiens 1 que j'ajoute aux livres ; je dis donc un de retenu & 3 font 4, & 2 font 6, & 2 font 8, que j'écris sous les unités de livre. Je passe ensuite à la colonne suivante, dont la somme est 12, c'est pourquoi j'écris 2 sous cette colonne, & je retiens 1 pour la colonne suivante, qui par ce moyen (2) vaudra 12 : ainsi j'écrirai 2 sous les centaines de livre, & 1 au rang des mille, de sorte que la somme sera 1228 liv. 2 s. 5 den. On opérera de même s'il s'agit d'ajouter ensemble des toises, pieds & pouces, en se souvenant que la toise vaut 6 pieds, & le pied 12 pouces.

Scolie. On peut, en opérant sur les deniers ou les sols, prendre à la fois la somme des dizaines & des

unités , sans s'assujettir à passer des unités aux dixaines.

DEMONSTRATION de l'Addition. En suivant la règle prescrite , on prend la somme des unités , celle des dixaines , celle des centaines , &c. donc on prend la somme entière des nombres proposés.

Pour faire la preuve de l'Addition , on peut recommencer l'opération , en allant de bas en haut , si l'on a d'abord opéré , en allant de haut en bas , ou réciproquement ; & si l'on trouve la même somme que l'on a d'abord trouvée , c'est une marque qu'il n'y a pas d'erreur ; car il n'y a point d'apparence qu'on fasse la même faute dans les deux opérations.

DE LA SOUSTRACTION.

5. *Soustraire un nombre 3 , par exemple , de 5 , c'est ôter 3 de 5 ; le reste 2 est l'excès du plus grand sur le plus petit : on l'appelle aussi différence. Il est visible que l'excès ou la différence 2 étant ajoutée au nombre 3 qu'on a soustrait , doit donner le nombre 5 dont on a soustrait. Il est encore évident que si on ajoutoit au nombre 5 un nombre 10 , par exemple , en ajoutant le même nombre au nombre 3 qu'on veut soustraire de 5 , la différence 2 de 15 à 13 seroit encore la même qu'auparavant.*

6. **PROBLEME.** *Soustraire le nombre 3502 du nombre 58001. Ecrivez le plus petit sous le plus grand , en sorte que les unités répondent aux unités , les dixaines aux dixaines , &c. Retrancher , en allant de la droite à la gauche , chaque chiffre du nombre inférieur du chiffre correspondant dans le nombre supérieur ; écrivez la différence sous chaque co-*

lonne. Si un des chiffres du nombre inférieur se trouve plus grand que son correspondant dans le nombre supérieur, ajoutez 10 au nombre supérieur; mais ensuite n'oubliez pas d'ajouter une unité au chiffre suivant du nombre inférieur. Cette unité étant ajoutée à un chiffre immédiatement plus à gauche, vaudra les dix unités ajoutées au nombre supérieur (2) : ainsi (5) la différence sera toujours la même. Ayant donc écrit les deux nombres, comme on le voit ici : je dis 2 de 1, cela ne se peut ; c'est pourquoi ajoutant 10 à 1, je retranche 2 de 11, j'écris le reste 9 sous les unités ; mais je me souviens ensuite d'ajouter 1 au chiffre suivant 0 du nombre inférieur (cela se fait seulement par la pensée) ce qui fait 1, qui ne peut être soustrait du chiffre correspondant 0 ; j'ajoute donc 10 à 0, & je retranche 1 de 10 pour avoir le reste 9, que j'écris au rang des dizaines ; & à cause de 10 ajouté au nombre supérieur, j'ajoute 1 au chiffre 5 du nombre inférieur 1, la somme 6 ne peut être retranchée du chiffre correspondant 0, j'ajoute donc 10 à 0, d'où retranchant 6, il reste 4, que j'écris à la différence ; je me souviens d'ajouter 1 au chiffre suivant 3 du nombre inférieur pour avoir la somme 4, qui ôtée de 8, il reste 4 que j'écris à la différence ; & comme je n'ai rien à ôter de 5, je dis rien, ou 0, de 5, il reste 5 que j'écris encore à la différence, comme on le voit, de sorte que la différence cherchée est 54499.

Si les nombres sont complexes, il faut écrire les unités de même espèce les unes sous les autres, & soustraire en allant de droite à gauche, chaque chiffre du nombre inférieur de son correspondant dans le nombre supérieur. S'il arrivoit que le nombre

des deniers , *par exemple* , dans le nombre inférieur fût plus grand que son correspondant , on ajouteroit à ce nombre correspondant un sol réduit en deniers , c'est-à-dire , 12 deniers ; mais il faudroit ajouter 1 aux sols du nombre inférieur , afin que la différence fût toujours la même. Si l'on étoit obligé d'ajouter aux sols du nombre supérieur , on leur ajouteroit 20 sols , c'est-à-dire , une livre réduite en sols , puis on ajouteroit 1 livre aux livres du du nombre inférieur. S'il s'agissoit de pouces , pieds , & toises , on s'y prendroit comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE. Soit proposé de soustraire 25 toises , 3 pieds , 10 pouces , de 368 toises , 2 pieds , 8 pouces. Ayant disposé ces nombres , comme on le voit ici :

$$\begin{array}{r}
 368 \text{ toises. } 2 \text{ pieds. } 8 \text{ pouces.} \\
 25 \qquad \qquad 3 \qquad \qquad 10 \\
 \hline
 342 \qquad \qquad 4 \qquad \qquad 10 \\
 \hline
 368 \text{ toises. } 2 \text{ pieds. } 8 \text{ pouces.}
 \end{array}$$

Je dis 10 de 8 ; cela ne se peut ; c'est pourquoi j'ajoute 1 pied , ou 12 pouces , à 8 , ce qui me donne 20 , d'où retranchant 10 , reste 10 , que j'écris sous les pouces. J'ajoute ensuite un pied au nombre inférieur pour avoir 4 pieds , qui ne peuvent s'ôter de 2 ; c'est pourquoi j'ajoute une toise , ou 6 pieds au nombre supérieur , ce qui me donne 8 , d'où retranchant 4 , il reste 4 , que j'écris sous les pieds. Comme j'ai ajouté une toise au nombre supérieur , je dois en ajouter une à l'inférieur ; je dis donc 5 & 1 font 6 , de 8 , il reste 2 , que j'écris

sous les toises : j'ôte ensuite 2 de 6 , & je pose 4 à côté du 2 , & enfin , ôtant rien , ou 0 de 3 , il reste 3 que j'écris encore à la différence , qui est 342 toises , 4 pieds , 10 pouces.

Pour faire la preuve de la Soustraction , on ajoutera ensemble le nombre qu'on a soustrait avec la différence , & l'on trouvera la même somme , si l'opération est bien faite. Si l'on ajoute donc 25 toises , 3 pieds , 10 pouces , avec 342 toises , 4 pieds , 10 pouces , on aura 368 toises , 2 pieds , 8 pouces : ainsi l'opération ci-dessus est bien faite.

Pour faire la démonstration de la Soustraction , il n'y a qu'à remarquer qu'en suivant la méthode proposée , on prend la différence des unités , celle des dizaines , des centaines , &c. du plus grand & du plus petit nombre : on trouve donc la différence totale de l'un à l'autre.

DE LA MULTIPLICATION.

7. *Multiplier un nombre par un autre , c'est prendre le premier , qu'on appelle Multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le second , qu'on nomme Multiplicateur ; le résultat s'appelle Produit. Par exemple , multiplier 5 par 3 , c'est prendre 5 trois fois , ce que l'on fait , en disant , 3 fois 5 font 15 , 5 est le multiplicande , 3 le multiplicateur , & 15 le produit. Il suit de là que le produit 15 doit contenir le multiplicande 5 trois fois , c'est-à-dire , autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Pour exécuter facilement la multiplication , il est bon d'apprendre par cœur la table suivante , dont l'usage est facile à concevoir :*
si je veux savoir , par exemple , combien font 7

fois 6, je cherche la case qui répond à 7 & à 6, le nombre 42 qui se trouve dans cette case, est le produit de 7 par 6, & ainsi des autres.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

PROBLEME. *Multiplier un nombre par un autre.*
 Écrivez le multiplicateur au-dessous du multiplicande, de manière que les unités répondent aux unités, les dizaines aux dizaines, &c. Écrivez ensuite, en allant de la droite à la gauche, le produit de chaque chiffre du multiplicande par les unités du multiplicateur, ayant attention, lorsqu'un produit contient deux chiffres, de retenir celui de la gauche, pour l'ajouter au produit suivant, dont les unités sont des dizaines du produit précédent. S'il y a plusieurs chiffres au multiplicateur, le premier chiffre de chaque produit doit être écrit sous le chiffre correspondant du multiplicateur, ce qui est évident; puisque, quand on multiplie, *par exemple*, par les dizaines du multiplicateur, le premier chiffre du produit doit être au rang des

dixaines, &c. Prenez ensuite la somme de tous les produits, & vous aurez le produit total : Pour multiplier 3052, *par exemple*, par 153, après avoir écrit le multiplicande & le multiplicateur, comme on le voit ici, je dis 3 fois 2 font 6, que j'écris sous le premier chiffre du multiplicateur ; je dis ensuite 3 fois 5 font 15, j'écris 5 à côté de 6, & je retiens 1 : continuant d'opérer, je dis 3 fois 0 font 0, & 1 de retenu font 1, que j'écris à la gauche du 5 ; je dis ensuite 3 fois 3 font 9, que j'écris comme on le voit, & j'ai le produit du multiplicande par le premier chiffre du multiplicateur. Je prends de même le produit du multiplicande par le second chiffre du multiplicateur, en disant 5 fois 2 font 10 ; j'écris 0 sous le second chiffre 5 du premier produit, & je retiens 1. En continuant d'opérer, je dis, 5 fois 5 donnent 25, & 1 de retenu font 26, j'écris 6 & retiens 2 ; je dis ensuite 5 fois 0 donnent 0, & 2 de retenus donnent 2, que j'écris à côté de 6 : je dis enfin 5 fois 3 font 15, que je pose, comme on le voit. Je passe au troisième chiffre du multiplicateur, en disant, 1 fois 2 est 2, que j'écris sous 1, c'est-à-dire, au rang des centaines ; je dis ensuite 1 fois 5 donne 5, j'écris 5 à côté de 2 : ensuite 1 fois 0 donne 0, que j'écris après 5 ; enfin 1 fois 3 fait 3, que j'écris après 0. J'ajoute ces différens produits, en disant, 6 que j'écris sous 6 ; ensuite 0 & 5 font 5, que j'écris à côté de 6. Et continuant d'opérer, je dis, 1 & 6 font 7, & 2 donnent 9, que j'écris à côté de 5 ; & continuant de même, j'ai le produit total 466956.

DEMONSTRATION de la Multiplication. En sui-

vant le procédé que nous venons d'indiquer, on prend le produit du multiplicande par les unités, par les dizaines, centaines, &c. du multiplicateur : donc on trouve le vrai produit, ou, ce qui revient au même, l'on prend le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur . . . En effet, en multipliant par 3, on a pris le multiplicande 3 fois, en multipliant par 5 on l'a pris 50 fois, puisqu'on a écrit le premier chiffre du produit au rang des dizaines, en multipliant par 1, & mettant le premier chiffre du produit au rang des centaines, on a multiplié par 100 : on a donc pris le multiplicande 153 fois.

Comme dans certains cas on peut abréger la multiplication, il est bon d'en faire connoître quelques-uns. Si l'on doit multiplier par 1 suivi d'un ou de plusieurs 0 il suffira d'écrire à la suite du multiplicande autant de 0 qu'il y en a au multiplicateur : *par exemple*, pour multiplier 25 par 100, j'écris 2500, ce qui est évident, puisque multiplier 25 par 100, c'est prendre le multiplicande 100 fois, ou, ce qui revient au même, c'est rendre le multiplicande 100 fois plus grand ; or, en ajoutant deux 0, on rend le multiplicande 100 fois plus grand, puisque ses unités deviennent des centaines, & ses dizaines deviennent des mille : donc, &c. Si on avoit à multiplier 25 par un nombre quelconque, suivi d'un ou de plusieurs 0, on multiplieroit à l'ordinaire sans avoir égard aux 0, on ajouteroit ensuite au produit autant de 0 qu'il y en auroit au multiplicateur : ainsi, si le multiplicateur étoit 300, on multiplieroit 25 par 3, le produit est 75, à côté duquel écrivant 00, j'ai pour produit total 7500 : en effet le produit de 25 par 300 doit être triple du pro-

duit de 25 par 100 ; or, 7500 est triple de 2500.

S'il y avoit des 0, tant à la fin du multiplicande, que du multiplicateur : *par exemple*, si on avoit à multiplier 250 par 300, on multiplieroit 25 par 3, & l'on ajouteroit au produit 75 autant de 0 qu'il y en a, tant au multiplicande qu'au multiplicateur, & le produit cherché seroit 75000. Pour en avoir la raison, il suffit de remarquer que le produit de 25 par 300 doit être 7500, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus ; or 250 est 10 fois plus grand que 25, donc le produit 7500 est 10 fois trop petit ; on doit donc, en ajoutant un 0, le rendre 10 fois plus grand : donc, &c.

REMARQUE I. Cela n'a pas lieu pour les 0 qui se trouvent entre les chiffres positifs du multiplicande ou du multiplicateur : ainsi, pour multiplier 12000 par 10100, on doit multiplier 12 par 101, & ajouter au produit autant de 0 qu'il y en a, tant à la fin du multiplicande, qu'à la fin du multiplicateur, & l'on aura pour produit 121200000.

REMARQUE II. La Multiplication sert à réduire les grandes especes en petites ; *par exemple*, les toises en pieds, les pieds en pouces, les livres en sols, les sols en deniers. Ce qui se fait en multipliant les grandes especes par le nombre qui désigne combien de fois la grande contient la petite espece : ainsi, pour savoir combien 8 toises valent de pieds, je multiplie 8 par 6, parce que la toise contient six pieds, le produit 48 me fait voir que 8 toises valent 48 pieds.

Pour prouver la multiplication, on peut changer l'ordre des nombres donnés, c'est-à-dire, prendre pour multiplicande le multiplicateur, & réciproquement ; car on doit toujours trouver le même

produit : en effet, 4 multiplié par 3 donne 12 ; & 3 multiplié par 4 donne aussi 12.

D E L A D I V I S I O N .

8. *La Division est une opération par laquelle on cherche combien de fois un nombre , par exemple , 15 qu'on appelle Dividende , contient un autre nombre 5 ; par exemple , qu'on nomme Diviseur ; le nombre 3 qui exprime combien de fois le dividende 15 contient le diviseur 5 , est appelé Quotient.*

COROLLAIRE. De-là il suit : 1°. que le dividende contient le diviseur autant de fois que le quotient contient l'unité ; 2°. que la division est une espèce de soustraction, puisque, quand on demande de diviser 15 par 5, c'est la même chose que si on demandoit de soustraire 5 de 15 autant de fois qu'il y est contenu, c'est-à-dire, 3 fois ; & si l'on fait attention qu'en multipliant 5 par 3, on ajoute 5 trois fois, il sera aisé de voir que la multiplication est une espèce d'addition, comme la division est une espèce de soustraction ; 3°. que parce que le quotient exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, si on prend le diviseur autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, on aura le dividende ; de sorte que le produit du diviseur, par le quotient, doit rendre le dividende (& c'est en cela que consiste la preuve de la division), si le quotient est exact ; mais si ce quotient n'est pas exact, c'est-à-dire, s'il y a un reste, il est nécessaire qu'en ajoutant le reste au produit dont nous venons de parler, on retrouve le dividende. *Par exemple*, si je divise 24 par 5, je dirai en 24 combien de fois 5, je trouve 4 pour quotient ; mais 5

parce que 20, produit du diviseur 5 par le quotient 4, étant soustrait du dividende 24, il y a 4 de reste, il faut qu'en ajoutant le reste 4 au produit 20, on retrouve le dividende 24; 4°. puisqu'en multipliant 5 par 3, le produit 15 contient évidemment le multiplicande 5 trois fois, c'est-à-dire, autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, si on divise le produit par le multiplicande, on doit retrouver le multiplicateur au quotient: en effet, en divisant 15 par 5, on a 3 pour quotient. On voit aussi qu'en divisant le produit 15 par le multiplicateur, on aura le multiplicande 5, & c'est en cela que consiste la preuve de la multiplication.

PROBLEME. *Diviser un nombre par un plus petit.* Ecrivez le diviseur à la droite du dividende, en les séparant l'un de l'autre par une barre; tirez-en une autre au-dessous; prenez pour premier membre de division un nombre de chiffres capable de contenir le diviseur; cherchez combien de fois le diviseur est contenu dans le premier membre dont nous venons de parler: écrivez le quotient, en commençant par la gauche; multipliez ensuite le quotient que vous venez d'écrire par le diviseur; ôtez le produit du premier membre de division; à côté du reste, ou de 0, s'il n'y a point de reste, descendez le chiffre suivant du dividende; divisez le reste joint au chiffre descendu, ou le chiffre descendu seul, s'il n'y a point de reste, par le diviseur; écrivez le résultat au quotient, & ainsi de suite jusqu'à la fin. Si, en opérant ainsi, l'on s'aperçoit que le diviseur n'est pas contenu dans quel'un des membres de division qui suivent le premier, on mettra 0 au quotient; & si à la fin on trouve

trouve un reste, on l'écrira à part, en le renfermant entre deux crochets, pour l'ajouter au produit du quotient entier par le diviseur.

EXEMPLE I. *Soit proposé de diviser 824 par 4.* Ayant écrit le diviseur à la droite du dividende, comme on le voit ici, je prends 8 pour premier membre de division, & je dis $\frac{824}{8} \bigg| 4$ en 8 combien de fois 4, je trouve qu'il y est 2 fois, c'est pourquoi j'écris 2 au quotient; multipliant ensuite le diviseur par le quotient, & retranchant le produit de 8, il reste 0, à côté duquel je descends 2; mais, parce que 2 ne contient pas 4, j'écris 0 au quotient. A côté de 2 je descends 4 pour avoir 24 au troisième membre de division: je divise 24 par 4, & j'écris le quotient 6, que je multiplie par le diviseur 4; Le produit 24 étant retranché de 24, il ne reste rien, de sorte que le quotient est exact, & égal à 206.

EXEMPLE II. *Soit proposé de diviser 358 par 5.* Je prends 35 pour premier membre de division, parce que le premier chiffre 3 ne contient pas le diviseur; je dis ensuite en 35, combien de fois 5, il y est 7 fois, j'écris 7 au quotient; je multiplie le diviseur 5 par 7, le produit 35 étant retranché de 35, le reste est 0; à côté duquel je descends 8, pour dire ensuite, en 8 combien de fois 5; 1 fois, j'écris donc 1 au quotient; & multipliant 5 par 1, je retranche le produit 5 de 8. J'ai un reste 3 que j'écris entre deux crochets, comme vous le voyez ici, ce qui marque que si le dividende eût été plus petit de 3, il auroit contenu le diviseur 71^e fois juste.

EXEMPLE III. *Soit proposé maintenant de diviser*
Tome I. B

1534 par 23. Ayant disposé le diviseur & le dividende comme à l'ordinaire, je remarque que les deux premiers chiffres du dividende ne contiennent pas le diviseur 23, c'est pourquoi je prends pour premier membre de division les trois premiers chiffres du dividende, & je conçois que le premier chiffre 2 du diviseur répond aux deux premiers du dividende, en cette manière $\overset{1}{2}\overset{1}{3}$ (ce qui a lieu de même toutes les fois qu'un membre de division contient un chiffre de plus que le diviseur). Je dis ensuite, en 15 combien de fois 2, je trouve qu'il y est 7 fois : je multiplie le diviseur entier par 7, le produit 161 ne peut être soustrait du dividende partiel 153 : ainsi je diminue le quotient d'une unité ; & comme le produit 138 du diviseur 23 par 6 peut être ôté du premier membre de division 153, je fais cette soustraction, & je mets 6 au quotient. Je descends 4 à côté du reste 15, & je trouve de même que le second chiffre du quotient est 6 : je multiplie encore le diviseur par 6, & je soustrais le produit 138 de 154, pour avoir le reste 16, que j'écris à côté du quotient, comme on le voit ici.

$$\begin{array}{r|l}
 1534 & 23 \\
 \hline
 1380 & 66(16) \\
 154 & \\
 138 & \\
 \hline
 16 &
 \end{array}$$

REMARQUES. 1°. On se sert d'abord seulement du premier chiffre du diviseur pour trouver le quotient ; mais, parce qu'il s'agit de trouver combien de fois le diviseur entier est contenu dans le dividende, il faut, avant de mettre un chiffre au quotient, multiplier le diviseur entier par ce chiffre. Si le produit peut être soustrait du dividende partiel, on l'écrira au quotient : si le contraire arrive, on diminuera le quotient d'une, de deux, de trois, &c. unités, jusqu'à ce que le produit

soit contenu dans ce dividende ; & si le diviseur se trouvoit plus grand que le membre de division sur lequel on opere , on écrirait 0 au quotient. 2°. Il est bon de passer un trait sur chaque chiffre qu'on abaisse , afin de se souvenir qu'on l'a abaissé. 3°. Si un reste étoit égal , ou plus grand que le diviseur , ce seroit une marque que le diviseur seroit contenu dans ce dividende au moins 1 fois de plus qu'il n'est marqué par le quotient , il faudroit donc augmenter ce quotient. 4°. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient ; car supposons d'abord que le membre de division sur lequel on opere , contient autant de chiffres que le diviseur : que ce membre soit 99 , *par exemple* , qui est le plus grand nombre de deux chiffres , & que le diviseur soit 10 , qui est le plus petit nombre de deux chiffres ; or 99 ne contient pas 10 dix fois , puisque 10 fois 10 font 100 , plus grand que 99. Supposons en second lieu que le dividende partiel contienne un chiffre de plus que le diviseur , de maniere que l'on ait 25 pour diviseur , & 249 pour dividende partiel , il est visible qu'en augmentant d'une unité ce dividende , on aura 250 : mais alors on ne pourra plus prendre 250 pour dividende partiel , mais seulement 25 égal au diviseur , de sorte que 249 est le plus grand dividende de 3 chiffres par rapport au diviseur 25 ; or 249 ne contient pas 25 dix fois , puisque 10 fois 25 valent 250 : donc si le premier membre de division contient un chiffre de plus que le diviseur , on ne peut pas mettre plus de 9 au quotient. Mais parce que chaque reste est toujours plus petit que le diviseur , au moins d'une unité , si à côté de ce reste on descend 0 , ce qui le rendra 10 fois plus grand , il s'en faudra encore

au moins de 10 unités que le diviseur n'y soit contenu 10 fois : donc, si à la place de 0 on met 9 (qui est le plus grand chiffre qu'on puisse y mettre) il s'en faudra encore au moins d'une unité que le diviseur ne soit contenu dix fois dans le dividende partiel ; ainsi on ne peut pas mettre plus de 9 au quotient pour quelque membre de division que ce soit.

Soit proposé de diviser 79 par 4. Ayant divisé 7 par 4 , & soustrait le produit 4 (du quotient 1 par le diviseur 4) , il reste 3 plus petit d'une unité que le diviseur 4 ; donc si à côté de 3 on mettoit 0 , on auroit 30 , & l'on voit qu'il s'en faut de 10 unités que 30 ne contienne 4 dix fois ; par conséquent si à la place de 0 on met 9 , il s'en faudra d'une unité que le dividende partiel 39 ne contienne 10 fois le diviseur 4.

Pour faire la preuve de la division , on multipliera le diviseur entier par le quotient entier ; à ce produit l'on ajoutera le reste , s'il y en a , & l'on retrouvera le dividende , si l'opération est exacte.

DÉMONSTRATION de la Division. En opérant , ainsi que nous l'avons dit , on trouve combien de fois le diviseur est contenu dans les centaines , dizaines , &c. du dividende ; on trouve donc le vrai quotient cherché.

Pour réduire les petites espèces aux grandes : *par exemple* , les sols en livres , on se servira de la division , & l'on divisera le nombre des petites espèces , par celui qui désigne combien de fois la grande contient la petite : ainsi , pour savoir combien de toises valent 45 pieds , je divise 45 par 6 ; le quotient 7 & le reste 3 me font voir que 45 pieds valent 7 toises 3 pieds.

S'il y a à la fin du dividende un certain nombre de 0, & que le diviseur soit 1 suivi de zeros, on effacera autant de 0 à la fin du dividende, qu'il y en a au diviseur. Ainsi, pour diviser 22000 par 100, on écrira 220; car, en opérant ainsi, on prendra la centième partie du dividende, c'est-à-dire, qu'on rendra le dividende 100 fois plus petit. Si l'on avoit à diviser 3230 par 1000, parce que le diviseur contient plus de 0 que le dividende, on feroit la division à l'ordinaire.

9. Avant de passer plus loin, nous allons donner l'explication de quelques signes qu'on trouve fréquemment dans les ouvrages de Mathématiques. Le signe $+$ marque l'Addition: ainsi $2 + 3$ marque la somme de 2 & de 3, ce signe est appelé *plus*; de sorte que $3 + 5$, ou 3 plus 5 font 8. Le signe $-$ marque la Soustraction, on l'appelle *moins*: ainsi $5 - 2$, ou 5 moins 2, vaut 3. Le signe $=$ s'appelle signe d'égalité: ainsi $5 - 2 = 3$ veut dire que $5 - 2$ est égal à 3. Le signe \times indique la Multiplication; de sorte que $3 \times 5 = 15$, cela signifie que 3 multiplié par 5 est égal à 15. Le signe $<$ ou $>$ signifie plus petit & plus grand: ainsi $3 < 5$, $7 > 2$ signifient que 3 est plus petit que 5, & 7 plus grand que 2; en un mot la quantité la plus grande se trouve toujours du côté de l'ouverture, & la plus petite du côté de la pointe du signe.

DES FRACTIONS.

10. Une *fraction* n'est autre chose qu'une ou plusieurs parties de l'unité. On se sert de deux nombres pour exprimer une fraction; l'un s'ap-

B 3

pelle le *Dénominateur*, parce qu'il désigne la quantité des parties de l'unité, si ce sont des tiers, *par exemple*, ou des quarts, &c. l'autre est appelé *Numérateur*; il marque le nombre des parties que l'on prend; on écrit le dénominateur au-dessous du numérateur; en séparant l'un de l'autre par une ligne. Si donc je veux exprimer en nombres les deux tiers d'une unité, j'écrirai $\frac{2}{3}$. Il n'est pas difficile de comprendre qu'on peut regarder le numérateur comme un *Dividende*, & le dénominateur comme un *Diviseur*. en effet, supposons que l'unité dont il s'agit, soit un pied, les $\frac{2}{3}$ d'un pied seront la même chose que le tiers de deux pieds, puisque les $\frac{2}{3}$ d'un pied valent 8 pouces, aussi bien que le $\frac{1}{3}$ de deux pieds. De-là il suit que tout reste de division est une fraction: *par exemple*, si l'on divise 23 par 5, on a 4 au quotient, & 3 de reste; or il est visible qu'il faut prendre la cinquième partie de ce reste, de sorte que le quotient entier sera $4 + \frac{3}{5}$.

Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a un plus grand numérateur. En premier lieu il est évident, *par ex.* que $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$; en second lieu, il n'est pas moins évident qu'une fraction sera d'autant plus grande que son numérateur sera plus grand, & son dénominateur plus petit, puisque dans ce cas le numérateur contiendra plus le dénominateur, soit qu'il le contienne entièrement, ou en partie: mais une fraction est d'autant plus petite, que son dénominateur est plus grand; ainsi $\frac{1}{5} < \frac{1}{7}$: en troisième lieu, il est facile de comprendre qu'une fraction restera de même valeur, en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre; car la fraction $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$:

en effet, dans le premier cas on prend deux parties de l'unité, & dans le second on n'en prend qu'une; mais aussi les parties de la seconde fraction sont deux fois plus grandes que celles de la première, ce qui donne la même valeur pour les deux fractions. De même la fraction $\frac{6}{9}$ se réduit, en divisant ses deux termes par 3, à la fraction $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, & la fraction $\frac{2}{3}$ devient $\frac{4}{6}$, en multipliant ses deux termes par 3.

Une fraction est plus petite que l'unité, lorsque son numérateur est plus petit que son dénominateur, elle est plus grande que l'unité, si son numérateur est plus grand que son dénominateur : enfin, elle est égale à l'unité, lorsque le numérateur est égal au dénominateur : ainsi $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{4} < 1$, & $\frac{4}{3} > 1$. Ce qui est évident.

Pour réduire un entier s en fraction, il suffit de regarder l'entier comme le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur seroit 1; de sorte que $s = \frac{s}{1}$; car 1 ne divise ni ne multiplie : mais, si on vouloit une fraction qui eût un dénominateur donné 3, par exemple, on multiplieroit l'entier s par 3, pour avoir 15, numérateur de la fraction cherchée, qui seroit $\frac{15}{3} = 5$.

11. PROBLÈME. Réduire deux fractions au même dénominateur. Soient les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$; multipliant les deux termes de la première par le dénominateur 5 de la seconde, j'ai $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; multipliant de même les deux termes de la seconde par le dénominateur 3 de la première, j'ai $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$. Il est visible que les fractions réduites sont de même valeur qu'avant la réduction, & de plus, qu'elles sont réduites au même dénominateur, puisque le

dénominateur commun est le produit des deux dénominateurs.

COROLLAIRE. Si on vouloit réduire trois, ou un plus grand nombre de fractions au même dénominateur, il suffiroit de multiplier les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres.

12. PROBLEME. *Réduire une fraction à un dénominateur donné : par exemple, réduire la fraction $\frac{2}{3}$ d'une livre, en vingtièmes de la livre, ou en sols, multipliez les deux termes de la fraction proposée par le dénominateur donné 20, pour avoir $\frac{2}{3} = \frac{40}{60}$; divisez ensuite les deux termes de cette dernière fraction par le dénominateur 5 de la fraction donnée, & vous aurez la fraction cherchée $\frac{12}{30} = 12^s$.*

COROLLAIRE. Donc, en supposant la fraction donnée, réduite à sa plus simple expression, ou à ses moindres termes, la réduction, dont nous parlons, n'aura lieu que dans le cas que le dénominateur donné sera divisible par le dénominateur de la proposée : ainsi la fraction $\frac{2}{3}$ ne peut pas se réduire à une fraction, dont le dénominateur seroit 5, parce que 5 n'est pas divisible par 3 ; en effet, en suivant la méthode du problème, on aura d'abord $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; divisant les deux termes de cette dernière fraction par 3, on aura 15 divisé par 3 = 5 ; mais 10 n'étant pas divisible par 3, on ne pourra pas parvenir au résultat cherché.

13. PROBLEME. *Réduire une fraction à sa plus simple expression.* Divisez les deux termes de la fraction par leur plus grand commun diviseur ; la fraction qui en résultera, sera réduite à sa plus simple expression : ainsi la fraction $\frac{10}{15}$ sera réduite

à ses plus petits termes , en divisant ses deux termes par 5 ; ce qui donnera $\frac{2}{5} = \frac{10}{11}$.

14. PROBLEME. *Trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.* Divisez le plus grand par le plus petit ; si la division est sans reste , le plus petit sera le plus grand commun diviseur cherché ; s'il y a un reste , divisez le plus petit nombre par le reste ; si la division est exacte , ce reste sera le plus grand diviseur cherché ; s'il y a un second reste , divisez le premier reste par le second , & ainsi successivement , le dernier reste , qui divisera exactement le reste précédent sera le plus grand diviseur cherché. Si le dernier reste est 1 , c'est une marque que les deux nombres n'ont d'autre diviseur commun que l'unité , dans ce cas on les appelle *premiers entr'eux* : ainsi 2 & 3 sont premiers entr'eux.

EXEMPLE. *Pour avoir le plus grand diviseur de 10 & de 15.* Je divise 15 par 10 , le quotient est 1 avec un reste 5 ; je divise 10 par le reste 5 , le quotient est exact : donc 5 est le plus grand diviseur de 10 & de 15. En effet , puisque 5 divise 10 , il divisera aussi $10 + 5 = 15$: or 5 est le plus grand nombre qui puisse diviser 10 & 15 , ou 10 & 10 + 5 : donc , &c.

15. PROBLEME. *Ajouter ensemble les fractions $\frac{2}{11}$, $\frac{10}{11}$; les ayant réduites au même dénominateur (11) , nous aurons à ajouter ensemble les fractions $\frac{2}{11}$ & $\frac{10}{11}$; or $\frac{2}{11} + \frac{10}{11} = \frac{12}{11} = 1 + \frac{1}{11}$; c'est-à-dire , que , pour avoir la somme d'un nombre quelconque de fractions , on doit les réduire au même dénominateur , si elles en ont de différens , prendre la somme des numérateurs ; & lui donner pour dénominateur le dénominateur commun.*

COROLLAIRE. Pour ajouter un entier à une fraction, on réduira l'entier à une fraction de même dénominateur (10) que la fraction donnée, pour opérer ensuite comme nous venons de le dire. Si on vouloit ajouter un entier plus une fraction à un autre entier plus une autre fraction, on réduiroit le premier entier & sa fraction à une seule fraction de même dénominateur; on feroit la même réduction pour le second entier & sa fraction, l'on auroit ensuite à ajouter deux fractions, ce que nous savons déjà faire : ainsi, pour ajouter $2 + \frac{2}{3}$ à $3 + \frac{1}{3}$, je réduis la première quantité à $\frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, & la seconde à $\frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$; & j'ai ensuite à ajouter $\frac{8}{3}$ avec $\frac{7}{3}$, ce qui, en réduisant au même dénominateur, donne $\frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$.

16. PROBLEME. *Soustraire une fraction d'une autre fraction.* Soit $\frac{2}{3}$ à soustraire de $\frac{4}{3}$, on aura $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$; c'est-à-dire, que, pour soustraire une fraction d'une autre fraction de même dénominateur, on prendra la différence des numérateurs, qu'on divisera par le dénominateur commun. Si les fractions ne sont pas de même dénominateur, on les y réduira, & l'on opérera ensuite comme nous venons de le dire. Pour soustraire une fraction d'un entier, on réduira l'entier en une fraction de même dénominateur que la fraction à soustraire, pour opérer ensuite comme nous venons de le dire : ainsi $5 - \frac{2}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2}{3} = \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}$.

Si on vouloit soustraire un entier joint à une fraction d'un autre entier joint à une autre fraction, on réduiroit d'abord le premier entier & sa fraction en une seule fraction de même dénominateur; on feroit la même chose pour le second entier & sa fraction; l'on auroit ensuite une fraction

à soustraire d'une autre fraction : opération qui n'a maintenant aucune difficulté.

17. PROBLEME. *Multiplier une fraction par une fraction.* Multipliez le numérateur du multiplicande par celui du multiplicateur, vous aurez le numérateur du produit ; multipliez ensuite le dénominateur du multiplicande par celui du multiplicateur, vous aurez le dénominateur du produit : *par exemple*, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$: en effet, si j'avois à multiplier $\frac{2}{3}$ par 4, je prendrois $\frac{2}{3}$ quatre fois, ce qui donneroit $\frac{8}{3}$; or je ne dois pas multiplier $\frac{2}{3}$ par 4, mais par $\frac{4}{5}$, c'est-à-dire, par la cinquième partie de quatre ; j'ai donc multiplié par un nombre 5 fois trop grand, & le produit $\frac{8}{3}$ est 5 fois trop grand ; pour le rendre 5 fois plus petit, je rends le dénominateur 5 fois plus grand, ou, ce qui revient au même, je multiplie le dénominateur par 5, & le vrai produit cherché est $= \frac{8}{15}$.

Il est aisé de voir ; 1°. que, pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, il suffit de multiplier le numérateur de la fraction par l'entier : ainsi $3 \times \frac{2}{5}$, ou $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \times 3$: 2°. que, pour multiplier un entier joint à une fraction, il suffit de réduire le multiplicande à une seule fraction ; on fait la même chose pour le multiplicateur, lorsque celui-ci est un entier joint à une fraction, pour opérer ensuite, comme nous venons de le dire ; 3°. que, pour réduire une fraction de fraction à une fraction, il faut se servir de la multiplication : pour savoir combien valent, *par exemple*, les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{5}$ d'un écu, il faut multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{1}{2}$, le produit $\frac{2}{5}$ donnera les $\frac{2}{5}$ de $\frac{4}{5}$ d'un écu, & ce produit étant multiplié par $\frac{2}{3}$ donnera $\frac{4}{15}$ d'un écu ; 4°. que le produit d'une fraction

par une autre fraction plus petite que l'unité, doit être plus petit que le multiplicande ; puisque, si l'on doit multiplier par $\frac{2}{3}$, *par exemple*, on doit seulement prendre les $\frac{2}{3}$ du multiplicande.

18. PROBLEME. *Diviser la fraction $\frac{2}{3}$ par la fraction $\frac{4}{5}$.* Multipliez le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, pour avoir le numérateur du quotient ; multipliez ensuite le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur, vous aurez le dénominateur du quotient, qui sera $= \frac{10}{12}$: en effet, pour diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, ou, pour prendre le $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$, il faudroit trouver une fraction 4 fois plus petite que $\frac{2}{3}$; mais on rendroit la fraction $\frac{2}{3}$ quatre fois plus petite, en multipliant son dénominateur par 4, ce qui donneroit $\frac{2}{12}$; or ce n'est pas par 4 qu'on doit diviser, mais par $\frac{4}{5}$, c'est-à-dire, par la cinquième partie de 4 ; donc le diviseur, dont on s'est servi, étant 5 fois trop grand, le quotient est 5 fois trop petit ; on doit donc le rendre 5 fois plus grand, ce qu'on fera en multipliant le numérateur 2 par 5, pour avoir $\frac{10}{12}$, vrai quotient cherché.

19. REMARQUE. Pour diviser une fraction $\frac{2}{3}$, *par exemple*, par un entier 3, on supposera $3 = \frac{3}{1}$, & l'on aura une fraction à diviser par une autre fraction. Dans l'exemple proposé le quotient est $\frac{2}{9}$; & l'on trouveroit la même chose, en se contentant de multiplier le dénominateur du dividende par l'entier. Si l'on avoit un entier joint à une fraction à diviser par un entier, ou par un entier joint à une fraction, on réduiroit le dividende & le diviseur chacun à une seule fraction, & l'on opéreroit ensuite comme nous venons de le dire.

DES FRACTIONS DÉCIMALES.

20. *Les Fractions décimales sont des fractions qui ont pour dénominateur l'unité suivie d'un ou de plusieurs zeros. Ainsi $\frac{3}{10}$, $\frac{35}{100}$ sont des fractions décimales. Pour simplifier, on n'exprime pas le dénominateur ; & quand il y a des entiers joints aux fractions, on les en sépare par un point, ou par une virgule. Par exemple, $25 + \frac{3}{10}$ s'écrit ainsi, $25 \cdot 3$, ou $25, 3$; de même $25 + \frac{32}{100} = 25 \cdot 32$, de même $7 + \frac{3002}{10000} = 7 \cdot 3002$. La fraction $\frac{3}{10}$ s'exprime ainsi, $0 \cdot 3$; la fraction $\frac{35}{100}$ s'exprime ainsi, $0 \cdot 35$, en mettant 0 à la place des entiers. Il est facile de voir que le premier chiffre après le point représente des dixièmes, le second des centièmes, &c. car, par exemple, la fraction $0 \cdot 352 = \frac{352}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{2}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}$; puisque, en effaçant le même nombre de 0 au numérateur & au dénominateur d'une fraction, on divise ses deux termes par un même nombre, ce qui laisse la fraction de même valeur (10). Il suit de-là ; 1°. que la fraction $\frac{3}{10} = \frac{300}{1000}$, ou que $0 \cdot 3 = 0 \cdot 300$, ou qu'en général, une fraction décimale reste de même valeur, quelque nombre de 0 qu'on ajoute au numérateur de cette fraction ; 2°. que si les dixièmes, ou les centièmes, &c. manquent, on doit mettre des 0 à la place des chiffres qui manquent : ainsi $\frac{23}{10000} = 0 \cdot 0023$, parce que les dixièmes & les centièmes manquent *.*

* Avec un peu d'attention, il est aisé de s'apercevoir que la valeur des chiffres qui sont à la droite du point, va en diminuant, en proportion décuple, en allant de gauche à droite, & que les fractions décimales sont des fractions, dont le dénominateur (sous-entendu) est l'unité suivie d'autant de zeros,

PROBLEME. Réduire une fraction ordinaire en une fraction décimale. Soit, par exemple, la fraction $\frac{3}{5}$ à réduire en une fraction décimale. Ajoutez un 0 au numérateur *, & divisez ensuite le numérateur par le dénominateur, vous aurez la première décimale du quotient; continuez de même s'il y a un reste, en ajoutant un 0 à ce reste, & ainsi de suite, & vous aurez de nouvelles décimales. Ajoutant donc un 0 à 3, j'ai 30 que je divise par 5, le quotient est 6; donc 0.6 est le vrai quotient cherché. En effet le dividende 3 ayant été multiplié par 10, le quotient de 30 divisé par 5 est 10 fois trop grand: donc on doit le diviser par 10 pour avoir $\frac{6}{10} = 0.6$. Soit la fraction $\frac{2}{3}$ qu'on veut réduire en fraction décimale; j'ajoute 0 à 2, pour avoir 20 que je divise par 3, le quotient 6 est une première décimale. Je multiplie le diviseur par le quotient, ôtant le produit 18 du dividende, il reste 2, auquel ajoutant 0, & divisant de même par 3, j'ai encore 6 pour quotient; & continuant de même, je trouve toujours 6 pour quotient, de sorte qu'il est impossible d'avoir une fraction décimale terminée, qui exprime la valeur de $\frac{2}{3}$.

On connoît qu'il est impossible de trouver une fraction décimale exacte, lorsqu'on voit reparoître les mêmes chiffres du quotient, & dans le même ordre; or les mêmes chiffres reparoissent dans ce cas, pour le plus tard, au rang désigné par le dénominateur de la fraction: par exemple, si on vouloit réduire en fraction décimale la fraction $\frac{4}{7}$,

qu'il y a de chiffres après le point; lesquels chiffres forment le numérateur.

* C'est comme si on multiplioit le numérateur par 10.

on auroit 0.571428 , & ensuite 571 &c. l'infini.

On peut voir maintenant que, quand après une division il y a un reste, pour avoir un quotient plus exact, il faut ajouter au quotient ce reste réduit en décimales : *par exemple*, si j'ai à diviser 32 par 7 , le quotient sera 4 avec un reste $\frac{4}{7}$, ou 4.571 &c.

Quand on n'a pas besoin d'une si grande précision, on peut négliger les millièmes, & quelquefois même les centièmes : ainsi, dans l'exemple précédent, si on n'a pas besoin d'une grande précision, on peut supposer $\frac{4}{7} \approx 4.57$, ou 4.6 , en augmentant d'une unité le dernier chiffre qu'on ne néglige pas, ce que l'on fait toutes les fois que les deux chiffres suivans surpassent 50 * ; en effet 0.071 valent plus de la moitié d'un dixième : ainsi, en augmentant le chiffre 5 d'une unité, l'erreur est moins considérable que si on ne faisoit pas cette augmentation. Au reste, en négligeant un nombre de chiffres quelconque, l'erreur n'est jamais égale à l'unité du dernier chiffre qu'on ne néglige pas ; *par exemple*, si j'ai la fraction décimale 5.3999 &c. à l'infini, en négligeant tous les chiffres qui suivent 3 , j'aurai 5.3 ; or $0.3 = \frac{3}{10}$, & $0.0999 = \frac{999}{10000} < \frac{1}{10}$, puisqu'en ajoutant 1 à 999 , j'aurai $\frac{1000}{10000} = \frac{1}{10}$; le même raisonnement a lieu, quelque nombre de chiffres qu'on néglige.

PROBLEME. *Ajouter & soustraire les fractions décimales.* Soient les fractions décimales 35.702 , 303.7 , 2.25 , dont on demande la somme, écrivez ces fractions, en sorte que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines, &c. les dixièmes sous les dixièmes, &c. opérez ensuite, en allant de

* La même chose a lieu, si on négligeoit un seul chiffre > 5 .

droite à gauche, comme pour les nombres entiers. Ce qui est évident, puisque la valeur des chiffres dans les fractions décimales va en augmentant de droite à gauche en proportion décuple.

$$35 \cdot 702$$

$$303 \cdot 7$$

$$2 \cdot 25$$

Pour soustraire la fraction décimale $25 \cdot 032$ de $32 \cdot 04$, je les dispose de la même manière, ayant soin de mettre la première sous la seconde, comme on le voit ici; mais,

$$32 \cdot 040$$

$$25 \cdot 032$$

parce qu'il n'y a aucun chiffre qui soit correspondant à 2, je suppose 0 à côté de 4, ce qui, comme nous l'avons dit il n'y a pas long-tems, ne change rien à la valeur de la fraction, faisant ensuite la soustraction à l'ordinaire, j'ai pour reste $7 \cdot 008$.

PROBLEME. *Multiplier une fraction décimale par une autre.* Multipliez les deux fractions comme si c'étoient des nombres entiers, en vous souvenant de séparer dans le produit autant de décimales qu'il y en a, tant au multiplicande qu'au multiplicateur: ainsi, pour multiplier $7 \cdot 12$ par $2 \cdot 3$, je multiplie 712 par 23; le produit est 16376, dans lequel je sépare 3 décimales, parce qu'il y en a deux au multiplicande, & une au multiplicateur; de sorte que le produit cherché est $16 \cdot 376$. La raison de ce procédé est facile à appercevoir; car $7 \cdot 12 = \frac{712}{100}$, & $2 \cdot 3 = \frac{23}{10}$; or $\frac{712}{100} \times \frac{23}{10} = \frac{16376}{1000} = 16 \cdot 376$. Si le produit ne renfermoit pas un nombre suffisant de chiffres, il faudroit ajouter vers la gauche autant de 0 qu'il seroit nécessaire, pour qu'on eût autant de décimales au produit, qu'il y en a tant au multiplicande qu'au multiplicateur: *par exemple*, pour multiplier $0 \cdot 25$ par $0 \cdot 03$, après avoir trouvé le produit 75 de 25 par 3, je m'appерçois que ce produit

duit ne contient que deux chiffres, tandis que je dois avoir 4 décimales : ainsi j'ajoute deux 0 en cette sorte, $0 \cdot 0075$, & j'ai le vrai produit cherché : en effet $0 \cdot 25 \times 0 \cdot 03 = \frac{25}{100} \times \frac{3}{100} = \frac{75}{10000} = 0 \cdot 0075$.

PROBLEME. *Diviser une fraction décimale : par exemple, $4 \cdot 444$ par une autre fraction décimale $2 \cdot 2$.* Divisez le dividende par le diviseur, comme si c'étoient des nombres entiers ; mais séparez dans le quotient autant de décimales qu'il y en a plus au dividende qu'au diviseur : ainsi, en divisant 4444 par 22 , je trouve pour quotient 202 ; je sépare 2 décimales, parce qu'il y en a deux de plus au dividende qu'au diviseur ; de sorte que le quotient cherché est $2 \cdot 02$. Pour comprendre la raison de cette méthode, $\frac{4444}{22} \Big| \frac{22}{2 \cdot 02}$ on fera attention que $4 \cdot 444 = \frac{4444}{1000}$, & que $2 \cdot 2 = \frac{22}{10}$; la première fraction divisée par la seconde, donne $\frac{4444 \times 10}{22 \times 1000} (18) = \frac{4444}{2200}$: or $\frac{4444}{22} = 202$; mais, parce que le véritable diviseur 2200 est cent fois plus grand que 22 , le quotient 202 est cent fois trop grand, il faut donc le diviser par 100 pour avoir le vrai quotient $\frac{202}{100} = 2 \cdot 02$.

Remarquez 1°. S'il y a autant de décimales au dividende qu'au diviseur, le quotient sera sans décimales ; 2°. S'il y a moins de décimales au dividende qu'au diviseur, on doit ajouter au dividende quelques 0, pour avoir au moins autant de caractères au dividende qu'au diviseur ; & même, si l'on veut avoir quelques décimales au quotient, il est nécessaire d'ajouter à la fin du dividende assez de 0, pour qu'il y ait plus de caractères au dividende qu'au diviseur ; 3°. Si, en divisant une fraction décimale par une autre, ou

par un entier on trouve un reste, on pourra continuer d'opérer sur ce reste comme sur un reste de division ordinaire, en ajoutant 0 à chaque nouveau reste.

DE L'ÉVALUATION DES FRACTIONS.

21. Si l'on vouloit évaluer la fraction décimale de toise $0 \cdot 72$, on multiplieroit cette fraction par 6, pour avoir des pieds, parce que la toise vaut 6 pieds, ce qui donneroit $4 \cdot 32$; c'est-à-dire, 4 pieds, plus la fraction $0 \cdot 32$ de pied. Multipliant celle-ci par 12 pour avoir des pouces, je trouve $3 \cdot 84$, c'est-à-dire, trois pouces plus $0 \cdot 84$ de pouce; ainsi la fraction proposée vaut 4 pieds 3 pouces plus $0 \cdot 84$ de pouce. Pour évaluer la fraction $0 \cdot 02$ de toise, je la multiplie par 6, & j'ai $0 \cdot 12$ de pied; multipliant celle-ci par 12, j'ai $1 \cdot 44$ de pouce, c'est-à-dire, 1 pouce & $0 \cdot 44$ de pouce; en multipliant cette dernière par 12, j'aurois des lignes. Mais pour évaluer la fraction $\frac{3}{4}$ d'un sol, comme le sol vaut 12 deniers, on multiplieroit le numérateur 3 par 12, pour avoir $\frac{36}{4}$ de denier, ou $7^d + \frac{2}{4}$ de denier. La fraction $\frac{5}{11}$ de livre deviendra, en multipliant 5 par 20, $\frac{100}{11}$ de sol = $7^s + \frac{2}{11}$. Multipliant celle-ci par 12, l'on auroit $\frac{108}{11}$ de denier = $8^d + \frac{4}{11}$ de denier, de sorte que la fraction $\frac{5}{11}$ de livre vaut $7^s 8^d + \frac{4}{11}$ de denier.

DE LA MULTIPLICATION ET DIVISION des Nombres Complexes.

22. PROBLEME. On demande combien coûteront 3 toises 2 pieds d'une muraille, à 2 liv. 3 s. la toise. Je réduis les toises en pieds, en multipliant 3 par

6 , à cause que la toise vaut 6 pieds ; au produit 18 j'ajoute 2 pour avoir le nombre total 20 pieds ; je réduis les livres en sols, en multipliant 2 par 20 ; au produit 40 j'ajoute 3 , & j'ai 43. En multipliant 43 sols par 20 , le produit 860 sols marque combien coûteroient 20 pieds , si chaque pied coûtoit 43 sols ; mais ce n'est pas le pied qui coûte 43 sols , c'est la toise qui vaut 6 pieds : ainsi le pied ne coûte que la sixième partie de 43 sols , & 20 pieds, ou 3 toises 2 pieds ne coûteront aussi que la sixième partie de 860 sols : on doit donc diviser 860 par 6 , le quotient fera 143 sols avec un reste 2 sols ; ce reste vaut 24 deniers , dont la sixième partie est 4 deniers ; en les ajoutant au quotient , nous aurons 143 sols 4 deniers , ou en réduisant en livres , ce qui se fait en divisant 143 par 20 , 7 liv. 3 s. 4 d.

Remarquez 1°. qu'en multipliant 43 sols par 20 , on a considéré le multiplicateur comme un nombre pur & abstrait , c'est-à-dire , comme un nombre qui ne contient que des unités simples , & non comme un nombre concret , c'est-à-dire , qui renferme des unités d'une espece déterminée , comme , *par exemple* , des pieds. Car il seroit ridicule de multiplier des sols par des pieds.

2°. Que si on avoit demandé le prix de 20 toises , à 2 liv. 3 sols la toise , on auroit trouvé pour résultat 860 sols , ou 43 liv. , & l'on auroit pas eu besoin de faire la division par 6.

3°. Qu'il faut dans ces sortes de questions réduire le multiplicande & le multiplicateur chacun à sa plus petite espece , faire ensuite la multiplication à l'ordinaire , & diviser le produit par le nombre qui exprime combien de fois la grande espece du multiplicateur contient la petite : ainsi si

le multiplicateur avoit contenu des pouces , on auroit réduit le multiplicateur en pouces : de même si le multiplicande avoit contenu des deniers , on l'auroit réduit en deniers ; après l'opération on auroit divisé le produit par 72 , parce que la toise vaut 72 pouces , on auroit ensuite réduit les deniers en sols , & les sols en livres. Quant au multiplicande , c'est la nature seule de la question qui peut le faire connoître. Dans l'exemple proposé il est aisé de voir que le multiplicande est l'argent qu'on cherche au produit.

Seconde Méthode. On réduira chaque nombre à sa plus basse espece ; on multipliera ensuite les fractions qui en résulteront l'une par l'autre , & l'on réduira le produit aux unités , & aux especes établies par l'usage.

EXEMPLE & DÉMONSTRATION. *L'on demande combien coûteront 25 toises 5 pieds 10 pouces , à 3 liv. 10 s. 6 d. la toise.* Je réduis le multiplicande , ou l'argent en deniers , ce qui me donne 846 deniers ; mais un denier est la $\frac{1}{240}$ partie de la livre qui vaut 20 sols , & par conséquent 240 deniers : ainsi le multiplicande vaut $\frac{846}{240}$ d'une livre. Je réduis le multiplicateur en pouces , & je trouve 1870 pouces ; or le pouce est la $\frac{1}{72}$ partie de la toise ; donc le multiplicateur vaut $\frac{1870}{72}$ d'une toise. Multipliant maintenant les numérateurs du multiplicande & du multiplicateur l'un par l'autre , aussi bien que les dénominateurs , le produit cherché est $\frac{1581010}{17280}$, fraction de livre.

Pour réduire donc cette fraction aux especes usitées , ou pour évaluer cette fraction , je divise le numérateur par le dénominateur , & je trouve 91 avec le reste 9540 , ou $\frac{9540}{17280}$. Les 91 sont des

unités ou des livres. Pour évaluer le reste qu'on vient de trouver, je multiplie le numérateur 9540 par 20, ce qui réduit ce reste en sols; & divisant le produit 190800 par 17280, je trouve 11 sols avec le reste 720, ou $\frac{720}{17280}$ d'un sol, qu'on réduira en deniers, en multipliant 720 par 12, & divisant le produit 8640 par 17280, ce qui donnera $\frac{8640}{17280}$ qui ne vaut pas un denier (il vaut la moitié d'un denier): ainsi on pourra le négliger, & le produit cherché sera 91 liv. 11 sols.

23. PROBLEME qui contient la division des nombres complexes. *Deux toises 5 pieds ayant coûté 18 liv. 14 f. quel est le prix de la toise?* Je réduis 18 liv. 14 f. en sols, pour avoir 374 sols; je réduis de même 2 toises 5 pieds en pieds, pour avoir 17 pieds, & divisant 374 par 17, j'ai 22 pour quotient, c'est-à-dire, que chaque pied vaut 22 sols, ou 1 liv. 2 f. mais la toise vaut 6 pieds; donc la toise vaut 6 fois 1 liv. 2 f. ou 6 liv. 12 f.

Il est aisé de remarquer 1^o. qu'en divisant par 17, ou en prenant la 17^e. partie du dividende, l'on a considéré le diviseur comme un nombre pur, parce qu'il seroit ridicule de diviser des sols par des pieds; en second lieu, qu'après la division on doit multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien de fois la grande espece du diviseur contient la petite.

AUTRE EXEMPLE. *Deux toises 5 pieds ayant coûté 18 liv. 15 f. quel sera le prix de la toise?* Dix-huit livres quinze sols valent 375, qu'il faudra diviser par 17 pieds = 2 toises 5 pieds, le quotient sera 22 avec 1 de reste, qui donnera la fraction $\frac{1}{17}$, de sorte que le quotient entier sera 22 f. + $\frac{1}{17}$ de sols, qui, étant multiplié par 6, donnera 132 f. plus

$\frac{6}{17}$ de sol $=$ 6 liv. 12 s. 4 d. $+$ $\frac{4}{17}$ deniers, en évaluant en deniers la fraction $\frac{6}{17}$ de sol.

On pourra trouver le même résultat par la méthode suivante ; pour cela on n'a qu'à multiplier le dividende par le nombre qui désigne combien de fois la grande espèce du diviseur contient la petite , & diviser le produit par le diviseur. Ayant donc multiplié 375 par 6 , je divise le produit 2250 par 17 , & j'ai pour quotient 132 sols $+$ $\frac{6}{17}$ $=$ 6 liv. 12 s. 4. d. en négligeant la fraction $\frac{4}{17}$ qui ne vaut pas le quart d'un denier.

Troisième méthode. Cette méthode consiste à réduire le dividende & le diviseur en fraction , pour faire ensuite la division à l'ordinaire : l'exemple suivant suffira pour la faire comprendre.

PROBLEME. *Vingt-cinq toises 5 pieds 10 pouces ayant coûté 91 liv. 11 s. quel sera le prix de la toise ?* Il est visible qu'il faut diviser 91 liv. 11 s. par 25 toises 5 pieds 10 pouces , & que le quotient donnera le résultat cherché. Réduisant le dividende en une fraction de livre , & le diviseur en une fraction de toise , & faisant attention qu'un sol est un $\frac{1}{20}$ de livre , qu'une livre est $=$ $\frac{20}{1}$ de livre , & qu'un pouce vaut $\frac{1}{72}$ de toise, on aura à diviser $\frac{1870}{72}$ par $\frac{1870}{17400}$, le quotient donnera $\frac{131832}{17400}$, fraction de livre , qui , étant évaluée , donne 3 liv. 10 s. 5 d. $+$ $\frac{16680}{17400}$ d'un denier.

À l'égard du dividende & du diviseur , c'est la nature de la question qui doit le faire connoître dans les exemples ci-dessus ; il étoit évident que l'argent devoit être le dividende , & que l'on cherchoit de l'argent au quotient.

D E L' A L G E B R E.

24. L'*Algebre* n'est autre chose que la science de la grandeur exprimée par des caracteres , dont la signification est indéterminée : telles sont les lettres de l'alphabet , qui n'ayant aucune signification par elles-mêmes , peuvent représenter toutes sortes de quantités, nombres, mouvemens, &c. Les quantités précédées du signe $+$ sont appelés *positives* ; celles qui sont précédées du signe $-$ sont dites *negatives* ; elles ne sont pas moins réelles que les *positives* , mais elles sont prises dans un sens opposé : *par exemple* , le bien que l'on possède étant positif , les dettes que l'on a seront des quantités négatives. De sorte que si l'on possède 10000 liv. & qu'on doive 2000 liv. c'est comme si l'on avoit $+ 10000$ liv. $- 2000$ liv. $= + 8000$ liv.

Sur quoi l'on peut remarquer que les quantités négatives détruisent les positives ; ici, *par exemple* , la dette $- 2000$ liv. a détruit $+ 2000$ liv. or , si on ajoutoit 0 à $+ 10000$ liv. on auroit 0 $+ 10000$ liv. $= 10000$ liv. donc une quantité négative , quant à son effet seulement , & non absolument en elle-même , est plus petite que 0 , puisque 0 ajouté à une quantité positive , ne la diminue pas comme fait la quantité négative.

Les quantités qui n'ont aucun signe , sont censées précédées du signe $+$, & sont par conséquent *positives* : ainsi $+ b = b$, $a = + a$: mais le signe $-$ n'est jamais sous-entendu. Pour marquer qu'une quantité a est multipliée par une quantité b , on écrit l'une à côté de l'autre , ou bien on met un point entre deux , ou , encore , on indique le produit par le signe \times ; de sorte que le produit de a

par $b = a \times b = a \cdot b = ab$; donc si $a = 3$ & $b = 5$, on aura $ab = 3 \times 5 = 15$: si $a = 7$ & $b = 10$, on aura $ab = 70$. Pour multiplier a par a , on écrit aa , ou a^2 ; pour multiplier a par aa , ou par a^2 , on écrit a^3 . Le chiffre 2 marque dans le premier cas que a doit être écrit 2 fois , le chiffre 3 , dans le second cas , exprime le nombre de fois qu'on doit écrire a ; de sorte que si $a = 3$, on aura $aaa = a^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$; car $3 \times 3 = 9$, & $9 \times 3 = 27$; de même , $a^7 = aaaaaaa$. Lorsqu'on veut prendre une lettre a un certain nombre de fois , *par exemple* , 5 fois , on écrit 5 devant a , en cette manière , $5a$; pour prendre a deux fois , j'écris $2a$. Les chiffres qui sont à la gauche des lettres , sont appelés *coefficients* ; *par exemple* , dans l'expression $5a$, 5 est le coefficient de a . Les chiffres qui sont à la droite , sont appelés *exposants*. Si une lettre n'a point de coefficient , l'unité est censée son coefficient ; de sorte que $a = 1a$. Comme aussi quand une lettre n'a pas d'exposant exprimé , l'unité est censée son exposant ; ainsi $a = a^1 = 1a^1$. Il y a une grande différence entre l'*exposant* & le *coefficient* , *par exemple* , $2a$ est une quantité bien différente de a^2 ; car supposons $a = 5$, on aura $2a = 2$ fois 5 = 10 ; mais $a^2 = aa = a \times a = 5 \times 5 = 25$: de sorte que $2a$ marque la somme de a & de a , & a^2 indique le produit de a par a (l'exposant doit être un peu au-dessus de la lettre qu'il affecte).

Les quantités qui ne sont pas jointes à d'autres quantités par le signe $+$ ou $-$ sont appelées *monomes* : telles sont les quantités $+5a$, $+ab$, $7ad$; mais , si deux quantités sont jointes ensemble par les signes $+$ ou $-$, on a ce qu'on appelle un *bi-*

nome : $a + d$, $2a - 3ed$ sont des binomes. Si trois quantités sont jointes ensemble par le signe $+$ ou $-$, l'on a un *trinome* ; un *quadrinome*, s'il y en a 4, &c. En général on appelle *polinome* l'assemblage de plusieurs quantités jointes ensemble par les signes $+$ ou $-$; chacune de ces quantités qui composent le polinome, est appelée *terme* : ainsi dans le trinome $a + 3d - 2cd$, a , $3d$, $2cd$ sont des termes.

Les quantités algébriques sont dites *semblables*, lorsque ces quantités contiennent les mêmes lettres, ni plus ni moins écrites le même nombre de fois : ainsi $3a$ & $2a$ sont des quantités semblables aussi bien que $3ad$ & $-5ad$; mais $3a$ & $2a^2$ ne sont pas semblables, parce que $2a^2 = 2aa$, ou parce que a est écrit 2 fois dans l'une, & 1 fois seulement dans l'autre.

25. PROBLEME. *Etant donné un polinome qui contienne des termes semblables, faire la réduction.* Si les quantités semblables ont le même signe, ajoutez leurs coefficients ; si elles ont des signes différens, ôtez le plus petit coefficient du plus grand, écrivez ensuite la somme ou la différence de ces quantités, & la réduction sera faite. *Par exemple*, dans le trinome $2a + 2d + 5a$, les termes $2a$ & $5a$ étant semblables, j'ajoute 2 avec 5, & j'ai la somme $7a$; de sorte que le trinome proposé se réduit à la quantité $7a + 2d$. Si j'avois $a + d + 2a$, j'ajouterois 2 avec 1 (coefficient sous-entendu de a), pour avoir $3a + d$. Si j'avois le trinome $2a + d - 7a$, je retrancherois 2 de 7, pour avoir $d - 5a$. Il est visible que quand les quantités semblables ont différens signes, & des coefficients égaux, elles se détruisent : ainsi $2a + d - 2a = d$; s'il y avoit plusieurs quantités semblables, les unes po-

sitives, les autres *negatives*, on prendroit la somme des coefficients des positives, on feroit la même chose pour les negatives, l'on retrancheroit la plus petite somme de la plus grande, pour écrire le reste avec le signe de la plus grande somme. Ainsi, pour faire la réduction des termes semblables du quintinome $3a + d - 2a - 3d + 7a$, je prends la somme 10 des coefficients des a positifs, de laquelle je rettanche 2, coefficient de la quantité negative $- 2a$, j'ôte ensuite le coefficient 1 de d du coefficient 3 de $- 3d$, & j'ai, toute réduction faite, la quantité $8a - 2d$.

26. PROBLEME. *Ajouter & soustraire les quantités algébriques.* Pour ajouter la quantité b à la quantité c , on écrira $b + c$; pour ajouter ensemble b & $- d$, on écrit $b - d$, c'est-à-dire, que l'on ajoute les quantités algébriques, en les écrivant les unes à côté des autres avec leurs signes. On voit facilement que $b + c$ est la somme de b & de c : on ne voit pas avec la même facilité que $b - d$ soit la somme de b & de $- d$, mais il ne faut pas confondre augmenter avec ajouter; quand un homme ajoute une dette de 1000 liv. à son bien que je suppose de 10000 liv. il diminue réellement son bien de 1000 liv. ainsi l'on ne doit pas être surpris si $b - d < b$.

Pour soustraire une quantité algébrique d'une autre, il faut seulement changer le signe de la quantité qu'on soustrait: *par exemple*, si de $+ 5a$, je veux soustraire $+ 2a$, j'écrirai $5a - 2a = 3a$; de même pour soustraire 5 de 12, j'écris $12 - 5 = 7$. Mais pour soustraire $7 - 2$ de 12, j'écris $12 - 7 + 2 = 7$: car, si j'écrivois seulement $12 - 7$, j'ôteroie 2 de trop, puisque je ne veux pas sou-

traire 7, mais seulement $7 - 2$, ou 5; donc, après avoir écrit $12 - 7$, je dois ajouter $+ 2$ pour avoir la différence cherchée $= 7$, comme cela doit être. La raison pour laquelle on change le signe $-$ en $+$, est facile à saisir, c'est qu'on ne peut soustraire une quantité négative, qu'en ajoutant une quantité positive, comme on ne peut soustraire une quantité positive qu'en introduisant une quantité négative: ainsi, pour soustraire la quantité $-d$ de la quantité $a - d$, il faut écrire $a - d + d = a$, autrement on ne soustrairait pas $-d$.

27. PROBLEME. *Multiplier les quantités algébriques les unes par les autres.* Pour multiplier a par b , on écrit, ainsi que nous l'avons déjà dit, a à côté de b pour avoir le produit ab . Si on avoit $2a$ à multiplier par d , on écrirait $2ad$: en effet le produit de a par d , étant ad , il est évident que, si le multiplicande devient double de ce qu'il étoit, le produit sera aussi double: donc $2a \times d = 2ad$, mais, si le multiplicateur devenoit triple de ce qu'il étoit, le produit devroit être triple: donc $2a \times 3d = 6ad$: donc il faut dans la multiplication algébrique multiplier les coefficients l'un par l'autre, en se souvenant qu'un terme qui n'a point de coefficient exprimé a l'unité pour coefficient: c'est d'ailleurs ce qui est évident; car les coefficients sont des nombres, & par conséquent on doit dans leur multiplication suivre les règles de la multiplication des nombres. Si on avoit à multiplier b^1 par $b^2 = bb$, on écrirait b^3 , en ajoutant l'exposant 1 du multiplicande, avec l'exposant 2 du multiplicateur: ainsi $d \times d^3 = d^4$, en se souvenant que l'exposant de d est 1: en effet $d^3 = ddd$; or $d \times ddd = dddd = d^4$. Donc, pour multiplier une lettre par la même

lettre , il suffit d'ajouter à l'exposant du multiplicande celui du multiplicateur , & de donner à cette lettre un exposant égal à la somme des deux exposans : ainsi $a^7 \times a^5 = a^{12}$.

Pour trouver les regles des signes, soit proposé de multiplier $5 - 2$ par $4 - 2$, je multiplie d'abord 5 par 4 (en algèbre on commence la multiplication par la gauche), le produit est 20 , que j'écris comme $20 - 8 - 10 + 4 = 6$ on le voit ; mais, parce que je ne dois pas multiplier 5 par 4 , mais seulement 5 diminué de 2 , ou $5 - 2$, j'ai pris 2 quatre fois de trop , de sorte que le produit 20 est trop grand de 8 ; donc je dois le diminuer de cette quantité , en écrivant $- 8$ à côté : de sorte que $20 - 8 = 12$ est le produit de $5 - 2$ ou de 3 par 4 . Je remarque maintenant que je ne devois pas multiplier $5 - 2$ par 4 , mais seulement par 4 diminué de 2 ou par 2 ; j'ai donc pris $5 - 2$ deux fois de trop. Pour détruire cette erreur , je multiplie $5 - 2$ par 2 le produit est $10 - 4$, que je retranche de $20 - 8$, pour avoir $20 - 8 - 10 + 4 = 6$, vrai produit.

COROLLAIRE. De-là il suit que $+$ \times $+$, ou $-$ \times $- = +$, & que $+$ \times $-$, ou $-$ \times $+$ $= -$, car 20 résulte de la multiplication de $+$ $5 \times + 4$, $- 8$ résulte de $- 2 \times + 4$, $- 10$ résulte de $+$ $5 \times - 2$, & $+ 4$ résulte de $- 2 \times - 2$. Donc , lorsque le signe du multiplicande est le même que celui du multiplicateur , le produit doit avoir le signe $+$; mais il aura le signe $-$, si le signe du multiplicande est différent de celui du multiplicateur : d'ailleurs , lorsque le multiplicateur a le signe $+$, on prend le multiplicande autant de fois qu'il

y a d'unités dans le multiplicateur : ainsi le produit est égal au multiplicande pris un certain nombre de fois ; donc $-2a \times +3d = -6ad$: mais pour multiplier par $-$, il faut faire le contraire, c'est-à-dire, qu'il faut retrancher le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur ; par conséquent si le multiplicande est positif, le produit sera composé d'une quantité positive retranchée un certain nombre de fois ; & le produit sera négatif : mais si le multiplicande a le signe $-$, le produit sera composé d'une quantité négative, soustraite un certain nombre de fois : ainsi le produit sera positif. D'autre côté $3 - 3$ étant multiplié par 2 , donnera évidemment $6 - 6 = 0$; or $-3 \times 2 = -2 \times 3$, visiblement : donc $3 - 3 = 0$ étant multiplié par -2 donnera $-6 + 6 = 0$: donc, &c.

EXEMPLE. Soit proposé de multiplier $3a^2x + 2p$ par $a - 2x$. Ayant écrit le multiplicateur au-dessous du multiplicande, je multiplie le premier terme $3a^2x$ du multiplicande par le premier terme a du multiplicateur, & j'écris le produit $3a^3x$; je multiplie de même

le second terme du multiplicande par le premier du mul-

$$\begin{array}{r} 3a^2x + 2p \\ a - 2x \\ \hline 3a^3x + 2ap - 6a^2x^2 - 4px \end{array}$$
multiplicateur, ce qui me donne $+2ap$, en multipliant d'abord 2 par le coefficient 1 de a , & ensuite p par a ; je multiplie de nouveau le multiplicande entier par $-2x$, second terme du multiplicateur, & j'écris de suite les produits $-6a^2x^2$, $-4px$ & j'ai le produit total demandé.

REMARQUES. 1°. Pour multiplier une quantité algébrique par une autre, il faut multiplier tout le

multiplicande par chaque terme du multiplicateur ,
& ajouter tous les produits pour avoir le produit
total. 2°. Il est indifférent de multiplier a par p ,
ou p par a ; car le produit $ap = pa$, par la même
raison que $5 \times 4 = 4 \times 5 = 20$. De même apd
 $= pad$; car $ap = pa$, donc $ap \times d = pa \times d$.
Soit $a = 2$, $p = 3$, $d = 4$, on aura $apd =$
 $2 \cdot 3 \cdot 4$ (le point indique la multiplication) $=$
 $3 \cdot 2 \cdot 4$; car $2 \cdot 3 = 6$, & $6 \times 4 = 24 = 2 \cdot 4 \cdot 3$
 $= 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 4 \cdot 2$. de même apd
 $= adp = pad = pda = dap = dpa$, de sorte qu'il
est indifférent quelle lettre on mette la première
dans le produit , néanmoins , pour plus de clarté ,
il est à propos de suivre l'ordre alphabétique ;
ainsi en multipliant $2p$ par a , on écrira $2ap$, &
non pas $2pa$. 3°. Quelquefois on se contente d'in-
diquer la multiplication, sans la faire : ainsi $(a + b)$
 $\times (a + d)$ ou $(a + b) (a + d)$ indique qu'il faut
multiplier $a + b$ par $a + d$; mais, si on écrivoit
 $a + b \times (a + d)$ ou $a + b (a + d)$, cela signi-
fieroit qu'il faut ajouter à la quantité a le produit
de b par $a + d$. ●

D E L A D I V I S I O N.

28. *Diviser une quantité par une autre , c'est
chercher combien de fois la première qu'on appelle le
Dividende contient la seconde , ou le diviseur. La
quantité qui résulte de cette opération est appelée
quotient. En faisant attention à la nature de la di-
vision , on verra aisément qu'en algèbre , comme
en arithmétique , le produit du diviseur par le quo-
tient , doit être égal au dividende : donc , si j'ai à
diviser ab par a , ce qu'on peut indiquer : ainsi*

$\frac{ab}{a}$, en mettant le diviseur sous le dividende, en forme de fraction, je dis que le quotient sera b : en effet, s'il étoit différent, en multipliant le diviseur a par le quotient, le produit ne pourroit pas être égal au dividende ab . De-là il résulte que pour diviser un *monome* par un autre *monome*, on doit écrire au quotient les lettres qui ne sont pas communes au dividende & au diviseur : ainsi $\frac{ap}{a}$, ou $\frac{pa}{a} = p$, de même $\frac{apd}{a} = pd$, $\frac{apd}{d} = ap$, $\frac{apd}{ad} = p$; en effet en multipliant le diviseur ad par le quotient p , on retrouve le dividende apd . De même $\frac{a^2}{a} = \frac{aa}{a} = a$, $\frac{a^3}{a^2}$

$\frac{aaa}{aa} = a$, $\frac{a^5}{a^2} = a^3 = a^{5-2}$, c'est-à-dire, que, pour diviser une lettre par la même lettre, il faut soustraire l'exposant du diviseur de celui du dividende ; donc $\frac{a^6}{a^2} = a^4$, $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0 = 1$; car, en multipliant le diviseur a^5 par a^0 , on aura par les règles de la multiplication (27.) $a^5 + 0 = a^5$; de même en multipliant a^5 par 1, on a $1 \times a^5 = a^5$, de sorte que $a^0 = 1$; d'où l'on conclut que toute quantité élevée à l'exposant 0, est = 1 : de plus, parce que toute quantité se contient elle-même une fois, il est évident que $\frac{a^5}{a^5} = 1$; $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; car la fraction $\frac{a^3}{a^5}$ devient (en divisant ses deux termes par a^3 , ce qui ne change pas la valeur) $\frac{1}{a^2}$; mais par les règles de la

division il faut soustraire l'exposant 5 du diviseur de l'exposant 3 du dividende ; donc $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; d'où l'on peut conclure qu'une quantité élevée à un exposant négatif, est égale à l'unité divisée par cette même quantité élevée au même exposant rendu positif : ainsi $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (m est ici l'exposant de a) *. A l'égard des coefficients, comme ce sont des nombres, on les divisera à l'ordinaire : ainsi $\frac{6ap}{2a} = \frac{3ap}{a} = 3p$. En effet, en divisant par 2 le coefficient 6 de ap , on a 3 au quotient ; & en divisant ap par a , on a le quotient p : d'ailleurs $2a \times 3p = 6ap$ qui est le dividende. La règle des signes est celle-ci : le quotient doit avoir +, lorsque les signes du dividende & du diviseur sont les mêmes ; mais le quotient aura le signe —, si les signes du dividende & du diviseur sont différens : ainsi $\frac{+ab}{+a} =$

* On peut toujours faire passer une quantité du numérateur au dénominateur & réciproquement en changeant le signe de son exposant : ainsi $\frac{1}{a^2} = 1a^{-2} = a^{-2}$, de même

$\frac{b}{a^{-2}} = ba^2$: en effet, en divisant $b = \frac{b}{1}$ par $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, on trouve (par la règle de la division des fractions, selon laquelle on a le quotient, en multipliant le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, & le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur ; règle qui a lieu également pour les nombres & pour les quantités algébriques) $\frac{b \cdot a^2}{1 \cdot 1} = \frac{ba^2}{1} = ba^2$. En général, $\frac{b}{a^m} = \frac{ba^{-m}}{1} = ba^{-m}$, & $\frac{b}{a^{-m}} = \frac{ba^m}{1} = ba^m$.

+ b,

$$+b, \frac{+ab}{-a} = -b, \frac{-ab}{+a} = -b \text{ \& } \frac{-ab}{-a} = +b,$$

sans quoi le produit du diviseur par le quotient ne seroit pas égal au dividende.

PROBLEME. *Diviser une quantité complexe, c'est-à-dire, une quantité composée de plusieurs termes par une quantité incomplexe, ou monome.* Divisez chaque terme du dividende par le diviseur; écrivez les quotiens les uns à côté des autres avec leurs signes, & vous aurez le quotient entier cherché; ainsi pour diviser $5a^2 - 10ad$ par $5a$; je divise d'abord $5a^2$ par $5a$, le quotient est a , je l'écris sous le diviseur; je divise ensuite $-10ad$ par $5a$, le quotient est $-2d$ que j'écris à côté de a , & j'ai le quotient entier $= a - 2d$: en effet, si on multiplie ce quotient par le diviseur, on aura le dividende.

PROBLEME. *Diviser un polynome par un polynome.* Ordonnez le dividende & le diviseur par rapport à une même lettre, c'est-à-dire, disposez le dividende & le diviseur, de telle manière que la lettre par rapport à laquelle vous voulez ordonner, se trouve au premier terme avec son plus grand exposant, que le plus haut exposant qui reste se trouve au second terme, & ainsi de suite. Ayant ensuite écrit le diviseur à côté du dividende, comme dans la division des nombres, divisez le premier terme du dividende par le premier du diviseur, écrivez le résultat au quotient, multipliez ensuite le quotient que vous venez d'écrire par le diviseur entier; écrivez le produit sous le dividende, retranchez ce produit du dividende (ce qui se fait en changeant les signes); divisez de même le reste du dividende

s'il y en a (en divisant toujours par le premier terme du diviseur le terme du dividende qui contient le plus haut exposant de la lettre par rapport à laquelle vous avez ordonné), & ainsi de suite. Soit, *par exemple*, proposé de diviser $a^2 - d^2$ par $d + a$, j'ordonne le diviseur par rapport à la lettre a , car le dividende est tout ordonné ; divisant ensuite a^2 par a , j'écris le quotient a que je multiplie par le diviseur entier $a + d$, j'écris sous le dividende le produit $a^2 + ad$, je soustrais ce produit en changeant les signes, j'écris 0 sous a^2 , qui se trouve détruit par $-a^2$, il me reste $-ad$ que j'écris comme on le voit ici : à côté de ce reste je descends $-d^2$; & divisant $-ad$ par a , je trouve $-d$ que j'écris au quotient; je multiplie ensuite le diviseur par le quotient $-d$ que je viens d'écrire, le produit est $-ad - d^2$ que j'écris sous le dividende; je soustrais ce produit en changeant les signes, & j'écris 0 sous $-ad$, qui est détruit par $+ad$: j'écris de même 0 sous $-d^2$, qui est détruit par $+d^2$. Si l'on multiplie le diviseur par le quotient $a - d$, on aura $a^2 + ad - ad - d^2 = a^2 - d^2$, en faisant la réduction.

Si la lettre par rapport à laquelle on veut ordonner, se trouvoit avoir le même exposant dans plusieurs termes, on ordonneroit par rapport à une autre lettre.

Lorsqu'il y a des lettres au diviseur qui ne se trouvent pas dans le dividende, l'on ne peut faire la division exactement, dans ce cas on peut se contenter de l'indiquer : ainsi, pour marquer le quo-

tient de a^2 divisé par d , on écrira $\frac{a^2}{d}$; pour diviser ab par cb , on écrira $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$, en faisant la division autant qu'on le peut, ce qui est évident, puisque $cb \times \frac{a}{c} = \frac{cab}{c} = ab$: c'est-à-dire, que le produit du diviseur, par le quotient, est égal au dividende: de même $\frac{a+b}{x}$, indique la division de $a+b$ par x .

Voici quelques divisions pour exercer les Commencans, qui, pour se familiariser avec cette opération,

Dividende.	Diviseur.
$x^2 - 2px + p^2$	$x - p$
	$x - p$
	Quotient.

Dividende.	Diviseur.
$x^4 + 4x^2p + 4p^2$	$x^2 - 2p$
	$x^2 - 2p$
	Quotient.

peuvent multiplier deux quantités algébriques quelconques l'une par l'autre, en divisant le produit par l'une des deux, ils doivent trouver l'autre au quotient.

29. Avant de passer plus loin, nous allons donner la méthode de trouver tous les diviseurs d'une quantité quelconque. Soit la quantité $x^3p + x^2p$, dont on demande tous les diviseurs. Je divise d'abord cette quantité par un de ses diviseurs simples

D. 1.

p , le quotient est $x^3 + x^2$, que je divise par un de ses diviseurs simples x , pour avoir le quotient $xx + x$, que je puis encore diviser par x , le quotient est $x + 1$, que je ne puis plus diviser que par $x + 1$, le quotient est 1 ; de sorte que les diviseurs simples sont $p, x, x, x + 1$. Les multipliant 2 à 2, & n'écrivant qu'une fois le même produit, j'ai les diviseurs doubles $px, px + p, x^2, x^2 + x$. Les multipliant ensuite, 3 à 3, j'ai les diviseurs de trois dimensions $px^2, px^2 + px, x^3 + x^2$; enfin les multipliant 4 à 4, j'ai $px^3 + px^2$: de sorte que les diviseurs cherchés sont $p, x, x + 1, px, px + p, x^2, x^2 + x, px^2, px^2 + px, x^3 + x^2, px^3 + px^2$, auxquels on peut joindre l'unité qui est un diviseur de toutes les quantités. La raison de ce procédé est évidente ; car, si la quantité proposée est divisible par p & par x , elle sera évidemment divisible par le produit px .

Soit le nombre 30 dont on demande tous les diviseurs. On essayera de diviser par 2 autant de fois qu'on le pourra, ensuite par 3, ensuite par 5, & ainsi de suite par tous les *nombre premiers* (ce sont ceux qui n'ont d'autre diviseur que l'unité & eux-mêmes), on multipliera ensuite les différens diviseurs, deux à deux, ensuite trois à trois, &c. Divisant donc 30 par 2, le quotient est 15, que je ne puis plus diviser par 2 ; mais, comme je puis diviser par 3, je fais la division, & le quotient est 5, que je ne puis diviser que par 5, le quotient est 1 ; de sorte que les diviseurs simples de 30 sont 2, 3, 5 : les multipliant deux à deux, j'ai les nouveaux diviseurs 6, 10, 15 ; enfin les prenant trois à trois, j'ai 30 : donc les diviseurs cherchés sont 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, j'omets 1 qui est diviseur de tout nombre.

DES FRACTIONS ALGEBRIQUES.

30 Soit la fraction $\frac{b}{d}$ qui indique qu'on a divisé l'unité en un certain nombre de parties désigné par d , & que l'on prend un nombre b de ces parties. En se rappelant ce que nous avons dit sur les fractions numériques, on verra aisément qu'en multipliant les deux termes par x , la fraction restera de même valeur, c'est-à-dire, que $\frac{b}{d} = \frac{bx}{dx}$, de même la fraction $\frac{ab}{ad}$ devient $\frac{b}{d}$, en divisant les deux termes par une même quantité a . Pour réduire deux fractions $\frac{b}{d}, \frac{x}{p}$ au même dénominateur, on multipliera les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre, & l'on aura les nouvelles fractions $\frac{bp}{dp}, \frac{dx}{dp}$ qui ont un même dénominateur, & qui d'ailleurs sont de même valeur (voyez les fractions numériques). De même pour réduire les fractions $\frac{b}{d}, \frac{c}{g}, \frac{x}{p}$ au même dénominateur, on multipliera les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs des autres, & l'on aura les nouvelles fractions $\frac{bgp}{dgp}, \frac{cpd}{dgp}, \frac{dgp}{dgp}$. Pour réduire une fraction $\frac{ba}{ad}$ à sa plus simple expression, on divisera ses deux termes par leur plus grand commun diviseur a , & l'on aura $\frac{b}{d}$ pour la fraction $\frac{ba}{ad}$ réduite à sa plus simple expression.

31. Mais comme il n'est pas toujours facile de trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités, nous allons en donner la méthode, après avoir établi le *lemme* suivant.

LEMME. Si deux quantités A plus grande & B plus petite sont exactement divisibles par une même quantité p , je dis que si, après avoir divisé A par B , il y a un reste c , ce reste sera divisible par p . Soit le quotient de A divisé par $B = m$; donc $A = mB + c$; donc, puisque A est exactement divisible par p , $mB + c$ sera aussi exactement divisible par p ; mais B est exactement divisible par p ; donc son multiple mB (le produit d'une quantité a par une quantité d est dit *multiple* de a , lorsque le multiplicateur est un nombre entier > 1 , & *sous-multiple*, si le multiplicateur est plus petit que l'unité. Ainsi ad est multiple de a , si $d = 3$, par exemple, & sous-multiple, si $d = \frac{1}{3}$) sera divisible par p ; donc c le sera aussi.

COROLLAIRE. Parce que B & c sont exactement divisibles par p , si on divise B par c , en sorte qu'il y ait un reste d , il suit du lemme précédent que d sera exactement divisible par p . De même on pourra diviser par p le reste e qu'on trouvera en divisant c par d , & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste rien.

COROLLAIRE II. Il peut arriver deux cas, ou le dernier reste est égal à p , ou plus grand; car il ne peut être plus petit, puisque tous les restes sont exactement divisibles par p , dans le premier cas p sera le plus commun diviseur de A & de B , puisqu'une plus grande quantité ne sauroit diviser exactement tous les restes, à cause qu'elle ne pourroit diviser exactement le dernier reste qu'on suppose $= p$; dans le second cas p sera visiblement un diviseur commun, puisqu'il divise exactement le der-

nier reste ; mais il ne fera pas le plus grand diviseur , puisque A & B pourront être divisés par le dernier reste.

REMARQUES. Nous avons divisé B par c , & d par c , parce que nous avons supposé que les restes vont en décroissant (ce qui arrive toujours en arithmétique) ; mais , si un reste d'étoit plus grand que le reste précédent c , on diviserait d par c , & le reste seroit également divisible par p , comme il suit du lemme.

Soit maintenant proposé de trouver le plus grand commun diviseur des quantités A & B , ordonnées par rapport à la lettre x. Divisez le premier terme de la formule A

$$A \dots\dots\dots x^3 + ax^2 - c^2x + ac^2$$

$$m \dots\dots\dots x^3 + ax^2 - yx^2 + ayx$$

$$C \dots\dots\dots yx^2 + (c^2 + ay) \cdot - x + ac^2$$

$$n \dots\dots\dots yx^2 - ayx + y^2x - ay^2$$

$$d \dots\dots\dots (c^2 + y^2) \cdot - x + ac^2 + ay^2$$

$$B \dots\dots\dots x^2 + (a - y)x + ay \quad \text{Quotiens.}$$

$$q \dots\dots\dots x^2 + ax \quad \begin{array}{r} x \\ - y \\ x \end{array}$$

$$E \dots\dots\dots yx + ay \quad \text{-----}$$

$$f \dots\dots\dots x + a \quad \begin{array}{r} c^2 + y^2 \end{array}$$

$$K \dots\dots\dots x + a \quad \begin{array}{r} 1 \end{array}$$

$$\text{-----} \quad \begin{array}{r} c^2 + y^2 \end{array}$$

par le premier de la formule B , & ayant multiplié le quotient x par le diviseur , ôtez le produit m de A , pour avoir le reste C , que vous diviserez de la même manière par B ; retranchez-en le produit n

du diviseur B , par le quotient $\frac{x}{y}$, vous aurez le reste d . Maintenant comme x a un exposant moindre dans ce reste que dans B ; renversez l'ordre, & divisez B par le reste d , & retranchez-en q , produit de d par le quotient $\frac{x}{c^2 + x^2}$. Le troisième reste sera E , qui, étant divisé par y , qui se trouve dans tous les termes, donnera p ; divisez p par d , & ôtez-en le produit K de d par $\frac{1}{c^2 + y^2}$, le reste sera 0 , de sorte que p sera le plus grand commun diviseur cherché, comme cela suit du lemme; mais pour le faire encore mieux concevoir, voici comme je raisonne. Si p étant divisé par d , le reste est 0 : donc p divise exactement d (ici le quotient peut être fractionnaire), donc p divise aussi exactement d multiplié par $\frac{x}{c^2 + y^2}$, c'est-à-dire q , & parce qu'il divise E de la même manière, il divisera encore exactement $q + E$ ou B , donc il divisera aussi le produit de B par $\frac{x}{y}$ ou n , aussi bien que $n + d = C$; mais le produit de B par x , ou m est exactement divisible par p : donc $m + C = A$ l'est aussi; donc A & B sont exactement divisés par p ; donc p est commun diviseur de A & de B : d'ailleurs il est leur plus grand commun diviseur; car aucune autre quantité ne peut diviser le dernier reste, ce que doit cependant faire le commun diviseur, ainsi que nous l'avons déjà vu.

Si en s'y prenant, comme nous venons de le dire, on ne trouvoit point de commun diviseur, mais une suite infinie de termes, on ordonneroit par rapport à une autre lettre; & si, en ordonnant successivement par rapport à toutes les lettres du dividende, la même

chose arrivoit, ce seroit une marque que les quantités A & B n'auroient point de commun diviseur.

REMARQUE. Si l'on s'apperçoit que de deux quantités A, B, l'une contient une quantité qui ne puisse pas diviser l'autre, ou qui n'ait aucun diviseur commun avec l'autre, on peut l'effacer sans craindre que le commun diviseur en soit altéré; on fera la même chose, lorsqu'on divisera C par d, &c. On peut de même multiplier l'une des quantités sur lesquelles on opere par une quantité qui n'ait aucun diviseur commun avec l'autre; car le plus grand commun diviseur de ab & de a , étant a , le plus grand diviseur commun de yab & de a , de $\frac{ab}{d}$ &

de a sera encore a . Or il arrive souvent que pour diviser une quantité par une autre, on a besoin de multiplier tous les termes de la première par une quantité qui ne peut pas exactement diviser la seconde. On pourra donc faire cette multiplication sans altérer le plus grand commun diviseur cherché.

31. Pour ajouter ensemble plusieurs fractions qui ont le même dénominateur, on ajoute leurs numérateurs en conservant le dénominateur; ainsi

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \text{ ce qui est évident, en faisant}$$

attention à ce que nous avons dit en parlant des fractions numériques; mais si les fractions qu'on veut ajouter, avoient différens dénominateurs, après les avoir réduites au même dénominateur, on prendroit pour numérateur de la somme, la somme de tous les numérateurs: ainsi $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$

$$\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd},$$

33. Pour soustraire une fraction d'une autre fraction, on les réduira au même dénominateur, si elles en ont de différens, & l'on prendra pour numérateur de la différence, la différence des numérateurs : ainsi $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad - cb}{bd}$.

Si on avoit à soustraire une fraction d'un entier, ou d'un entier joint à une fraction, ou si l'on avoit à soustraire un entier & une fraction d'une fraction jointe à un entier, l'on réduiroit (si la réduction n'étoit pas déjà faite) la quantité qu'on veut soustraire, & la quantité dont on veut soustraire chacune à une seule fraction, pour opérer ensuite comme nous venons de le dire.

34. Pour multiplier une fraction par une autre fraction, on multipliera les numérateurs l'un par l'autre, le produit sera le numérateur du produit des fractions ; pour avoir le dénominateur du produit, l'on prendra le produit des deux dénominateurs, & il en sera de même pour un plus grand nombre de fractions ; mais si l'on veut multiplier un entier a , par exemple, par une fraction, on supposera $a = \frac{a}{1}$, ce qui ne change pas la valeur, & l'on n'aura plus qu'à multiplier une fraction par une autre fraction : ainsi $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $a \times \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}$, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{p}{q} = \frac{acp}{bdq}$.

35. Pour diviser une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, le produit sera le numérateur du quotient ; & multipliant ensuite le dénominateur du dividende par le numérateur du di-

viseur, le produit donnera le dénominateur du quotient : ainsi le quotient de $\frac{c}{d}$ par le diviseur $\frac{a}{b}$ sera $\frac{cb}{da}$. Si on proposoit de diviser un entier a par une fraction, on supposeroit $a = \frac{a}{1}$, & pour diviser un entier joint à une fraction par un entier, ou par un entier joint à une autre fraction, on réduiroit le dividende & le diviseur chacun en une seule fraction : ainsi ces deux derniers cas rentrent dans le premier. Toutes ces règles se démontrent comme celles des fractions numériques.

REMARQUE. Après une opération quelconque, Addition, Soustraction, Multiplication, ou Division, on ne doit pas oublier de faire la réduction des termes semblables, s'il y en a.

DE la formation des puissances des Monomes & Polinomes, de l'extraction des Racines, du Calcul des radicaux, & des Exposans.

36. Nous appellons *première puissance* de a la quantité a elle-même : ainsi la *première puissance* de $a = a$; la *seconde puissance* de a , ou le produit de a par a , est $= a \times a = a^1 \times a^1 = a^2 = aa$; la *troisième puissance* de $a = a^3 = a^{1 \times 3}$; de même la *seconde puissance* de $a^3 = a^3 \times a^3 = a^6 = a^{3 \times 2}$: d'où l'on peut conclure 1°. que la puissance d'une quantité a n'est autre chose que cette quantité multipliée par elle-même un certain nombre de fois. 2°. qu'il faut faire autant de multiplications, moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance. 3°. que pour élever une quantité à une puissance donnée, il suffit de multiplier l'exposant

de cette quantité par l'exposant de la puissance : ainsi la troisième puissance de $a^2 = a^{2 \times 3} = a^6 = a^2 \times a^2 \times a^2$: donc, pour élever $a = a^1$ à la puissance m , on multipliera l'exposant 1 de a par l'exposant m de la puissance, & l'on aura a^m ; & si l'on veut avoir la puissance p de a^n , on multipliera n par p , pour avoir a^{np} . La seconde puissance s'appelle *quarré*, & la troisième s'appelle *cube* : ainsi a^2 est le quarré de a , a^3 en est le cube. S'il s'agit d'avoir le quarré d'un nombre, on multipliera ce nombre par lui-même ; *par exemple*, le quarré de 5 est $= 5 \times 5 = 25$, son cube est le produit du quarré 25 par le nombre 5 : voici les quarrés & les cubes de tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 10.

Nombres	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Quarrés.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.
Cubes.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.

Si les quantités qu'on veut élever à une puissance entière & positive étoient complexes, il n'y auroit rien à changer à la méthode : ainsi, pour élever $a+b$ à la seconde puissance ou au quarré, on multipliera $a+b$ par $a+b$, & l'on aura la seconde puissance de $a+b$ qu'on peut indiquer : ainsi $\overbrace{a+b}^2 = \overbrace{a+b} \times \overbrace{a+b} = a^2 + 2ab + b^2$. Le cube de $a+b = \overbrace{a+b}^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: la puissance quatrième de $a+b = \overbrace{a+b}^4$, & enfin la puissance m quelconque de $a+b$ est $= \overbrace{a+b}^m$. La quantité a , qui, multipliée par elle-même une fois, a donné le quarré a^2 , s'appelle la *racine quarrée* de a^2 ; de même bc est la *racine quarrée* de $b^2 c^2$. La racine cubique de a^6 est la quantité a^2 , qui, multipliée deux fois par elle-même, a donné le cube

a^6 . En général la racine n de a^n est a , parce qu'en multipliant a par lui-même un nombre $n - 1$ de fois, on trouve a^n *. Le quarré d'une fraction $\frac{a}{b}$ se trouve en prenant le quarré du numérateur & celui du dénominateur : pour avoir le cube, on prendra le cube du numérateur & celui du dénominateur : ainsi le quarré de $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^2}{b^2}$ son cube sera $\frac{a^3}{b^3}$. On voit aussi bien aisément que la racine quarrée de $\frac{a^2}{b^2}$ est $\frac{a}{b}$; que la racine cube de $\frac{a^3}{b^3}$ est $\frac{a}{b}$; de sorte que pour avoir la racine d'une fraction, il faut prendre celle de son numérateur aussi-bien que celle de son dénominateur.

De ce que nous venons de dire, il suit que, pour avoir la racine troisième ou cubique de a^6 , il suffit de diviser l'exposant 6 de la quantité donnée par l'exposant 3 de la racine ; que pour avoir la racine quarrée de a^4 , il suffit de diviser l'exposant 4 par l'exposant 2 de la racine : de sorte que la racine cube de $a^6 = a^{\frac{6}{3}} = a^2$, la racine quarrée de a^4 est $= a^{\frac{4}{2}} = a^2$, ce qui est évident ; & en général, puisque pour élever a^m à la puissance p , il faut multiplier l'exposant m par l'exposant p de la puissance pour trouver a^{mp} , il faudra, pour avoir la racine p de a^{mp} , diviser l'exposant mp par l'exposant de la racine, & on aura $a^{\frac{mp}{p}} = a^m$: donc en général la racine n de $a^m = a^{\frac{m}{n}}$. On marque aussi la racine n de a^m , de cette manière, $\sqrt[n]{a^m}$; de sorte

* On suppose que n est un nombre entier positif.

que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; de même $\sqrt[2]{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$,
 $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$. Le signe $\sqrt{}$ s'appelle *signe radical*, & les quantités affectées de ce signe, sont dites *quantités radicales* : ainsi $p\sqrt[3]{bc}$ est une quantité radicale. La quantité p qui est hors du signe, s'appelle *coefficient* du signe, & la quantité bc est dite être sous le signe. Lorsqu'un radical n'a point de coefficient exprimé, il est censé avoir l'unité pour coefficient. On appelle *exposant* du signe la quantité qui se trouve entre les branches du signe ; mais, quand un radical n'a point d'exposant, il est censé avoir 2 pour exposant, de sorte que $\sqrt[2]{b^4} = \sqrt{b^4} = b^{\frac{4}{2}} = b^2$.

En examinant avec attention ce que nous venons de dire, on verra facilement que l'exposant du signe est toujours le diviseur de l'exposant de la quantité qui est sous le signe.

Il est facile d'appercevoir que la racine quarrée de a^2 est $= \pm \sqrt{aa} = \pm a$; car $a^2 = +a \times +a$, de même $a^2 = -a \times -a$. ainsi la racine quarrée d'une quantité positive est toujours double. De

même la racine quatriéme de $p^4 = \pm \sqrt[4]{p^4} = \pm p$; car $p^4 = +p \cdot +p \cdot +p \cdot +p$ (le point indique la multiplication) $= -p \cdot -p \cdot -p \cdot -p$. En général une racine d'un degré pair est toujours double ; mais $\sqrt{-a^2}$ est une quantité impossible ; car elle ne peut être ni $+a$, ni $-a$, puisque $+a \times +a = a^2$, de même $-a \times -a = +a^2$: donc la racine de $-a^2$ qu'on marque ainsi $\pm \sqrt{-a^2}$ est une quantité absurde ; de même toutes les racines paires d'une quantité

négative sont impossibles : ainsi $\pm \sqrt[4]{-p^4}$ est une quantité impossible ; ces sortes de quantités sont appelées *imaginaires*.

Si l'on veut changer l'exposant d'un radical, en conservant sa valeur, il faut multiplier par la même quantité l'exposant du radical, & l'exposant de la quantité qui est sous le signe. Ainsi

$$\sqrt[3]{a^n} = \sqrt[3 \times 2]{a^{2 \times n}}; \text{ car } \sqrt[3]{a^n} = a^{\frac{n}{3}}, \text{ \& } \sqrt[3 \times 2]{a^{2 \times n}} = a^{\frac{2n}{6}} = a^{\frac{n}{3}}; \text{ si } n = 1 \text{ on aura } \sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}.$$

Pour réduire deux radicaux au même exposant, sans changer leur valeur, il faut multiplier l'exposant du radical du premier, & l'exposant de la quantité qui est sous le signe par l'exposant du second, & réciproquement; mais, s'il y a plus de deux radicaux, on multipliera l'exposant du signe aussi-bien que l'exposant de la quantité qui est sous le signe d'un chacun par le produit des exposans de tous les autres radicaux, ce qui, comme nous venons de le voir, ne peut changer leur valeur. Ainsi,

pour réduire au même exposant les radicaux $a \sqrt[3]{b^1}$, $c \sqrt[2]{d}$, je multiplie l'exposant 3 par 2; de même je multiplie l'exposant 1 de b par 2; je multiplie ensuite l'exposant du second radical par 3, aussi-bien que l'exposant 1 de d , & j'ai les deux radicaux $a \sqrt[6]{b^2}$, $c \sqrt[6]{d^3}$ réduits au même exposant. Les trois

radicaux $a \sqrt[n]{b^m}$, $c \sqrt[p]{d^q}$, $\sqrt[x]{g^r}$, réduits au même exposant, se changeront en ceux-ci, $a \sqrt[mpx]{b^{m^2px}}$, $\sqrt[npx]{d^{q^2nx}}$, $\sqrt[npx]{g^{r^2nx}}$, ce qui est évident.

Pour ajouter deux ou plusieurs radicaux ensemble, réduisez-les au même exposant, s'ils en ont de différens; prenez ensuite leur somme comme si c'étoient des quantités algébriques : ainsi la somme de $a \sqrt[3]{d}$ & de $c \sqrt[3]{d}$ est $= a \sqrt[3]{d} + c \sqrt[3]{d} =$

$(a + c) \cdot \sqrt[3]{d}$, la somme de $a \sqrt[3]{b} + c \sqrt[3]{d}$ est $= a \sqrt[3]{b^3} + c \sqrt[3]{d^3}$, en réduisant au même exposant.

La soustraction des radicaux qui ont un même exposant, se fait comme la soustraction algébrique, en changeant le signe de celui ou de ceux qu'on veut soustraire; mais s'ils ont différens exposans, on les réduit au même exposant, avant de faire la soustraction. Ainsi pour soustraire $a \sqrt[3]{b}$ de $c \sqrt[3]{p}$, on écrira $c \sqrt[3]{p} - a \sqrt[3]{b}$, ce qui est évident; mais $a \sqrt[3]{b} - c \sqrt[3]{d^2}$ est $= a \sqrt[3]{b^3} - c \sqrt[3]{d^6}$.

Pour faire passer un coefficient sous le signe, sans changer la valeur du radical, on élèvera le coefficient à l'exposant du signe : ainsi $b \sqrt[3]{d^3} = \sqrt[3]{d^3 b^3}$; car $b \sqrt[3]{d^3} = b d^1 = b d$, de même $\sqrt[3]{d^3 b^3} = d^1 b^1 = db$. On voit aussi que, pour faire passer hors du signe une quantité qui se trouve sous le signe, il suffit de diviser l'exposant de cette quantité par l'exposant du signe : ainsi $\sqrt[3]{ad^6} = d^2 \sqrt[3]{a}$; car $\sqrt[3]{ad^6} = d^2 \times a^{\frac{1}{3}} = d^2 \sqrt[3]{a}$. Pour faire entrer dans l'expression d'un radical une quantité d quelconque, il suffit de multiplier la quantité sous le signe par d élevé à l'exposant du signe, en divisant en même tems le coefficient du signe par la même quantité d ; car, par cette opération, on ne fait que multiplier & diviser un radical par une même quantité : ainsi $a \sqrt[3]{b} = \frac{a}{d} \sqrt[3]{bd^3}$, $\sqrt[3]{b} = 1 \sqrt[3]{b} = \frac{1}{d} \sqrt[3]{bd^3}$: car il est visible; par exemple, que $\frac{a}{d} \sqrt[3]{bd^3} = \frac{a}{d} \times b^{\frac{1}{3}} d^1 = \frac{ad}{d} \times b^{\frac{1}{3}} = a \sqrt[3]{b}$.

Pour multiplier les radicaux les uns par les autres, après les avoir réduits au même exposant, s'ils en ont de différens, on multipliera leurs coefficients les uns par les autres, le produit donnera le coefficient du produit cherché; on multipliera de même les unes par les autres, les quantités sous le signe & leur produit restera sous le signe : ainsi $a \sqrt[3]{b} \times c \sqrt[3]{d} = ac \sqrt[3]{bd}$, $a \sqrt[3]{d} \times \sqrt[3]{c} = a \sqrt[3]{d} \times 1 \sqrt[3]{c} = a \sqrt[3]{dc}$, $a \sqrt[3]{p^m} \times$
X

$\times c \sqrt[n]{q^r} \times d \sqrt[n]{g^s} = acd \sqrt[n]{p^m q^r g^s}$. De même $2 \sqrt{4} \times 3 \sqrt{9} = 6 \sqrt{36} = 6 \times 6 = 36$; ce qui est évident. Si on veut avoir le produit de $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, on écrira $-\sqrt{aa} = -a$; puisqu'il est évident que $-a$ est le carré de $\sqrt{-a}$. Pour ne pas se tromper en multipliant; *par exemple*, les quantités imaginaires $\sqrt{-b}$, $\sqrt{-c}$ l'une par l'autre, on remarquera que $\sqrt{-b} = \sqrt{-1 \cdot b} = \sqrt{-1} \times \sqrt{b}$, de même $\sqrt{-c} = \sqrt{-1} \times \sqrt{c}$: donc $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} = -1 \times \sqrt{bc} = -\sqrt{bc}$, à cause de $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$. En multipliant à l'ordinaire, l'on auroit $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = \sqrt{bc}$, ce qui est faux.

Pour diviser deux radicaux l'un par l'autre, on les réduira au même exposant, s'ils en ont de différens; on divisera ensuite le coefficient du dividende par celui du diviseur, & la quantité qui est sous le signe dans le dividende par la quantité qui se trouve

sous le signe du diviseur: ainsi le quotient de $a \sqrt[3]{b}$ par $c \sqrt[3]{d}$ est $= \frac{a}{c} \sqrt[3]{\frac{b}{d}}$; de même $4 \sqrt{16}$ divisé par $2 \sqrt{4}$ est $= \frac{4}{2} \sqrt{\frac{16}{4}} =$

$2 \sqrt{4} = 4$; mais pour diviser $a \sqrt[n]{b}$ par $c \sqrt[n]{p}$, on réduira les radicaux au même exposant, pour avoir $a \sqrt[nm]{b^m}$, $c \sqrt[nm]{p^m}$; divisant ensuite le premier par le second, on trouvera le quotient

$$= \frac{a}{c} \sqrt[nm]{\frac{b^m}{p^m}}.$$

Pour élever un radical à une puissance quelconque, il faut multiplier l'exposant de chacun de ses facteurs (dans un produit $a d c$, les quantités a , d , c sont appelées les *facteurs* de ce produit) par l'exposant de la puissance proposée: ainsi la puissance

cinquième de $\sqrt{a^1}$, ou $(\sqrt{a^1})^5$ est $= \sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}} = a^2 \sqrt{a}$; donc, lorsque l'exposant de la puissance est égal à l'exposant du

signe, il suffit d'ôter le signe radical. La puissance m de $\sqrt[n]{a^p}$ sera

$\sqrt[n]{a^{pm}}$; car $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$; mais, pour avoir la puissance m de cette dernière quantité, on doit, selon ce que nous avons dit

ci-dessus, multiplier l'exposant $\frac{p}{n}$ par m , pour avoir $a^{\frac{pm}{n}} =$

$\sqrt[n]{a^{pm}}$. Si le radical avoit un coefficient différent de l'unité, on élèveroit ce coefficient à la puissance proposée, ou bien,

avant de faire l'opération, on feroit passer le coefficient sous le signe : ainsi $(a \sqrt[3]{c^2})^2 = a^2 \sqrt[3]{c^4} = \sqrt[3]{a^6 c^4}$, en faisant passer a sous le signe avant l'opération, ou après; de même $(2 \sqrt{4})^2 = 4 \sqrt{16} = 4 \times 4 = 16$, parce que la puissance seconde de 4 est $= 16$.

Pour extraire une racine quelconque d'une quantité radicale dont le coefficient est l'unité, il faut multiplier l'exposant du radical par celui de la racine; ainsi la racine cinquième de

$$1 \sqrt[3]{a^{15}} = \sqrt[15]{a^{15}} = a^{\frac{15}{15}} = a^1 = a, \text{ ce est évident; car } \sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}} = a^5; \text{ or la racine cinquième de } a^5 \text{ est } = a^1 = a;$$

donc, &c. De même la racine n de $\sqrt[m]{a^p}$ est $= \sqrt[nm]{a^p}$. Si le radical avoit un coefficient, dont on peut prendre la racine demandée, on la prendroit séparément; mais si on ne pouvoit en prendre une racine exacte, on le feroit passer sous le signe :

$$\text{ainsi la racine quarrée de } 9 \sqrt[3]{64} \text{ est } = 3 \sqrt[6]{64} = 3 \times 2 = 6;$$

$$\text{car } \sqrt[3]{64} = 4, \text{ dont la racine quarrée } = 2, \text{ de même } \sqrt[6]{64} = 2 : \text{ car } 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2.$$

Mais pour avoir la racine quarrée de $3 \sqrt[3]{2}$, je fais passer 3 sous le signe &

$$\text{j'ai } \sqrt[3]{27 \times 2} = \sqrt[3]{54}, \text{ dont la racine quarrée est } = \sqrt[6]{54}.$$

Pour avoir une puissance ou une racine d'une quantité radicale fractionnaire, on feroit sur le numérateur & le dénominateur du coefficient & de la quantité, sous le signe, les mêmes opérations que nous venons de faire sur les entiers; il en seroit de même, si l'on vouloit avoir la somme ou le produit, la différence ou le quotient de ces sortes de quantités, ce qui n'a pas besoin d'une plus longue explication.

37. Passons maintenant à la formation des puissances & à l'extraction des racines des polinomes.

Le quarré de $a + b$, ou $\overbrace{a + b}^2$, ou $(a + b)^2$ est $= a^2 + 2ab + b^2$. En multipliant cette quantité par $a + b$ & réduisant, on aura le cube de $a + b$,

$$\text{ou } \overbrace{a + b}^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \text{ donc le quarré d'un binôme } a + b \text{ contient } 1^\circ. \text{ le quarré } a^2$$

du premier terme a de la racine ; en second lieu le double produit du premier terme par le second, ou $2ab$; enfin le carré b^2 du second terme b de la racine. Donc pour revenir du carré à la racine , après avoir extrait la racine du carré a^2 , 1°. j'écrirai a , racine carrée de a^2 , au quotient, c'est-à-dire, à la racine : 2°. j'élèverai a au carré pour avoir a^2 , que je retrancherai du carré $a^2 + 2ab + b^2$, ce qui se fait en écrivant $-a^2$, qui détruira a^2 & il ne restera que $2ab + b^2$. Pour trouver le second terme b de la racine, je prends le double du terme trouvé, c'est-à-dire, $2a$ pour diviseur ; & divisant le terme $2ab$ par $2a$, le quotient sera $+b$ & la racine cherchée sera $a + b$. Pour en faire la preuve, j'élève $a + b$ au carré, en multipliant $a + b$ par $a + b$, le produit est égal au carré $a^2 + 2ab + b^2$; donc, &c. Appliquons ceci à l'exemple suivant.

Soit proposé d'extraire la racine carrée de la quantité $9x^4 - 6x^2d + d^2$. Ayant écrit cette quantité, comme on le voit : je cherche d'abord la racine carrée du premier terme,

$9x^4 - 6x^2d + d^2$	$3x^2 - d$
0	
(quand on parle d'une racine,	$6x^2$
$- 9x^4$	

sans la spécifier, on entend parler de la racine carrée) ; pour cela, je dis la racine de 9 est 3, que j'écris à la racine ; je dis ensuite la racine de x^4 est x^2 , que j'écris à côté de 3 ; élevant $3x^2$ au carré, j'ai $9x^4$, que j'écris sous $9x^4$, je fais la soustraction, en changeant le signe (de $9x^4$) de $+$ en $-$, & je mets 0 sous $9x^4$, qui se trouve détruit par $- 9x^4$. Je prends pour diviseur $6x^2$, double de la racine écrite $3x^2$; je divise le second terme $- 6x^2d$

par ce diviseur, pour avoir le quotient $\frac{1}{2}d$, que j'écris à côté du premier terme de la racine; élevant maintenant $3x^2 - d$ au carré, je retrouve la quantité proposée, ainsi l'opération est juste. Cette méthode est fondée sur ce que si $a+b$ représente la racine $3x^2 - d$, a pourra représenter $3x^2$ & b la quantité $-d$. S'il y avoit plus de trois termes au carré, on les réduiroit à 3 (si cela étoit possible), en prenant pour un seul terme les quantités dans lesquelles une même lettre auroit le même exposant & pour un seul terme tous ceux dans lesquels cette lettre ne se trouveroit pas: ainsi, pour avoir la racine de $a^2 + 2ab + b^2 - 2ad - 2bd + d^2$, on disposera cette quantité, comme on le voit ici: prenant ensuite la racine du pre-

mier terme	$a^2 + 2ab + b^2$	
a^2 , on écrira	$0 - 2ad - 2bd$	$a + b - d$
a au quo-	$+ d^2$	
tient; éle-	$- a^2$	$2a$

vant au carré, on retranchera a^2 de a^2 ; on prendra pour diviseur $2a$ double de la racine, & divisant d'abord $2ab$ par $2a$, on mettra au quotient $+b$, divisant tout de suite $-2ad$ par $2a$, on écrira encore le quotient $-d$ à la racine, qui sera $a+b-d$; en effet en multipliant cette racine par elle-même, on trouvera la quantité proposée. Si la quantité proposée ne peut pas se réduire à trois termes par la méthode dont nous venons de parler, on ordonnera cette quantité par rapport à une lettre quelconque, on prendra la racine du premier terme comme nous venons de le faire; on retranchera de même le carré du premier terme de la racine de la quantité proposée; prenant ensuite pour diviseur le double de la racine, on divisera le terme suivant (on doit

toujours diviser le terme qui contient le plus grand exposant de la lettre, par rapport à laquelle on a ordonné.) par ce diviseur; on écrira le quotient à la racine: multipliant ensuite le diviseur par le quotient, on ajoutera au produit le carré de ce quotient pour soustraire le tout de la quantité proposée; l'on continuera de même en prenant toujours pour diviseur le double de la racine trouvée.

Soit la quantité $x^4 + 4x^3p + 6x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$. Cette quantité ne pouvant pas évidemment se réduire à 3 termes & étant ordonnée par rapport à x ;

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 4x^3p + 6x^2p^2 + 4xp^3 + p^4 & x^2 + 2xp + p^2 \\
 \hline
 - x^4 \pm 4x^3p \pm 4x^2p^2 & 2x^2 \\
 \hline
 & 2x^2 + 4xp
 \end{array}$$

je prends la racine x^2 du premier terme & après avoir écrit x^2 à la racine, je prends son carré x^4 que je soustrais de la quantité proposée. Prenant ensuite $2x^2$ pour diviseur, je divise le terme suivant $4x^3p$ par $2x^2$, & j'écris à la racine le quotient $2xp$. Je multiplie ensuite ce quotient par le diviseur & j'ai la quantité $4x^3p$, à laquelle j'ajoute $4x^2p^2$ carré du quotient; retranchant cette somme du reste de la quantité proposée, il me reste $2x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$ que j'écris sous la quantité proposée, comme on le voit. Doublant ensuite la racine, j'ai pour diviseur $2x^2 + 4xp$; je divise le terme $2x^2p^2$ par le premier terme $2x^2$ du diviseur, pour avoir le quotient $+p^2$, que j'écris à la racine; multipliant ensuite le diviseur par le quotient & ajoutant au produit le carré du quotient, j'ai $2x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$; retranchant cette

quantité du reste de la quantité proposée, ~~le~~ reste rien, & la racine cherchée est $x^2 + 2px + p^2$. En prenant la racine de celle-ci, on aura $x + p$, racine quatrième de la quantité proposée : de sorte que pour avoir la racine quatrième d'une quantité d^4 , on peut d'abord prendre la racine quarrée d^2 de d^4 , & prendre ensuite la racine d de d^2 ; mais si l'on ne peut avoir la racine quarrée de celle-ci, c'est une marque que la quantité proposée n'a pas de racine quatrième; cette méthode est générale.

Pour extraire la racine cube de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ que nous savons être $= a + b$; après avoir disposé cette quantité comme on le voit ici,

je prends la ra-	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a + b$
cine cubique du	a	
premier terme	$\underline{a^3}$	$\underline{3a^2}$

a^3 , j'ai a que j'écris à la racine; élevant a au cube, je trouve a^3 que je retranche de la quantité proposée & j'écris 0 sous a^3 . Pour trouver le second terme b de la racine, je vois qu'il me faut diviser le second terme $3a^2b$ par $3a^2$, c'est-à-dire, par le triple du quarré du premier terme a de la racine. Je prends donc le quarré a^2 de a , & triplant, j'ai $3a^2$ pour diviseur: divisant donc $+ 3a^2b$ par $3a^2 = + b$, j'ai $+ b$ pour quotient; j'écris $+ b$ à la racine, de sorte que la racine entière est $a + b$. En effet, élevant $a + b$ au cube, on trouve la quantité proposée. S'il y avoit plus de 4 termes au cube, il y en auroit plus de deux à la racine, dans ce cas on tacheroit de réduire la quantité proposée à 4 termes, en suivant la méthode, dont nous avons parlé ci-dessus. Ainsi, pour extraire la racine cubique de $x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 - 3x^2d + 3xd^2 - 6xbd - 3b^2d +$

$3bd^2 - d^3$, je dispose cette quantité comme on le voit:

je prends	$x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3$	
ensuite la	0	
racine cu-	$- 3x^2d - 6xbd - 3b^2d$	$x + b - d$
bique x	$+ 3xd^2 + 3bd^2$	
du pre-	$- d^3$	
mier ter-	$- x^3$	$3x^2$
me x^3 ,		

je l'écris à la racine; j'éleve x au cube & retranchant x^3 de x^3 , j'écris 0 sous x^3 ; je prends ensuite pour diviseur le triple du carré de la racine, & divisant tout de suite tous les termes affectés de x^2 , j'ai $+ b - d$ que j'écris au quotient; de sorte que la racine cherchée est $x + b - d$: en effet, si on prend le carré de cette quantité, qu'on multiplie ensuite ce carré par la racine $x + b - d$ pour avoir le cube de cette racine, l'on trouvera la quantité proposée.

Lorsque la quantité proposée ne peut pas se réduire à quatre termes; à cause que chacune de ses lettres se trouve dans plus de quatre termes, avec des exposans au-dessus de 0, on peut ordonner par rapport à une lettre quelconque; prenant ensuite la racine cubique du premier terme, on l'écrira à la racine; élevant cette racine au cube, on retranchera le résultat de la quantité proposée. Prenant ensuite pour diviseur le triple du carré de la racine, on divisera le terme suivant (on doit toujours prendre pour terme suivant celui qui contient le plus grand exposant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné) par ce diviseur, pour écrire le quotient à la racine; on élèvera au cube les deux premiers termes de la racine, pour retrancher ce cube de toute la quantité proposée. Prenant ensuite

pour diviseur le triple du carré des deux premiers termes de la racine, on se servira du premier terme de ce diviseur pour diviser le terme suivant du reste de la quantité proposée; écrivant le quotient à la racine, on élèvera ensuite toute la racine trouvée au cube, pour retrancher le résultat de toute la quantité proposée; on continuera de même en prenant toujours pour diviseur le triple du carré de la racine trouvée.

Si une quantité n'est pas une puissance parfaite, on se contente d'indiquer sa racine : ainsi $a^2 + b^2$ n'étant pas un carré parfait, sa racine peut s'exprimer de cette manière $\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{a^2 + b^2}^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, en divisant l'exposant 1 sous-entendu de $(a^2 + b^2)$ par l'exposant 2 de cette racine.

38. Pour extraire les racines numériques, il faut se rappeler la table des carrés & des cubes des nombres que nous avons donnée ci-dessus (36), après quoi l'on verra aisément qu'un nombre d'un seul chiffre ne peut avoir trois chiffres à son carré, puisque 10 qui est le plus petit nombre de deux chiffres, a pour carré 100, qui est le plus petit nombre de 3 chiffres; 99 qui est le plus grand nombre de deux chiffres, a pour carré 9801, qui ne contient que quatre chiffres; de sorte qu'un nombre quelconque ne peut avoir à son carré tout au plus que le double de ses chiffres. De même le cube d'un nombre ne peut contenir plus du triple des chiffres de ce nombre; en effet 10, premier nombre de deux chiffres, a pour cube 1000, premier nombre de quatre chiffres & le cube de 99 ne contient que 6 chiffres, ainsi qu'on peut le voir en multipliant le carré de 99 par 99 pour avoir son cube.

Pour elever un nombre 25 au quarré, il faut multiplier 25 par 25 ; & pour avoir son cube , il faut multiplier son quarré par 25. On trouvera pour le quarré 625 & multipliant ce dernier nombre par 25 , on aura son cube 15625. Au lieu de multiplier 25 par 25 pour avoir son quarré, on peut s'y prendre de cette maniere : je prends le quarré de son premier chiffre 2 & j'écris 4
 4 comme on le voit ici ; je prends ensuite le double du premier chiffre, c'est 20
 20
 25
 ———
 625
 4 ; je multiplie ce double par le second chiffre 5 , j'écris le produit 20 sous 4, en avançant d'un rang vers la droite (s'il n'y avoit qu'un chiffre au produit , on l'avanceroit de même aussi d'un rang vers la droite) ; je prends ensuite le quarré du second , savoir 25 , que j'avance encore d'un rang ; prenant ensuite la somme , je trouve 625 comme ci-dessus. De-là je conclus qu'en partageant en tranches le quarré 625 en cette maniere 6 , 25 ; de sorte que la premiere tranche à droite contienne deux chiffres , le quarré du premier chiffre de la racine doit se trouver dans la premiere tranche 6 de la gauche , & le double produit du premier chiffre par le second dans le premier chiffre 2 de la seconde tranche ; enfin le quarré du dernier chiffre 5 doit se trouver au dernier chiffre 5 de la seconde tranche. Quand on dit que le double produit du premier chiffre par le second doit se trouver au premier chiffre de la seconde tranche & que le quarré du second chiffre doit se trouver au dernier chiffre de la même seconde tranche , cela doit s'entendre du dernier chiffre à droite de ce produit , & du quarré de 5.

Si le nombre qu'on veut élever au quarré avoit plus

de deux chiffres , on prendroit de plus le double produit des deux premiers par le troisième avec le carré du troisième ; ensuite le double du produit des trois premiers par le quatrième avec le carré du quatrième & ainsi de suite , en avançant toujours d'un rang vers la droite chaque produit & chaque carré. De-là nous tirons la règle suivante : pour avoir la racine d'un nombre , partagez ce nombre en tranches , en commençant par la droite , de sorte que chaque tranche soit de deux chiffres , excepté la première à gauche qui ne sera que d'un seul chiffre ; lorsque le nombre des chiffres sera impair. Prenez le plus grand carré contenu dans la première tranche de la gauche , tirez-en la racine que vous écrirez à part ; élevez cette racine au carré , retranchez ce carré de la première tranche ; à côté du reste s'il y en a , ou à côté de 0 s'il n'y en a point , descendez la seconde tranche & prenez pour dividende le reste s'il y en a , joint au premier chiffre de la tranche abaissée , ou le premier chiffre seul de la tranche abaissée s'il n'y a aucun reste ; prenez pour diviseur le double de la racine trouvée ; écrivez le quotient à la racine ; multipliez le diviseur par le quotient ; ajoutez à ce produit , en avançant d'un rang vers la droite , le carré du quotient ; si la somme peut être soustraite de la tranche abaissée , jointe au reste s'il y en a , le chiffre trouvé est bon , si le contraire arrive , on diminuera le quotient successivement d'une unité & même on écrira 0 si en mettant 1 à la racine on ne peut faire la soustraction dont nous venons de parler. On s'y prendra de même pour les tranches suivantes , en prenant pour diviseur le double de la racine trouvée , & pour dividende le

le premier chiffre de la tranche abaissée, joint au reste s'il y en a, ou ce premier chiffre seul, s'il n'y a aucun reste.

Soit proposé d'extraire la racine quarrée du nombre 628. Ayant parragé ce nombre en tranches, comme nous venons de le dire; je vois par la table des quarrés que 4 est le plus grand quarré contenu dans 6, j'en prends la racine 2 que j'écris comme on le voit; élevant

6, 2 8	2 5 (3)
4	4 Divi-
2 2 8	seur.

2 au quarré, j'écris 4 sous 6; retranchant 4 de 6, il reste 2; à côté de ce reste j'abaisse la tranche suivante, je mets un point sous le premier chiffre de cette tranche, pour me rappeler que 22 est mon dividende, je prends pour diviseur le double 4 de la racine; divisant 22 par 4, j'écris 5 au quotient; je multiplie le diviseur par le quotient, le produit est 20, auquel je joins le quarré du quotient, en cette manière $20 + 5^2 = 225$, la somme 225 étant soustraite de 228, il reste 3, que j'écris comme on le voit; de sorte que la racine cherchée est 25, avec un reste 3, qui indique que le nombre proposé seroit un quarré exact, si on en ôtoit 3. Pour faire la preuve de cette opération, j'éleve 25 au quarré, j'ai 625, à ce nombre j'ajoute 3 & j'ai le nombre proposé 628.

On voit par là qu'on ne peut pas toujours extraire exactement les racines quarrées des nombres.

Par exemple, on ne peut pas extraire exactement les racines quarrées des nombres 2, 3, 5. De sorte que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ sont des quantités qu'on appelle *irrationnelles* ou *sourdes*. On peut cependant en approcher tant que l'on veut par le moyen des décimales, pour cela il faut ajouter au nombre proposé autant de fois deux zéro qu'on veut

avoir de décimales : ainsi , pour avoir la racine de 5 , à un centième près , j'ajoute 4 zeros à 5 , de la manière qu'on le voit ici : partageant ensuite le résultat en tranches , je prends la plus grande racine contenue dans la première tranche , je trouve que c'est 2 , que j'écris à la racine ; je retranche le carré 4 de 5 , il reste 1 , à côté duquel

5 , 00 , 00	2 . 23
4	4
1 00	44
84	
16 00	

je descends deux 0 , & prenant 10 pour dividende , & 4 pour diviseur , j'écris le quotient 2 à la racine ; retranchant ensuite le produit du diviseur par le quotient joint au carré du quotient (de la manière que nous l'avons déjà expliqué) du nombre 100 , il reste 16 ; à côté de ce nombre je descends 00 & j'ai 160 pour dividende & 44 pour diviseur. C'est pourquoi je divise 160 par 44 , en disant en 16 combien de fois 4 , je trouve qu'il y est quatre fois ; mais , parce que le produit du diviseur par le quotient joint au carré du quotient (de la manière qu'on l'a indiqué) ne peut se soustraire de 1600 , je diminue le quotient d'une unité ; la soustraction pouvant alors se faire , j'écris 3 au quotient ; mais parce qu'en ajoutant 0000 à la droite de 5 , j'ai multiplié 5 par 10000 , dont la racine est 100 , je dois avoir une racine cent fois plus petite que 223 ; je dois donc séparer 23 par un point pour avoir la véritable racine 2 . 23 , à un centième près.

Un nombre sourd , tel que $\sqrt{5}$ ne peut jamais avoir pour racine exacte une fraction quelconque.

Car soit $\frac{a}{d}$ la fraction cherchée , on aura $\sqrt{5} = \frac{a}{d}$, & en prenant les carrés on aura $5 = \frac{aa}{dd}$;

or cela est impossible , car la fraction $\frac{a}{d}$ étant réduite à ses moindres termes , ainsi que nous le supposons ici , les quantités a & d n'ont aucun diviseur commun ; mais il est visible que si a & d n'ont aucun diviseur commun , leurs quarrés a^2 & d^2 n'en auront pas non plus : donc si d ne peut pas diviser exactement a , d^2 ne divisera pas non plus exactement a^2 : donc $\frac{a^2}{d^2}$ ne peut être un nombre entier ; donc , &c. On prouveroit de même que $\frac{a}{b}$ étant une fraction irréductible $= \sqrt[3]{5}$, $\frac{a^3}{b^3}$ devroit être une fraction égale à 5 , ce qui ne peut être ; donc un nombre qui n'est pas une puissance parfaite d'un degré quelconque ne peut avoir aucune racine exacte du même degré exprimable en nombres.

Si on vouloit avoir le cube de 25 , on prendroit d'abord le quarré 625 de ce nombre & multipliant 625 par 25 , le résultat 15625 seroit le cube cherché. L'on trouveroit la même chose en prenant d'abord le cube du premier chiffre 2 qui est 8. En second lieu le triple produit du quarré du premier chiffre par le second 5. En troisième lieu le triple produit du premier chiffre par le quarré du second ; & enfin le cube du second.

8	Cube du premier chiffre 2
60	Triple produit de 4 par 5
150	Triple produit de 2 par 25.
125	Cube de 5

15625

Ayant soin d'avancer à chaque fois d'un rang vers

la droite ; faisant ensuite l'addition , on trouvera le même résultat que ci-dessus. S'il y avoit 3 chiffres au nombre proposé , on continueroit de même en regardant les deux premiers chiffres , comme n'en faisant qu'un ; de sorte qu'on prendroit de plus le triple produit du quarré des deux premiers par le troisième , le triple produit des deux premiers par le quarré du troisième , enfin le cube du troisième , & ainsi de suite pour un plus grand nombre de chiffres. Cela posé , si on partage ce nombre en tranches , en sorte que celle de la droite contienne trois chiffres , il est visible en premier lieu que le cube 8 du premier chiffre 2 est contenu dans la première tranche de la gauche ; en second

$$\begin{array}{r|l} 15,625 & 25 \\ \hline 8 & 12 \\ \hline 7625 & \end{array}$$

lieu , que le triple produit du quarré du premier par le second est contenu dans le premier chiffre 6 de la seconde tranche. Quand nous disons que le triple produit du quarré du premier chiffre par le second est contenu dans le premier chiffre 6 de la seconde tranche , nous entendons parler du dernier chiffre de la droite de ce produit.

Soit proposé maintenant de prendre la racine cubique de 15625. Ayant partagé ce nombre en tranches , comme nous venons de le dire , je vois par la table des cubes que 8 est le plus grand cube contenu dans la première tranche 15 , je prends donc la racine cubique de 8 qui est 2 ; j'écris 2 à la racine ; élevant 2 au cube , j'ai 8 que je soustrais de 15 , pour avoir le reste 7 , à côté duquel je descends la tranche suivante ; & mettant un point sous le premier chiffre 6 de cette tranche , je prends pour dividende le premier chiffre 6 de la tranche abaissée , joint au reste 7 de la précédente (s'il n'y avoit point

de reste , le seul chiffre 6 feroit le dividende) ; je prends 12 pour diviseur , c'est-à-dire , le triple du carré du premier terme de la racine , divisant 76 par 12 , le quotient est 6 ; mais le cube de 26 étant $17576 > 15625$, je ne puis le soustraire de ce dernier ; je diminue donc le quotient d'une unité & comme le cube de 25 est $= 15625$, quantité qui peut être soustraite du nombre proposé , j'écris 5 à la racine qui est 25. S'il y avoit une autre tranche , pour trouver le troisième chiffre , je prendrois pour diviseur le triple du carré de 25 & pour dividende le premier chiffre de la troisième tranche , joint au reste s'il y en avoit , élevant ensuite au cube les trois premiers chiffres de la racine , si le résultat pouvoit être soustrait des trois premières tranches , le chiffre trouvé seroit bon , sinon il faudroit diminuer successivement le quotient d'une unité , jusqu'à ce que la soustraction fût possible.

EXEMPLE SECOND. Soit le nombre 8,489,667 , dont on demande la racine cubique. On trouvera , en suivant la méthode indiquée , 204 pour racine , avec

$$\begin{array}{r|l}
 8,489,667 & 204 \\
 \hline
 & 12 \quad \text{Premier diviseur.} \\
 & \hline
 & 1200 \quad \text{Second diviseur.}
 \end{array}$$

un reste 3. Pour avoir une racine plus exacte , on ajoutera autant de fois trois zeros qu'on veut avoir de décimales , parce que le cube de 10 étant 1000 pour avoir des dixièmes , il faudra ajouter trois 0 , ou , ce qui revient au même , multiplier par 1000.

La racine cube d'une fraction se trouve en prenant la racine cubique du numérateur & celle de son dénominateur ; de même la racine carrée d'une

fraction se trouvera en prenant la racine quarrée de son numérateur aussi-bien que celle de son dénominateur; de sorte que la racine cubique de $\frac{2}{17}$ est $\frac{2}{17}$, la racine

quarrée de $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$, la racine cube de $\frac{8}{27}$ est $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$; la

racine quarrée de $\frac{3}{5}$ est $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Mais, si l'on veut avoir

un nombre au numérateur, on le pourra, en multipliant pour la racine quarrée, les deux termes de la fraction par le numérateur; mais on multipliera par le quarré du numérateur, s'il s'agit de la racine cube: ainsi la racine quarrée de $\frac{2}{3}$ est

$\frac{2}{\sqrt{3}}$; la racine cube de $\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{\sqrt[3]{12}}$. Si on vou-

loit avoir un nombre au dénominateur, on feroit du dénominateur le même usage que nous venons

de faire du numérateur: ainsi $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}}$ est =

$\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$ est = $\sqrt{\frac{6}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Si on vouloit faire

disparoître le radical $\sqrt{6}$, dans la fraction $\frac{\sqrt{6}}{3}$, on

le pourroit, en se contentant de prendre par approximation la racine de 6, ce qui feroit aisé à faire par le moyen des décimales, en suivant la méthode ci-dessus.

La racine cube de $\frac{a}{b}$ est $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$, ou parce

que

que $\frac{a}{b} = \frac{a^3}{aab}$, on aura $\frac{a}{\sqrt[3]{aab}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; la racine quarrée de $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}$, fera $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

39. Avant de passer plus loin, nous allons donner une méthode générale pour trouver une puissance quelconque d'une quantité algébrique.

LEMME I. *Tous les produits qui résultent d'un même nombre de lettres sont égaux entr'eux dans quelque ordre qu'on multiplie ces lettres.* Pour le démontrer, nous ferons usage de ce principe évident, que deux quantités donneront des produits égaux, laquelle des deux l'on prenne pour multiplicande : cela posé, je dis d'abord que $ab = ba$, par la même raison que $4 \times 3 = 3 \times 4 = 12$; donc les produits qui résultent de deux lettres a & b sont égaux dans quelque ordre qu'on multiplie ces lettres. En second lieu $cab = abc$; car $ab = ab$: donc en multipliant c par ab , & ab par c , les produits cab & abc seront évidemment égaux; donc le produit $abc = bac$; car, puisque $ab = ba$, $ab \times c$ est $= ba \times c$. De même $cab = abc = cba$, puisqu'en multipliant c par ab , on doit avoir le même résultat qu'en multipliant ab par c , ou c par ba , à cause de $ba = ab$: donc les produits abc , bac , cab , cba , sont égaux. Par la même raison $bca = acb$, puisque $ca = ac$ & qu'en multipliant ac par b , on doit avoir le même produit qu'en multipliant b par ca : donc les six produits abc , bac , cab , cba , bca , acb sont égaux entr'eux; car les deux derniers sont égaux entr'eux aussi-bien que les quatre premiers; mais il est visible que le cinquième est égal au quatrième; donc

les produits de trois lettres sont égaux dans quelque ordre qu'on multiplie ces lettres. On prouvera facilement par la même méthode que les produits de 4 lettres sont tous égaux, & ainsi de suite : donc, &c.

LEMME II. Deux lettres a & b peuvent recevoir deux arrangements différens ab & ba ; trois lettres a , b , c peuvent recevoir 2 fois 3 ou 6 arrangements différens, ce qui donnera les 6 arrangements suivans acb , abc , bac , bca , cab , cba . On voit aussi que quatre lettres recevront 6 fois 4, ou 24 arrangements différens ; car chacune d'elles étant mise la première, les trois autres recevront 6 arrangements différens, ce qui donnera 24 arrangements différens. De même 5 lettres recevront 24 fois 5 ou 120 arrangements différens ; &c. Mais tous ces produits seront égaux & non différens par le lemme précédent.

LEMME III. Un nombre m de lettres prises deux à deux, donnera un nombre $\frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2}$ de produits réellement différens ; prises trois à trois un nombre $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; prises quatre à quatre un nombre $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$; & ainsi de suite.

Puisque le nombre des lettres est m , chacune ne pourra être multipliée que par les autres, dont le nombre sera $m-1$; ainsi le nombre total des produits, en prenant les lettres deux à deux, sera $m \cdot (m-1)$; mais le nombre des produits réellement différens sera $\frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2}$; car, par exemple,

le nombre total des produits de trois lettres a , b , c prises deux à deux, sera $3 \times (3-1) = 6$, puisqu'on peut avoir ab , ac , ba , ca , bc , cb ;

mais, à cause de $ab = ba$, de $ac = ca$, de $bc = cb$, le nombre des produits réellement différens, n'est que la moitié du nombre total des produits : donc, &c. Pour avoir le nombre des produits, réellement différens, que peut donner un nombre m de lettres prises trois à trois, il faut remarquer que chacune ne peut être multipliée que par les produits des autres prises deux à deux, & que le nombre total des produits d'un nombre m de lettres prises deux à deux étant $m \cdot (m - 1)$, celui d'un nombre $m - 1$ de lettres sera $(m - 1) \cdot (m - 2)$: donc le nombre total des produits de ces lettres prises trois à trois sera $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2)$; mais, parce que trois lettres a, b, c fournissent six produits égaux (lemme précédent) le nombre trouvé est six fois trop grand : donc le nombre des produits réellement différens sera $\frac{m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Par un

raisonnement semblable on verra que le nombre total des produits de quatre lettres est $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3)$; mais, parce que quatre lettres (lemme précédent) donnent 24 produits égaux, le nombre des produits réellement différens sera 24 fois plus petit que le nombre total des produits ; donc il sera $\frac{m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. On verra de

même qu'en prenant les lettres cinq à cinq, le nombre des produits réellement différens sera $\frac{m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) \cdot (m - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ & ainsi de suite.

LEMME IV. Si on multiplie un nombre quelconque m de binomes, tels que $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, &c. dont le premier terme soit le même, le premier terme du produit sera x élevé à l'exposant m ,

sans autre coefficient que l'unité ; le second terme contiendra x élevé à un exposant moindre d'une unité, avec un coefficient égal à la somme des seconds termes (par coefficient on entend ici tout ce qui multiplie une puissance de x) ; le troisième terme renfermera x élevé à un exposant moindre d'une unité que le précédent , avec un coefficient égal à la somme des produits réellement différens que peuvent donner les lettres $a, b, c, \&c.$ combinées deux à deux. En général l'exposant de x ira toujours en diminuant d'une unité jusqu'au dernier terme dans lequel x ne se trouvera pas à cause de $x^0 = 1$ (28). A l'égard des coefficients , celui du premier terme sera $= 1$, celui du second sera la somme de toutes les lettres $a, b, c, \&c.$ celui du troisième la somme des produits réellement différens des mêmes lettres combinées deux à deux ; celui du quatrième la somme des produits réellement différens des lettres $a, b, c, \&c.$ prises trois à trois & ainsi de suite jusqu'au dernier terme qui contiendra seulement le produit de toutes les lettres $a, b, c, \&c.$ En effet $(x + a) \cdot (x + b)$ est $= x^2 + ax + ba$; $(x + a) \cdot (x + b) \cdot (x + d)$ est $+ bx$
 $= x^3 + ax^2 + abx + abd$; & ainsi des autres :
 $+ bx^2 + adx$
 $+ dx^2 + bdx$

donc en supposant $a = b = d$, ce dernier produit deviendra $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$, ce qui fait voir encore que les exposans de x vont en diminuant d'une unité d'un terme à l'autre : donc si la puissance est m , c'est-à-dire, si l'on a $(x + a)^m$, les exposans de x seront $m, m - 1, m - 2, \&c.$ A l'égard des coefficients , ils seront 1 pour le pre-

mier terme, $\frac{ma}{1}$ pour le second, $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2$ pour le troisième, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3$ pour le quatrième, & ainsi de suite. Cela suit de ce que nous venons de dire ; puisque pour avoir le coefficient du troisième terme, *par exemple*, il faut prendre le nombre des produits réellement différens d'un nombre m de lettres prises deux à deux ; mais en supposant chacune des lettres égale à a , chacun de ces produits fera $= a^2$; d'un autre côté le nombre de ces produits est $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$. Donc le coefficient du troisième terme sera $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2$; celui du quatrième sera $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3$; puisque chaque produit de trois lettres est dans ce cas $= a^3$, & ainsi des autres. Donc la formule générale du Binome $(x+a)^m$ sera $x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} a + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} a^2 + \&c.$ Lorsque $m = 1$, la suite finit au troisième terme, parce que $m-2 = 0$ doit multiplier tous les termes suivans ; en un mot la suite finit, lorsque le nombre négatif qui est joint à m est devenu $= m$.

Parce que x^{m-1} est $= \frac{x^m}{x}$, $x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2}$, $x^{m-3} = \frac{x^m}{x^3}$, &c. On peut transformer notre formule en cette autre $(x+a)^m = x^m + \frac{ma x^m}{x} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \times \frac{x^m a^2}{x^2} + \&c. = x^m (1 + m \frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{a^2}{x^2} + \&c.)$

+ &c.). De-là on tire la regle suivante , pour avoir la puissance m du Binome $x + a$. Ecrivez sur une premiere ligne les quantités

$$\frac{m}{1}, \quad \frac{m-1}{2}, \quad \frac{m-2}{3}, \quad \frac{m-3}{4}, \quad \&c.$$

$$1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{x^3}, \&c.$$

Et ayant écrit l'unité au-dessous , & à une place plus avancée vers la gauche , formez la suite inférieure par cette loi ; multipliez cette unité par le premier terme de la suite supérieure & par $\frac{a}{x}$ pour avoir le second terme de la suite inférieure ; multipliez ce second terme par le second de la suite supérieure & encore par $\frac{a}{x}$, vous aurez le troisième terme de la suite inférieure , & ainsi de suite ; multipliez enfin la suite inférieure par x^m , & vous aurez la puissance m de $x + a$, c'est-à-dire , que vous aurez $(x+a)^m$. Si on vouloit avoir $(x^3+a^2)^m$, au lieu de multiplier par $\frac{a}{x}$ on multiplieroit par $\frac{a^2}{x^3}$, & ensuite par x^3 . Supposons qu'on demande la troisième puissance de $x + a$, on aura $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ & $(x+a)^3 = x^3 \left(1 + \frac{3a}{x} + 3 \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right)$; & pour avoir la puissance m d'un trinome $c + b + d$, on fera $c = x$, & $b + d = a$; substituant dans la formule les valeurs de $x, x^2, \&c.$ de $a, a^2, \&c.$ on aura la puissance cherchée. La formule peut s'appliquer à un polinome quelconque , en supposant le premier terme du polinome $= x$ & la somme de tous les autres $= a$.
De-là il suit que , pour avoir la racine m de la

quantité $a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot (m-1)}{2} a^{m-2}b^2 \&c.$

Il faut d'abord prendre la racine m du premier terme a^m , cette racine est a ; l'ayant écrite à la racine,

$$\begin{array}{r|l} a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot (m-1)}{2} a^{m-2}b^2 + \&c. & a + b \\ \hline 0 & \\ - a^m & ma^{m-1} \end{array}$$

j'éleve a à la puissance m , pour soustraire a^m de la quantité proposée; prenant ensuite pour diviseur le produit de l'exposant m de la racine, par la puissance $m-1$ du premier terme a de la racine, je divise le terme affecté de a^{m-1} par ma^{m-1} , le quotient est $+b$ que j'écris à la racine; de sorte que la racine cherchée est $a + b$.

Lorsque la quantité proposée peut se réduire à un nombre $m+1$ de termes, en prenant pour un seul terme tous ceux qui contiennent la même puissance de a , & qu'elle n'en a qu'un affecté de a^m , tandis qu'elle en a plusieurs affectés de a^{m-1} ; l'on peut trouver tous les termes de la racine qui suivent le premier, en divisant de suite tous les termes affectés de a^{m-1} . Mais si l'on ne peut pas réduire la quantité proposée (que je suppose toujours contenir un seul terme affecté de a^m) à un nombre $m+1$ de termes, on ordonnera par rapport à la lettre a , & après avoir trouvé le premier terme a , on soustraira a^m de la quantité proposée, & divisant le terme suivant par ma^{m-1} ; l'on écrira le quotient à la racine. Elevant les deux premiers termes de cette racine à la puissance m , on soustraira le résultat de la quantité proposée; on continuera d'opérer en di-

vifant toujours le terme fuyant (c'est-à-dire celui qui contiendra le plus haut exposant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné) par le produit de l'exposant m multiplié par la puissance $m - 1$ de toute la racine trouvée, jusqu'à ce qu'il ne reste rien. S'il y avoit un reste qu'on ne pût plus diviser, de la manière que nous venons de le dire, ce feroit une marque que la quantité proposée n'est pas une puissance parfaite, dont on puisse extraire la racine exacte demandée.

Si l'on vouloit avoir la racine m d'un nombre, on le partageroit en tranches d'un nombre m de chiffres chacune, excepté la première tranche de la gauche, qui souvent en contiendra moins*. Prenant ensuite la racine m de cette première tranche, on l'écrira à la racine; on élèvera cette racine à la puissance m , pour soustraire le résultat de la première tranche. Abaisant ensuite la seconde tranche, à côté du reste, on prendra pour diviseur le produit de l'exposant m par la puissance $m - 1$ de la racine trouvée, on divisera par cette quantité le premier chiffre de la tranche abaissée joint au reste s'il y en a: on écrira le quotient à la racine; élevant ensuite à la puissance m toute la racine trouvée, on verra s'il est possible de retrancher le résultat des deux premières tranches; dans ce cas, le quotient trouvé est bon, sinon il faut le diminuer jusqu'à ce que la soustraction soit possible. On continuera de même en prenant pour diviseur le produit de m par la puissance $m - 1$ de toute la racine déjà trouvée & pour dividende le premier chiffre de la nouvelle tranche abaissée, joint au reste s'il y

* On suppose que le nombre est assez grand pour permettre ce partage.

en a. Si, après avoir opéré sur toutes les tranches, il y a un dernier reste, on pourra continuer l'opération par le moyen des décimales, en ajoutant autant de fois un nombre m de 0, qu'on veut avoir de décimales. Ce que nous venons de dire n'a aucune difficulté, après ce que nous avons déjà dit sur les racines quarrées & cubiques des nombres.

La formule du binome sert encore lorsque m est un nombre fractionnaire positif ou négatif, ou bien encore un nombre entier négatif. Pour le prouver, mettons d'abord $\frac{m}{n}$ à la place de m & notre formule

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} \text{ deviendra } (x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \left[1 + \frac{\frac{m}{n}}{1} \cdot \frac{a}{x} + \frac{\frac{m}{n}}{2} \cdot \left(\frac{\frac{m}{n}-1}{1} \right) \cdot \frac{a^2}{x^2} \&c. \right].$$

Supposons que la somme de tous les termes de la série, excepté le premier, soit égale à p pour avoir $p = \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m}{n} \times$

$$\left(\frac{\frac{m}{n}-1}{2} \right) \frac{a^2}{x^2} \&c. \text{ Ainsi l'on aura } (x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$$

$\times (1+p)$. Elevant les deux quantités à la puissance n ce qui se fait en multipliant leur exposant par n (36), & faisant attention que l'exposant de $1+p$ est 1 (car $1+p = (1+p)^1$), on aura $(x+a)^m = (x+a)^m = x^{\frac{m}{n} \cdot n} (1+p)^n = x^m (1+p)^n$. Or $(x+a)^m = x^m \left(1 + m \frac{a}{x} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^2}{x^2} \&c. \right)$

De même $x^m (1+p)^n$ est $= x^m \left(1 + np + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \times p^2 + \&c. \right)$; parce que les puissances $n, n-1, \&c.$ de 1 sont $= 1$. Si dans cette dernière quantité on

substitue les valeurs de p & de p^2 , en se bornant (pour simplifier) aux termes qui ne passent pas le quarré; on aura

$$p = \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$$

$$p^2 = \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$$

$$\text{donc } 1 + np + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} p^2 + \&c.$$

$$\text{deviendra } 1 + m \cdot \frac{a}{x} + \frac{m \cdot (m-1)}{2 \cdot n} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$$

$$+ \frac{m^2}{n} \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$$

$$\text{Or le multiplicateur de } \frac{a^2}{x^2} \text{ se réduit à } m \left(\frac{m-1}{2 \cdot n} + \frac{m \cdot n - m}{2 \cdot n} \right) = m \left(\frac{m \cdot n - m}{2 \cdot n} \right) = \frac{m \cdot (m-1)}{2}.$$

$$\text{En continuant, on trouveroit que le multiplicateur de } \frac{a^3}{x^3} \text{ se réduit à } \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ \& ainsi de}$$

$$\text{suite; donc } (1+p)^m \text{ est } = 1 + m \frac{a}{x} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^2}{x^2}$$

$$+ \&c. \text{ donc } x^m (1+p)^m = x^m \left(1 + m \frac{a}{x} + \right.$$

$$\left. + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c. \right) \text{ est } = (x+a)^m : \text{ donc,}$$

prenant la racine n de ces deux quantités égales,

$$\text{on aura } (x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \left(1 + m \frac{a}{x} + \&c. \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= x^{\frac{m}{n}} (1+p)^{\frac{1}{n}} \& (x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \left[1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} \right.$$

$$\left. + \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c. \right] \text{ Donc la formule aura}$$

lieu, lorsque l'exposant sera un nombre fractionnaire positif. Il en sera de même si l'exposant est un nombre fractionnaire négatif $-\frac{m}{n}$, c'est-à-dire,

qu'on aura $(x+a)^{-\frac{m}{n}} = x^{-\frac{m}{n}} (1 - \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \&c.)$, quantité que nous supposons $= S$, ce qui

$$\text{donnera } S = \frac{(x+a)^{-\frac{m}{n}}}{1} = \frac{1}{(x+a)^{\frac{m}{n}}} * ; \text{ or } S =$$

$(x+a)^{-\frac{m}{n}}$ étant multipliée par $(x+a)^{\frac{m}{n}}$ doit évidemment donner 1 ; multiplions donc S, ou sa va-

leur supposée $x^{-\frac{m}{n}} [1 - \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \frac{m^3}{n^3} \cdot \frac{a^3}{x^3} +$

$(\frac{m}{n} + 1) \cdot \frac{a^2}{x^2} - \&c.]$ par $(x+a)^{\frac{m}{n}}$, c'est-

à-dire, par $x^{\frac{m}{n}} [1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m^2}{n^2} \cdot (\frac{m}{n} + 1) \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.]$; & nous bornant, pour simplifier, aux

termes qui ne passent pas le quarré, nous aurons

$$\left. \begin{aligned} x^{\frac{m}{n}} - \frac{m}{n} \left[1 - \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m^2}{n^2} \cdot (\frac{m}{n} + 1) \cdot \frac{a^2}{x^2} - \&c. \right] \\ + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} - \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \frac{m^3}{n^3} \cdot \frac{a^3}{x^3} - \&c. \\ + \frac{m}{n} \cdot (\frac{m}{n} + 1) \cdot \frac{a^2}{x^2} - \&c. \end{aligned} \right\}$$

* Voyez la note du N^o. 28.

Si nous considérons attentivement ce résultat, nous trouverons que le multiplicateur de $\frac{a}{x}$ est $= 0$; il en est de même de celui de $\frac{a^2}{x^2}$; & en poussant plus loin le calcul, on verra facilement que tous les coefficients des puissances ultérieures de $\frac{a}{x}$ se réduisent à 0 : donc le produit que nous venons de trouver, est $= x^0 \times 1 = 1$: donc la formule réussit encore, lorsque l'exposant est un nombre fractionnaire négatif $-\frac{m}{n}$. Si l'on suppose le dénominateur $n = 1$, l'exposant deviendra $= -m$ c'est-à-dire, que la formule a encore lieu, lorsque l'exposant est un nombre entier négatif.

De ce que nous venons de dire, il suit que la puissance m du binôme $a + b$ est $(a + b)^m = (a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \&c. = a^m (1 + m \cdot \frac{b}{a} + \&c.)$, m étant un nombre quelconque positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

PROBLEME. Extraire la racine cubique du nombre 1001. Je partage ce nombre en deux parties telles, que la première soit le plus grand cube contenu dans 1001, c'est ici 1000, cube de 10, l'autre partie sera $= 1$; faisant ensuite $1000 = x$ & $a = 1$, $m = \frac{1}{3}$, j'aurai $(x + a)^{\frac{1}{3}} = (1000 + 1)^{\frac{1}{3}} = (1000)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(1000)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{9}(1000)^{-\frac{5}{3}} + \frac{1}{27} \times$

$(1000)^{\frac{1}{3}} - \&c. * = 10 \left[1 + \frac{1}{3} (0.001) - \&c. \right]$ Mais quoique ce ne soit qu'en prenant une infinité de termes qu'on peut avoir dans cet exemple la racine exacte cherchée ; cependant il est aisé de voir que les termes de la série décroissent si rapidement qu'on peut sans erreur sensible se contenter des quatre premiers , & dans les cas semblables l'approximation sera d'autant plus prompte , que la première partie du nombre ou de la quantité algébrique , dont on veut avoir la racine , sera plus grande par rapport à l'autre. En effet $(a+b)^{\frac{1}{m}}$ est $= a^{\frac{1}{m}} \left(1 + \frac{1}{m} \frac{b}{a} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} + \&c. \right)$; or les termes de cette suite diminuent d'autant plus rapidement que a est plus grand que b . Les suites, dont les termes vont en diminuant, s'appellent *convergentes* : celles au contraire, dont les termes vont en augmentant, sont nommées *divergentes*, telle seroit (en supposant $a < b$) la série $1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \&c.$

Si on vouloit prendre la racine quarrée de 2 , on en chercheroit une racine approchée , en supposant , *par exemple* , cette racine $= 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$, dont le quarré $\frac{49}{36}$ est plus petit que 2 d'un $\frac{1}{36}$. C'est pourquoi on feroit $a = \frac{49}{36}$, $b = \frac{1}{36}$, $m = \frac{1}{2}$, & substituant ces valeurs dans $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 \&c.$ l'on auroit facilement la racine cherchée très-approchée de 2.

$* x^{m-1} a$ est ici $= x^{m-1} \times 1 = x^{m-1} = (1000)^{\frac{1}{3}-1}$
 $= (1000)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(1000)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1000)^2}} = \frac{1}{100} = 0.01.$

DES RAISONS ET PROPORTIONS.

40. Un *rapport*, ou une *raison*, est la manière d'être d'une grandeur par rapport à une autre grandeur de même espèce (car on ne peut pas comparer des quantités hétérogènes, ou d'espèce différente, comme 2 heures & 3 toises). Si l'on compare deux grandeurs 6 & 2 pour en connoître la différence, la raison est appelée *raison arithmétique*; mais si on cherche combien de fois la première grandeur 6 contient la seconde 2, le rapport est appelé *géométrique*. La première de deux grandeurs que l'on compare, s'appelle l'*antécédent*, & la seconde le *conséquent* de la raison. Il est aisé de voir que la valeur de la raison géométrique se trouve en divisant l'antécédent par le conséquent; puisque c'est par la division que l'on trouve combien de fois une grandeur contient l'autre. On pourroit prendre pour valeur de la raison géométrique le quotient du conséquent divisé par l'antécédent: ainsi que le font quelques Géomètres; mais il nous paroît bien plus commode de prendre pour la valeur de cette raison, le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent. La valeur de la raison arithmétique doit se trouver par la soustraction, opération par laquelle on trouve la différence de deux quantités. Quand on parle d'une raison, sans la spécifier, on entend toujours parler de la géométrique.

De ce que nous venons de dire, il suit que la raison de 6 à 2 est $= \frac{6}{2} = 3$, c'est-à-dire, que le quotient 3, qu'on appelle encore l'*exposant* de la raison, indique la manière dont l'antécédent contient le conséquent. On peut donc exprimer une raison géométrique par une fraction, dont le numérateur soit

l'antécédent, & le dénominateur le conséquent : de sorte que la raison de a à b s'exprime ainsi $\frac{a}{b}$, ou bien encore de cette manière $a : b$; mais la raison arithmétique de a à b s'exprime ainsi $a - b$.

On appelle *proportion* l'égalité de 2 raisons ; la proportion est géométrique, si ces raisons sont géométriques : elle est arithmétique, si les 2 raisons égales sont arithmétiques. Les raisons $12 : 6$, $4 : 2$, étant égales, formeront une proportion géométrique (en parlant d'une proportion, sans spécifier laquelle, on entend toujours parler de la géométrique) qu'on exprime ainsi $12 : 6 :: 4 : 2$, ou bien de cette autre manière $\frac{12}{6} = \frac{4}{2}$. Les deux raisons arithmétiques égales $7 - 2$, $6 - 1$ donnent une proportion arithmétique, qu'on écrit ainsi $7 - 2 : 6 - 1$. Pour exprimer dans le discours la proportion $a : b :: c : d$, on dit a est à b , comme c est à d ; mais, pour exprimer la proportion arithmétique $g - f : p - m$, on dit g est à f arithmétiquement, comme p est à m . Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent les *extrêmes*, le second & le troisième s'appellent les *moyens*. Si les deux moyens sont les mêmes, comme dans la proportion $12 : 6 :: 6 : 3$, la proportion est dite *continue* ; on l'exprime ainsi $\div 12 : 6 : 3$. Si la proportion continue a plus de trois termes, elle prend le nom de *progression* : telle est la suite $\div 16 : 8 : 4 : 2 : 1$, qui donne une progression géométrique, ou bien la suite $\div 12 : 10 : 8 : 6 : 4 : 2 : 0$, qui forme une progression arithmétique. La raison s'appelle *double*, lorsque l'antécédent contient deux fois le conséquent ; *triple*, s'il le contient trois fois ; &c. *sous-double*, *sous-triple*, &c. Si l'antécédent ne con-

tient que la moitié , ou le tiers, &c. du conséquent; *sesquialtere* , lorsque l'antécédent contient une fois & demi le conséquent , telle est la raison de 6 : 4 ; raison d'égalité si l'antécédent est égal , raison d'inégalité si l'antécédent n'est pas égal au conséquent. On dit que trois nombres 6 , 4 , 3 sont en proportion harmonique, lorsque le premier est au troisième , comme la différence du premier au second à la différence du second au troisième ; de manière que l'on ait $6 : 3 :: 6 - 4 : 4 - 3$, ou $6 : 3 :: 2 : 1$.

LEMME. Le produit du conséquent d'une raison par l'exposant de la raison , est égal à l'antécédent. Car l'antécédent est le dividende , le conséquent le diviseur & l'exposant le quotient ; or le produit du diviseur par le quotient est toujours égal au dividende : donc, &c.

COROLLAIRE. Si la raison $\frac{a}{b}$ est $= q$, on aura $a = bq$; de même si $\frac{c}{d} = q$, l'on aura $c = dq$.

41. THÉOREME I. FONDAMENTAL. Dans toute proportion géométrique $a : b :: c : d$, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Soit la raison $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$: donc par le corollaire précédent $a = bq$, & $c = dq$: donc en mettant dans la proportion précédente bq à la place de a & dq à la place de c on aura la proportion $bq : b :: dq : d$, dans laquelle le produit des extrêmes $bqd = bdq$, produit des moyens ; de même dans la proportion $6 : 3 :: 8 : 4$ on a $6 \times 4 = 3 \times 8 = 24$.

42. THÉOREME II. Si quatre grandeurs ap , a , bp , b , sont telles que le produit des extrêmes ap . b soit égal

égal

égal au produit des deux moyennes $a \cdot bp$, ces quatre grandeurs seront proportionnelles. Car si $ap \times b$ est $= a \times bp$, on aura $\frac{ap}{a} = \frac{bp}{b}$, ou $ap : a :: bp : b$; puisque l'exposant de la première raison est $= p$, aussi-bien que celui de la seconde.

COROLLAIRE. Donc, si on a deux produits égaux, tels que $adb = abd$, les racines de l'un des produits (on entend ici, par racines, les quantités de la multiplication desquelles résulte le produit) seront les extrêmes d'une proportion, dont les racines de l'autre produit seront les moyens, ou ce qui revient au même, les racines de l'un des produits seront *réci-proques* à celle de l'autre, c'est-à-dire, que l'on aura ad racine du premier produit, est à a racine du second, comme bd , autre racine du second, est à b , seconde racine du premier produit.

On dit que deux quantités sont *réci-proquement* comme deux autres quantités, ou sont en *raison inverse* des deux autres, lorsque, pour trouver la proportion, il faut renverser l'ordre des deux dernières, ou celui des deux premières. Ainsi 6 & 3 sont en raison inverse de 1 & 2 : car, pour faire la proportion, en laissant les premières quantités dans l'état qu'elles sont, il faut, au lieu de la raison de 1 : 2, prendre celle de 2 : 1, en disant 6 : 3 :: 2 : 1.

COROLLAIRE. Il suit du premier théorème que, dans une proportion continue $\div a : b : c$, le produit des extrêmes est égal au carré du moyen terme, c'est-à-dire, que $ac = b^2$. En effet la proportion précédente est la même que celle-ci $a : b :: b : c$; or (41) ac est $= bb$; donc &c. De même dans la proportion continue $\div 18 : 6 : 2$, on a $18 \times 2 = 36 = 6^2 = 6 \times 6 = 36$.

COROLLAIRE. Si l'on a la proportion $a : b :: c : d$, on pourra multiplier ou diviser par une même quantité, les conséquens ou les antécédens, ou même les 2 termes de la première ou de la seconde raison, sans détruire la proportion, je veux dire, sans qu'on cesse d'avoir une proportion; car les raisons de la proportion qui résultera de ces opérations, ne seront pas toujours égales à celle de la première proportion. Si donc on a la proportion $a : b :: c : d$, on aura

$$\text{I. } am : b :: cm : d \quad \frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d \cdot \text{IV}$$

$$\text{II. } am : bm :: c : d \quad a : bm :: c : dm \cdot \text{V}$$

$$\text{III. } \frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: c : d \quad a : \frac{b}{m} :: c : \frac{d}{m} \cdot \text{VI}$$

car dans toutes ces proportions le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. En effet, pour la première, seconde & cinquième on a $adm = bcm$, & pour les autres $\frac{ad}{m} = \frac{cb}{m}$; or cela est évident, car, puisque $a : b :: c : d$, on a $ad = bc$; donc $ab \times m = bc \times m$, & $\frac{ad}{m} = \frac{cb}{m}$.

COROLLAIRE. Donc si l'on a la proportion $a : b :: c : d$, on pourra faire les changemens suivans, sans qu'il cesse d'y avoir proportion; c'est-à-dire, que si l'on a la proportion $a : b :: c : d$, on aura

Alternando. $a : c :: b : d$

Invertendo. $b : a :: d : c$

$$a + b : b :: c + d : d$$

$$a + a : b :: c + c : d$$

Componendo.

$$a : a + b :: c : c + d$$

$$a : b + b :: c : d + d$$

Dividendo;

ou

Subtrahendo.

$$a - b : b :: c - d : d$$

$$a : a - b :: c : c - d$$

En effet dans ces proportions le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, ainsi que nous le verrons bientôt. Il est bon de retenir le nom de ces changemens.

Il est facile de voir que le changement appelé *alternando* consiste à faire changer de place aux moyens; mais dans le changement *invertendo* on met les antécédens à la place des conséquens. Dans le changement *componendo* on compare la somme de l'antécédent & du conséquent de chaque raison à son conséquent, ou l'antécédent à cette même somme, ou bien on double les antécédens ou les conséquens. J'appelle *dividendo* ou *subtrahendo* le changement dans lequel on compare la différence de l'antécédent & du conséquent au conséquent, ou bien dans lequel on compare l'antécédent à la différence dont on vient de parler.

Ces changemens ne détruisent pas la proportion, parce que le produit des extrêmes reste toujours égal à celui des moyens: en effet la proportion $a : b :: c : d$ donne $ad = bc$, & la proportion du changement *alternando* donne $ad = cb$; or il est visible que $bc = cb$; mais la proportion du changement *invertendo* donne $bc = ad$. La première proportion du changement *componendo* donne $ad + bd = bc + bd$, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens; mais $bd = bd$ & $ad = bc$: donc ces deux produits sont aussi égaux. La troisième proportion du même changement doit donner $ac + ad = ac + bc$; or cela est évident, parce que $ad = bc$.

La seconde & la quatrième doivent donner $2ad = 2bc$; ce qui est encore évident, puisque $ad = bc$. La première proportion du changement *dividendo* doit donner, si elle est vraie, $ad - bd = bc - bd$. Mais puisque $ad = bc$, ces produits sont évidemment égaux. La seconde proportion du même changement doit donner $ac - ad = ac - bc$: or ces produits sont égaux, puisqu'on ne fait que retrancher deux quantités égales ad & bc de la même quantité ac : donc ces changemens ne détruisent pas la proportion. Cependant, si l'on a la proportion $24 : 12 :: 6 : 3$, le changement *alternando* donnera $24 : 6 :: 12 : 3$ qui est différente de la première, puisque la raison de $24 : 6$ est $= 4$, & que celle de $24 : 12$ est seulement $= 2$. Ainsi les changemens dont on vient de parler peuvent changer une proportion en une autre ; mais il restera toujours une proportion.

43. THÉOREME III. Si deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{d}$ ont un même numérateur & différens dénominateurs, elles seront en raison inverse de leurs dénominateurs, c'est-à-dire, que la première sera à la seconde, comme le dénominateur de la seconde à celui de la première, de sorte que l'on aura $\frac{a}{b} : \frac{a}{d} :: d : b$. Cette proportion est vraie ; car le produit des extrêmes $\frac{ab}{b} = a$, est égal à celui des moyens $\frac{ad}{d} = a$.

Si les dénominateurs étoient les mêmes & les numérateurs différens, les fractions seroient entre elles comme leurs numérateurs ; car $\frac{a}{d} : \frac{c}{d} :: a : c$;

puisque le produit des extrêmes $\frac{ac}{d}$ est $= \frac{ca}{d}$, produit des moyens.

COROLLAIRE. Donc les fractions sont en raison inverse des dénominateurs & en raison directe des numérateurs.

COROLLAIRE. Donc deux grandeurs *en raison réciproque* l'une de l'autre, c'est-à-dire, dont l'une croît dans le même rapport que l'autre décroît, peuvent se mettre en raison directe, en les mettant au dénominateur d'une fraction, dont l'unité seroit le numérateur : ainsi $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} :: b : a$.

Avant de passer plus loin, nous allons expliquer ce qu'on entend par une *raison composée*. Une raison composée est celle qui résulte de la multiplication de plusieurs raisons, antécédent par antécédent & conséquent par conséquent : ainsi $\frac{ac}{bd}$ est

une *raison composée* des deux raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. En effet

soit $\frac{a}{b} = q$, $\frac{c}{d} = p$; donc (40) $a = bq$, $c = dp$: ainsi en substituant ces valeurs à la place de a & de c , on aura $\frac{ac}{bd} = \frac{bdpq}{bd} = pq$, produit des deux rai-

sons ; de sorte que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$, l'on aura $\frac{ac}{bd} = q^2$. Lorsqu'il y a deux raisons composantes égales, la raison composée est dite *doublée* ; *triplée* s'il y a trois raisons composantes égales ; *quadruplée*, *quintuplée*, *sextuplée*, &c. s'il y a quatre, cinq, six, &c. raisons composantes égales.

COROLLAIRE. Donc les carrés sont en raison

ait $a : x :: x : b$. On aura donc $ab = xx = x^2$, & en prenant la racine quarrée, $\sqrt{ab} = x$, c'est-à-dire, que la racine quarrée du produit de deux grandeurs est moyenne proportionnelle entre ces grandeurs. Si $a = 2$ & $b = 8$, on aura $x = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$.

49. PROBLEME. *Trouver un terme d'une proportion, dont on connoît les trois autres.* Soit la proportion $a : b :: c : x$, dans laquelle on connoît les trois premiers termes. Pour avoir la valeur du quatrième x , je remarque que le produit des extrêmes ax est $= bc$, produit des moyens : donc en divisant ces deux produits égaux par la même quantité a , j'aurai $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$, ou $x = \frac{bc}{a}$, c'est-à-dire, que le quatrième terme d'une proportion est égal au produit des moyens divisé par le premier extrême. Si $b = c$, c'est-à-dire, si la proportion est continue, on aura $x = \frac{b^2}{a}$: donc pour avoir le troisième

me terme d'une proportion continue, on divisera le quarré du moyen terme par le premier extrême.

Si le terme x cherché étoit un des moyens, si l'on avoit, par exemple, $a : b :: x : d$, on auroit $ad = bx$; & en divisant de part & d'autre par b l'on trouveroit $x = \frac{ad}{b}$, c'est-à-dire, que le moyen cherché seroit égal au produit des extrêmes, divisé par le moyen connu.

REMARQUE. Lorsqu'on a une fraction $\frac{ad}{b}$, on peut toujours faire une proportion, en prenant pour premier extrême le dénominateur de la fraction, & pour moyens les facteurs du numéra-

teur : car $b : a :: d : \frac{ad}{b} = x$. De même de la fraction $\frac{c}{d} = \frac{ax}{d}$ l'on tire $2 : 3 :: 2 : \frac{c}{d} = 3$. La fraction $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2}$ donne $2 : 1 :: 1 : \frac{1}{2}$.

Le problème qu'on vient de résoudre, renferme la règle *de trois*, qu'on appelle aussi *règle d'or*, à cause de sa grande utilité : c'est la méthode de trouver un terme d'une proportion dont on connoît les trois autres.

EXEMPLE. Trente Grenadiers ont fait 24 toises de tranchée, combien en feront 50 Grenadiers dans un tems égal. Il est évident que, plus il y a d'hommes, plus ils doivent faire d'ouvrage dans le même tems : ainsi l'on doit dire 30 Grenadiers sont à 50 Grenadiers, comme les 24 toises faites par les premiers, au nombre de toises que feront les derniers dans le même tems ; ou $30^s : 50^s :: 24^t : x^t$: donc il faut, pour avoir la valeur de x , multiplier 50 par 24, & diviser le produit 1200 par 30, pour avoir $x = \frac{1200}{30} = 40$; c'est-à-dire, que dans le même tems, ou dans un tems égal, 50 Grenadiers feront 40 toises de tranchée, en supposant que 30 en ont fait 24.

Lorsque les termes *homogènes*, c'est-à-dire, de même espèce dans la première raison, sont entr'eux comme ceux de la seconde & qu'il n'y a que trois termes de connus, la règle de trois s'appelle *directe simple* ; s'il y a plus de trois termes connus, c'est alors la règle de trois *composée*. Il faut dans ce cas la réduire à trois termes connus & un inconnu.

EXEMPLE. Trois hommes en travaillant sept heures par jour, ont fait en deux jours 84 toises d'un ouvrage, combien en feront 5 hommes en trois jours, en travaillant quatre heures par jour. Arran-

gez les termes comme vous le voyez; multipliez ;

$$\begin{array}{l} 3^b \quad : 5^b \\ 2^{\text{jours.}} : 3^{\text{jours.}} :: 84 : x \\ 7^{\text{heures.}} : 4^{\text{heures.}} \end{array}$$

$$42 : 60 :: 84 : x = \frac{60 \times 84}{42} = 120$$

par 2 & par 7, pour avoir 42 ; multipliez 5 par 3 & par 4, pour avoir 60 : faites ensuite la proportion $42 : 60 :: 84 : x = 120$: donc le nombre cherché est 120. La raison de ce procédé est fort simple, c'est que trois hommes, qui travaillent pendant deux jours & sept heures par jour, font le même ouvrage qu'un seul homme qui travailleroit pendant 42 heures ; de même cinq hommes qui travaillent pendant 3 jours & 4 heures par jour font le même travail qu'un seul homme qui travailleroit pendant 60 heures ; de sorte que le travail de ces hommes est en raison composée du nombre des hommes, du nombre des jours & des heures que ces hommes travaillent.

Lorsque les deux derniers termes ne sont pas entr'eux comme les deux premiers, c'est alors la *regle de trois inverse*.

EXEMPLE. Quatre hommes ont fait un ouvrage en trois jours ; en combien de jours cinq hommes feront-ils le même ouvrage ? Il est évident qu'on ne peut pas dire $4^b : 5^b :: 3^j : x$, autrement le terme cherché x seroit plus grand que 3, comme 5 est plus grand que 4 ; or cela ne peut être, parce que cinq hommes emploieront moins de tems au même ouvrage que quatre hommes. Et parce que le tems employé par 4 hommes, est au tems employé par 5 hommes, comme x est à 3, à cause que

plus il y a d'hommes, moins il faudra de tems, on doit faire $4^b : 5^b :: x : 3$; donc l'on aura $5x = 12$, & $x = \frac{12}{5} = 2$ jours $+\frac{2}{5}$ de jour $= 2$ jours 9 heures 36 minutes.

Question qui renferme ce qu'on appelle la regle de compagnie. Trois marchands ont fait un fond de 1200 liv. sur lequel ils ont gagné 240 liv. combien revient-il au premier, dont la mise est de 200 liv. au second, dont la mise est de 400 liv. & au troisième, dont la mise est de 600 livres ? Ce problème se résout par autant de regles de trois, qu'il y a de mises, en disant le fond total est au gain total, comme la mise d'un chacun est au gain qui lui revient : de sorte que l'on aura ces trois proportions

Gain

$$1200 : 240 :: 200 : x = 40 \text{ du premier.}$$

$$1200 : 240 :: 400 : x = 80 \text{ du second.}$$

$$1200 : 240 :: 600 : x = 120 \text{ du troisième.}$$

AUTRE EXEMPLE. Trois marchands, Pierre, Jacques & Paul, ont mis en commerce, le premier 357 liv. pour quinze mois ; le second 1071 liv. pour trois mois ; le troisième 153 liv. pour neuf mois : le gain total est de 9631 liv. Quel est le gain d'un chacun ? Multipliez la mise d'un chacun par le tems que cette mise a resté dans le commerce, parce que plus la mise est grande & plus le tems qu'elle reste dans le commerce est considérable, plus le gain à proportion doit être grand : prenez la somme des produits, que vous considérerez comme la mise totale, faites ensuite comme cette somme est au gain total : ainsi le produit de chaque mise, par le tems qu'elle a resté dans le commerce, est au gain correspondant.

PROBLEME qui renferme la regle d'escompte. Pierre achete à Jacques , à un an de terme , pour 1000 liv. de marchandises ; Jacques offre à Pierre de lui remettre 10 pour 100 , s'il veut le payer comptant : on demande le gain de Pierre ? Il paroît d'abord que le marchand ne doit recevoir comptant que 900 livres ; mais il faut remarquer que la somme que recevra actuellement le marchand , doit à 10 pour 100 rendre 1000 liv. au bout de l'année (en comprenant ensemble le capital & ses intérêts) : ainsi il faut dire $100 - 10 : 100 :: 1000 \text{ l.} : x = 909 \text{ l. } 1 \text{ f. } 9 \text{ d. } \frac{2}{11}$; de sorte que le profit de Pierre sera seulement de 90 liv. 18 f. 2 d. $\frac{2}{11}$. Si Jacques ne recevoit comptant que 900 liv. cet argent à 10 pour 100 ne lui donneroit au bout de l'an que 990 liv. : ainsi son sort seroit plus heureux d'attendre les 1000 liv. au bout de l'année. Cette pratique est celle de le Gendre & de Savari. Disons quelque chose de la regle de fausse position.

La regle de *fausse position* consiste à mettre à la place des termes inconnus d'autres termes à volonté , mais cependant proportionnels à ces termes inconnus , afin de trouver ces termes par des regles de trois.

EXEMPLE I. On propose de partager 1300 liv. entre Pierre , Jean & Jacques , en sorte que Pierre ait cinq fois plus que Jean & Jean deux fois plus que Jacques. Soit supposé 1 la part de Jacques , celle de Jean sera 2 & celle de Pierre 10 , la somme seroit 13 : ainsi on dira si 13 donnent 10 pour Pierre , combien donneront 1300 pour le même Pierre , & ainsi des autres. On aura donc ces trois regles de trois.

Part de

$$13 : 1300 :: 10 : x = 1000 \quad \text{Pierre}$$

$$13 : 1300 :: 2 : x = 200 \quad \text{Jean}$$

$$13 : 1300 :: 1 : x = 100 \quad \text{Jacques.}$$

EXEMPLE II. Soit proposé de partager 173 liv. à trois personnes, de manière que la seconde ait le double de la première & 10 l. de plus, & que la troisième ait autant que les deux autres & 3 liv. de plus. Supposons que la part de la première soit 1 liv. celle de la seconde, dans cette hypothèse, feroit 2 l. + 10 l. = 12 l. & celle de la troisième feroit 13 liv. + 3 liv. = 16 liv. La somme de ces parties feroit = 29 liv. S'il n'eût été question que de partager en parties proportionnelles à 1 liv., 2 liv., 3 liv. La première part feroit 1 l. la seconde 2 liv. la troisième 3 liv. la totalité feroit 6 liv. dont la différence avec 29 liv. est 23 liv. qu'il faut prélever sur la somme proposée 173 liv. & partager le reste 150 liv. en parties proportionnelles à 1 liv. 2 liv. 3 liv. On aura donc cette règle de trois $6 : 1 :: 150 : x = 25$ liv. première partie ; doublant cette partie, & ajoutant 10 liv. on aura 60 liv. pour la seconde partie ; ajoutant ces deux parties avec 3 liv. on aura 88 liv. pour la troisième partie : en effet ces trois parties font 173 liv. Ce second exemple renferme la règles de deux *fausses positions*.

DES PROGRESSIONS GEOMETRIQUES.

50. Nous supposerons pour plus de facilité, premièrement que les progressions sont croissantes; secondement que le quotient du premier terme divisé

deurs), on aura $Sap - apx + apx - Sa = Sa + apx - Sa - a^2$, ou (en réduisant) $Sap - Sa = apx - a^2$, divisant ces deux dernières quantités par a , l'on aura les quotiens égaux $Sp - S = px - a$, & divisant encore par $p - 1$, on a $S = \frac{px - a}{p - 1}$, c'est-à-dire, que la somme de tous les termes d'une progression croissante, est égale au produit du plus grand terme par l'exposant de la progression, moins le plus petit terme, le tout divisé par l'exposant, diminué d'une unité.

COROLLAIRE. Donc la somme

fera

Des moitiés.....: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$0 = 1.

Celle des tiers.....: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$0 = $\frac{1}{2}$.

Celle des quarts.....: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$0 = $\frac{1}{3}$.

Celle des dixièmes.....: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$0 = $\frac{1}{9}$.

Car, en regardant le premier terme comme le dernier, 0 sera le premier terme, p fera 2 dans la première progression, 3 dans la seconde, 4 dans la troisième, 10 dans la quatrième: donc pour la première

$$\frac{px - a}{p - 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 0}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1; \text{ pour la seconde}$$

$$\frac{px - a}{p - 1} = \frac{3 \times \frac{1}{3} - 0}{3 - 1} = \frac{1}{2}; \text{ pour la troisième}$$

$$\frac{px - a}{p - 1} = \frac{4 \times \frac{1}{4} - 0}{4 - 1} = \frac{1}{3}; \text{ \& pour la quatrième } \frac{px - a}{p - 1} = \frac{1}{9} \text{ \&}$$

ainsi de suite. On trouvera donc la somme de toutes parties quelconques de l'unité, dont la suite sera une progression géométrique, en retranchant l'unité du dénominateur du premier terme de la suite.

54. THÉOREME XI. Dans une progression géométrique

trique $\div\div a : ap : ap^2 : ap^3 \&c.$ Premièrement les sommes ; secondement les différences ; troisièmement les produits des termes immédiatement consécutifs sont en progression géométrique. Car on a

$$\div\div a + ap + ap^2 : ap^2 + ap^3 \&c.,$$

$$\div\div a - ap : ap - ap^2 : ap^2 - ap^3 \&c.$$

$$\div\div a^2 p^2 : a^2 p^3 : a^2 p^4 \&c.$$

Ce qui est évident ; car chacun des termes de ces suites, est égal à celui qui le précède immédiatement, divisé par $\frac{1}{p}$.

55. THEOREME XII. Dans une progression géométrique les puissances de même nom sont en progression. Soit toujours la progression $\div\div a : ap : ap^2 : ap^3 \&c.$ je dis que l'on aura la progression $\div\div a^m : a^m p^m : a^m p^{2m} : a^m p^{3m} \&c.$ Ce qui est évident, car chaque terme est égal à celui qui les précède, divisé par $\frac{1}{p^m}$. Si on suppose $m = \frac{1}{2}$, on aura $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}} p \&c.$, c'est-à-dire, que les racines quarrées des termes consécutifs sont en progression, & il en est de même des racines cubes & autres quelconques.

56. THEOREME XIII. Dans une progression géométrique, le premier terme est au troisième, comme le quarré du premier au quarré du second ; le premier est au quatrième, comme le cube du premier au cube du second. Car $a^2 : a^2 p^2 :: a : ap^2$; puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. De même $a^3 : a^3 p^3 :: a : ap^3$; car le produit des extrêmes est encore égal à celui des moyens. En général le premier terme est à un terme quelconque du rang n , comme la puissance $n-1$ du premier terme à la puissance $n-1$ du second terme. En effet le terme du rang n est $= ap^{n-1}$ (51) ; or $a :$

$ap^{n-1} :: a^{n-1} : a^{n-1} p^{n-1}$: car le produit des extrêmes à $p^{n-1} = a^n p^{n-1}$, produit des moyens.

COROLLAIRE. Donc la raison du premier terme au troisième est doublée, & la raison du premier terme au quatrième est triplée de la raison du premier au second, puisque $\frac{a}{ap^2} = \frac{a^2}{a^2 p^2}$, & que $\frac{a}{ap^3} = \frac{a^3}{a^3 p^3}$.

57. PROBLEME. Trouver deux moyens proportionnels x, y , entre deux quantités données a & d , c'est-à-dire, qu'ayant la progression $:: a : x : y : d$; on cherche la valeur de x & de y . Par le théorème précédent on a $a^3 : x^3 :: a : d$; donc $a^3 d = x^3 a$, & en divisant le tout par a , il vient $a^2 d = x^3$, & en prenant la racine cubique, on a $x = \sqrt[3]{a^2 d}$, c'est-à-dire, que pour avoir la première moyenne proportionnelle, il faut extraire la racine cube du produit du carré de la première quantité donnée a par la seconde d . Pour avoir y ou la seconde moyenne proportionnelle, on divisera le carré x^2 de la première par la première quantité a , parce que la proportion continue $a : x :: x : y$, donne $y = \frac{x^2}{a}$. Si $a = 2$ & $d = 16$, on aura $x = \sqrt[3]{4 \times 16} = \sqrt[3]{64} = 4$, & $y = 8$. Mais si la quantité $a^2 d$ n'étoit pas un cube parfait, on ne pourroit avoir qu'une valeur approchée de x & de y : on pourroit pour cela se servir du calcul décimal.

58. PROBLEME. Insérer un nombre m de moyens proportionnels géométriques entre deux termes a & b . Soit x le premier moyen proportionnel cherché; puisque le nombre de tous les termes, en y com-

prenant a & b doit être $m + 1$. On aura par le théorème précédent $a : b :: a^{m+1} : x^{m+1}$, & par conséquent $ax^{m+1} = ba^{m+1}$. Divisant de part & d'autre par a , il vient $x^{m+1} = ba^m$; donc en prenant la

racine $m + 1$, $x = \sqrt[m+1]{ba^m} = b^{\frac{1}{m+1}} a^{\frac{m}{m+1}}$, que je

suppose $= c$. Le premier moyen proportionnel étant trouvé, pour avoir le second, on divisera le carré du premier par la quantité a , ou ce qui revient au même, on multipliera le second par le dénominateur du quotient du premier terme a de la progression, divisé par le second terme c , de sorte que, si ce quotient est $\frac{1}{p}$, ce qui donnera dans ce

cas $c = ap$, on multipliera ap par p , pour avoir ap^2 , second moyen proportionnel; & en multipliant celui-ci par p , on aura le troisième, & ainsi de suite.

Mais, pour inférer un nombre quelconque m de moyens proportionnels entre deux termes d'une progression $\div a : aq : aq^2 \&c. = \div aq^0 : aq : aq^2 \&c.$ divisez la différence 1 qui regne entre les exposants 0, 1, 2, &c. de la quantité q (exposant de la progression) par $m + 1$, & vous aurez le premier moyen

proportionnel cherché, en ajoutant $\frac{1}{m+1}$ au premier exposant 0 (de q); ensuite pour avoir le second moyen proportionnel cherché, vous ajouterez encore $\frac{1}{m+1}$ à l'exposant de q dans le terme précédent,

& ainsi de suite. Si donc, $m = 2$, pour inférer deux proportionnels entre deux termes consécutifs de la progression ci-dessus, on fera $\div aq^0 : aq^{\frac{1}{3}} : aq^{\frac{2}{3}} :$

$aq^1 : aq^{\frac{4}{3}}$ &c. ce qui est évident, puisque chaque terme est égal à celui qui les précède, divisé par $\frac{1}{q^{\frac{1}{3}}}$.

§ 9. Avant de passer aux progressions arithmétiques, nous allons dire un mot de ce qu'on appelle les *exposans d'une raison*. Les *exposans d'une raison* sont les plus petits termes, qui aient entr'eux le même rapport que les termes de la raison dont ils sont les exposans. Par exemple, les exposans de la raison $\frac{1}{2}$ sont $\frac{1}{2}$, parce que 1 & 2 sont les plus petits termes qui aient entr'eux le même rapport que 3 & 6. De-là il suit que si l'on a deux ou plusieurs raisons égales, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = p$, le produit de ces raisons $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = p^2$, sera un nombre quarré, si p est un nombre; de même en supposant $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = p$, on aura $\frac{ace}{bdf} = \frac{a^3}{b^3} = p^3$, qui sera un nombre cube, si p est un nombre. Donc une raison composée de deux raisons égales, c'est-à-dire, une raison doublée sera exprimée par un nombre quarré, & une raison triplée par un nombre cube, si une des raisons composantes a pour valeur un nombre, ou, ce qui est la même chose, si l'une des raisons composantes a pour exposant des nombres; car la raison qui se trouve entre le quarré de l'antécédent & celui du conséquent d'une des raisons composantes égales, est égale à la raison qu'il y a entre le produit des antécédens, & celui des conséquens des raisons composantes égales; de même la raison qu'il y a entre le cube de l'antécédent & celui du

conséquent d'une des raisons composantes égales , est la même que la raison qu'ont entr'eux les produits des antécédens & des conséquens des trois raisons composantes, ainsi qu'il suit de ce que nous venons de dire : donc , si la raison $\frac{a^2}{b^2}$ est $= \frac{1}{3}$, la raison $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ fera $= \frac{a}{b}$; or $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ n'est pas un nombre, puisqu'il n'est pas possible d'exprimer un nombre sourd par un nombre (38) : donc la raison de 3 : 5 n'est pas doublée des raisons de nombre à nombre. de même faisant $\frac{a^3}{b^3} = \frac{2}{3}$, à cause que $\frac{2}{3}$ n'est pas un cube, la raison $\frac{a}{b}$ ou $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$, n'est pas triplée d'une raison de nombre à nombre ; ces sortes de raisons sont appelées *sourdes* : ainsi , en supposant $\frac{a^3}{b^3} = 2$, la raison $\frac{a}{b}$ sera sourde , parce que 2 qui est ici p^3 , en faisant $\frac{a^3}{b^3} = p^3$ & $\frac{a}{b} = p$, n'étant pas un nombre cube , p ou $\sqrt[3]{2}$ n'est pas un nombre. •

DES PROPORTIONS ET PROGRESSIONS ARITHMETIQUES.

60. La raison arithmétique qui se trouve entre deux grandeurs a & b n'étant autre chose que la différence qu'il y a entre ces deux grandeurs (40), il s'ensuit qu'en appelant d cette différence, la raison arithmétique de a & b fera $= a \cdot a \pm d$. Le signe $+$ a lieu lorsque l'antécédent est plus petit que son conséquent , & le signe $-$, lorsque l'antécédent est plus grand que son conséquent. La raison en est facile , lorsque le conséquent est plus grand que

l'antécédent de la quantité d , il doit être égal à cet antécédent, plus à la quantité d ; mais il doit être égal à cet antécédent moins la quantité d , s'il est plus petit de la même quantité d : ainsi dans la raison arithmétique de 6 à 4, le conséquent 4 est égal à l'antécédent 6, moins la différence 2; au contraire dans la raison de 4 à 6, le conséquent 6 est égal à l'antécédent 4 augmenté de la différence 2.

61. PROPOSITION FONDAMENTALE. Toute proportion arithmétique $a \cdot b : c \cdot f$ peut se représenter par cette formule $a \cdot a \pm d : c \cdot c \pm d$. Cela est évident, puisque la différence de c à f doit être la même que celle de a à b , autrement la première raison ne seroit pas égale à la seconde, & par conséquent il n'y auroit pas de proportion.

COROLLAIRE I. Donc la somme des extrêmes dans une proportion arithmétique est égale à la somme des moyens. En effet la somme des extrêmes $a + c \pm d = a \pm d + c$, somme des moyens. Si l'on a proportion continue $\div a \cdot b \cdot c$, la somme des extrêmes sera égale au double du moyen terme : en effet cette proportion revient à celle-ci $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d$, dans laquelle la somme des extrêmes $a + a \pm 2d = 2a \pm 2d$, double du moyen terme. De même dans les nombres, si l'on a $5 \cdot 2 : 6 \cdot 3$, on aura $5 + 3 = 6 + 2$; & si l'on a $\div 6 \cdot 4 \cdot 2$, l'on aura $6 + 2 = 4 + 4 = 8$.

COROLLAIRE II. Donc, pour trouver un moyen proportionnel arithmétique entre a & b , il faut prendre la moitié de la somme de a & de b . Car soit x ce terme cherché, l'on aura $\div a \cdot x \cdot b$, & $a + b = 2x$; donc $x = \frac{a+b}{2}$.

COROLLAIRE III. Pour connoître le quatrième

terme d'une proportion arithmétique, dont on connoît les trois autres, il faut de la somme des moyens ôter l'extrême connu; & si c'est un des • moyens qu'on cherche, l'on ôtera le moyen connu de la somme des extrêmes. Car soit x le terme cherché, on aura dans le premier cas $a : b : c : x$, & par la proposition précédente $a + x = b + c$: donc retranchant de part & d'autre la quantité a , on aura $x = b + c - a$. Dans le second cas on a la proportion $a : b : x : c$, ou $a : x : b : c$; mais $a + c = x + b$: donc $a + c - b = x + b - b = x$. Si c'étoit un troisième moyen proportionnel arithmétique qu'on demandât, l'on auroit $\div a : b : x$, & $a + x = 2b$, & par conséquent $x = 2b - a$.

COROLLAIRE IV. Toute progression arithmétique ascendante, (c'est-à-dire, dont les termes vont en croissant) $\div a : b : c : d : e$ &c. peut être représentée par cette formule $\div a : a + d : a + 2d : a + 3d : a + 4d$ &c. En effet il doit y avoir une même différence d entre le premier & le second terme, le second & le troisième, &c. sans quoi il n'y auroit point de progression; donc la différence d étant ajoutée à chaque terme, doit donner le terme suivant, puisque nous supposons la progression croissante: donc, &c.

COROLLAIRE V. Il suit du dernier corollaire qu'un terme quelconque d'une telle progression est égal au premier, plus la différence d multipliée par le nombre des termes précédens. En effet le quatrième terme, par exemple, est $= a + 3d$: donc appelant n le nombre total des termes, & le dernier terme, a le premier terme, l'on aura $x = a + d \times (n - 1)$, ou $x = a + nd - d$: ainsi, si le pre-

mier terme est 1, la différence 3 & le nombre des termes 5, l'on aura le cinquième terme $x = 1 + 15 - 3 = 13$.

COROLLAIRE VI. Donc pour insérer un nombre quelconque m de moyens proportionnels arithmétiques entre deux termes donnés, il faut diviser leur différence par $m + 1$, & le quotient sera la différence cherchée d , qui ajoutée au premier terme, donnera le second & ajoutée au second, donnera le troisième, &c. *Par exemple*, pour insérer trois moyens arithmétiques entre a & $a + 4d$, je divise la différence $4d$ par $m + 1 = 3 + 1 = 4$, le quotient d est la différence cherchée, qui, ajoutée au premier terme, donnera le second $a + d$, &c.

COROLLAIRE VII. Donc entre le premier extrême & un terme quelconque il y a la même différence, qu'entre un autre terme quelconque & le dernier extrême, pourvu que les 2 derniers termes soient autant éloignés l'un de l'autre, que les 2 premiers, ce qui fait que la somme des extrêmes est égale à la somme des deux termes, également éloignés de ces extrêmes, ou au double du terme du milieu, lorsque le nombre des termes est impair. En effet dans la progression $\div a \cdot a + d \cdot a + 2d \cdot a + 3d \cdot a + 4d$, l'on a $a \cdot a + d : a + 3d \cdot a + 4d$; or il est visible que la somme des extrêmes de cette progression, savoir, $2a + 4d$ est $= 2a + 4d$, somme des moyens $= 2a + 4d$ double du terme du milieu.

COROLLAIRE VIII. Donc en multipliant la somme des extrêmes par la moitié du nombre des termes, l'on aura la somme de tous les termes. Cela suit du corollaire précédent; puisque, quand le nombre des termes est pair, la progression contient autant

de fois la somme des extrêmes , qu'il y a de fois 2 termes ; mais quand le nombre des termes est impair, il faut ajouter la valeur du terme milieu, qui est égal à la moitié de la somme des extrêmes. C'est d'ailleurs ce qu'on voit aisément dans la progression $\div a \cdot a + d \cdot a + 2d \cdot a + 3d \cdot a + 4d$, dont la somme est égale à la somme des extrêmes $(2a + 4d) \times \frac{1}{2}$. En général , appellant S la somme de tous les termes , a le premier , x le dernier terme , n le nombre des termes d'une progression arithmétique , on aura $S = (a + x) \times \frac{n}{2} = \frac{na + nx}{2}$.

CORLLAIRE IX. Il suit de-là que si la progression arithmétique étoit celle des nombres naturels 1 , 2 , 4 , 5 , &c. & qu'elle commençât par l'unité , $S = \frac{na + nx}{2}$ feroit $S = \frac{x + x^2}{2} = \frac{n + n^2}{2}$; car alors $x = n$ & $a = 1$. Si la progression des nombres naturels commençoit par 0 , & qu'on eût 0 , 1 , 2 , 3 , &c. alors n feroit $= x + 1$ & $S = \frac{na + nx}{2}$, feroit $= \frac{0 + (x+1) \times x}{2} = \frac{x^2 + x}{2}$.

DES LOGARITHMES.

62. Dans une progression géométrique , dont les termes sont affectés d'exposans , ces exposans sont en progression arithmétique. *Par exemple* , si l'on a $\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5$ &c. A. Les exposans formeront la progression arithmétique $\div 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ &c. B. On appelle *Logarithmes* les termes d'une progression arithmétique, correspondant à ceux d'une progression géométrique : ainsi les termes de la progression B sont les logarithmes des termes correspondans de la pro-

gression A ; 3 , *par exemple* , est le logarithme de a^3 , 0 celui de $1 = a^0$.

De-là il suit , en se servant des progressions A & B , premièrement que pour avoir le logarithme du produit de deux quantités , il faut prendre la somme de leurs logarithmes ; *par exemple* , pour avoir le produit de a^2 par a^3 , j'ajoute ensemble le logarithme du multiplicande avec celui du multiplieateur , la somme 5 donne le logarithme du produit a^5 .

COROLLAIRE. Donc , pour multiplier deux nombres l'un par l'autre , il suffit de prendre la somme de leurs logarithmes. On voit aussi que pour diviser un nombre a^5 par un autre nombre a^3 , il suffit d'ôter le logarithme du diviseur de celui du dividende , la différence 2 sera le logarithme du quotient a^2 . Pour élever a^2 , *par exemple* , à une puissance quelconque , il faudroit multiplier l'exposant 2 de a par l'exposant de la puissance ; or il suffit de multiplier le logarithme de a^2 par l'exposant de la puissance , le produit donnera le logarithme de la puissance proposée ; de sorte que si c'est la troisième puissance , en multipliant 2 par 3 , on aura 6 , logarithme de a^6 , troisième puissance de a^2 .

Si l'on vouloit avoir la racine troisième de a^6 , on diviserait l'exposant 6 de a par l'exposant de la racine pour avoir l'exposant 2 de a^2 , racine troisième de a^6 ; or il suffit de diviser le logarithme de a^6 par l'exposant 3 de la racine troisième pour avoir le logarithme 2 de la racine cherchée a^2 .

COROLLAIRE. De ce que nous venons de dire il suit que pour avoir la racine d'un nombre quelconque , il faut diviser le logarithme de ce nombre

par l'exposant de la racine proposée, le résultat donnera le logarithme de la racine cherchée.

Pour faire une règle de trois directe par le moyen des logarithmes, ajoutez ensemble les logarithmes des moyens, retranchez de la somme le logarithme du premier extrême, & vous aurez le logarithme de l'extrême cherché. Ainsi, pour trouver le quatrième terme de cette proportion $a^1 : a^3 :: a^4 : x$, j'ajoute ensemble les logarithmes de a^3 , & de a^4 , de leur somme 7, je retranche le logarithme 1 du premier terme, le reste 6 est logarithme du quatrième terme cherché a^6 ; donc, pour trouver le quatrième terme de cette proportion $341 : 428 :: 5797 : x$, j'ajoute les logarithmes des moyens que je trouve dans les tables*.

2	•	631444	Log.	de	428
---	---	--------	------	----	-----

3	•	763203	Log.	de	5797
---	---	--------	------	----	------

6	•	394647	Somme		
---	---	--------	-------	--	--

2	•	532754	Log.	de	341
---	---	--------	------	----	-----

3	•	861893	Log.	de	$x = 7276$
---	---	--------	------	----	------------

de leur somme je soustrais le logarithme du premier terme, il me reste le logarithme du dernier terme. Cherchant ce logarithme dans les tables, je trouve à côté 7276, nombre cherché. Tout cela est fondé sur ce que, pour avoir le quatrième terme d'une proportion, dont on connoît les moyens & un des extrêmes, il faut diviser le produit des moyens par l'extrême connu. Si l'on connoissoit un moyen & les deux extrêmes, de la somme des logarithmes

* Les Tables sont des ouvrages, dans lesquels à côté d'un nombre on trouve son logarithme, & réciproquement : elles sont plus ou moins étendues. Je me suis servi dans cet exemple de celles de M. de la Caille.

des extrêmes on ôteroit le logarithme du moyen connu, & l'on auroit le logarithme du moyen cherché.

En supposant $a = 10$, nous aurons les progressions géométrique & arithmétique qu'on voit ici.

Prog. géom. des Tab.	Prog. arithm.
1	0 = 0.000000
10	1 = 1.000000
100	2 = 2.000000
1000	3 = 3.000000
10000	4 = 4.000000
&c.	&c. = &c.

Pour avoir les logarithmes des nombres 2, 3, 4, &c. qui se trouvent entre 1 & 10, & ceux des nombres qui se trouvent entre 10 & 100, &c. il faut prendre une puissance de 10 égale à chacun de ces nombres, l'exposant de cette puissance sera le logarithme du nombre correspondant. Or on conçoit que si l'on inséroit un grand nombre de moyens proportionnels géométriques entre 1 & 10 : *par ex.* il s'en trouveroit un égal, ou à peu près égal au nombre 2, au nombre 5, &c. Et en insérant un pareil nombre de moyens arithmétiques entre les exposans 0 & 1 ; celui qui répondroit au nombre 2, feroit l'exposant de la puissance de 10 égale au nombre 2, & seroit par conséquent le logarithme de 2 : *par exemple*, pour trouver le logarithme de 3 avec six décimales, j'ajoute douze 0 au nombre 10 ; & prenant la racine quarrée de ce résultat avec 6 décimales, à cause des 0 que j'ai ajoutés, je trouve 3.162277, moyen géométrique ; auquel répond l'exposant de la racine quarrée, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$, ou 0.500000, moyen arithmétique entre 0 & 1. Le moyen géométrique trouvé étant plus grand que 3, j'en cherche un autre entre celui-ci & 1, c'est-à-dire que je prends avec 6 décimales la racine du nombre

que je viens de trouver pour avoir $1.778279 < 3$, le moyen arithmétique correspondant est 0.250000 , moyen arithmétique entre 0 , logarithme de 1 , & 0.500000 logarithme du premier moyen géométrique ci-dessus. Le moyen géométrique que nous venons de trouver étant trop petit, j'en cherche un autre entre celui-ci & le premier, ce qui se fait en prenant la racine de leur produit (23) , & ce n'est qu'après dix-neuf multiplications (en y comprenant les multiplications sous-entendues que nous avons faites, en prenant le premier moyen proportionnel, aussi-bien que le second avec 6 décimales; car ajouter 12 zéros, c'est la même chose que multiplier par 1 suivi de 12 zéros) & autant d'extractions qu'on trouve le moyen géométrique 3.000000 , & le moyen arithmétique correspondant ou le logarithme 0.477121 de 3 . A la vérité on a maintenant des méthodes plus expéditives pour avoir les logarithmes; mais en voilà assez pour donner une idée de la méthode qu'on peut suivre pour construire une table de logarithmes. Au reste les logarithmes ne sont la plupart qu'approchés, de sorte qu'il peut y avoir une erreur d'environ une demi-unité de décimale du sixième ordre *. Ayant le logarithme de 2 & de 3 , il est aisé d'avoir celui de leur produit 6 , en ajoutant ensemble les logarithmes du multiplicande & celui du multiplicateur.

REMARQUE I. On appelle *caractéristique* d'un logarithme le nombre qui se trouve devant le point. Ce nombre indique à quelle classe des unités, par

* Il y a cependant des tables dans lesquelles les logarithmes sont exprimés par un plus grand nombre de décimales; mais celles de M. de la Caille sont suffisantes pour les usages ordinaires.

exemple, des dizaines ou centaines appartient le nombre. On voit que la caractéristique des logarithmes des nombres, depuis 1 jusqu'à 10 est 0, 1 depuis 10 jusqu'à 100, 2 depuis 100 jusqu'à 1000, &c. En général un nombre contient autant de chiffres & un de plus qu'il y a d'unités dans la caractéristique de son logarithme *.

REMARQUE II. C'est la même chose de multiplier un nombre par 10 ou d'ajouter une unité à la caractéristique de son logarithme, & en général on multiplie autant de fois un nombre par 10, qu'on ajoute d'unités à la caractéristique de son logarithme : comme aussi l'on divise un nombre autant de fois par 10 qu'on ôte d'unités de la caractéristique de son logarithme.

Pour avoir la racine d'un nombre, on doit, selon ce que nous avons dit ci-dessus, diviser le logarithme de ce nombre par l'exposant de la racine. Soit donc proposé de prendre la racine septième de 128 ; cherchant ce nombre dans les tables, à côté je trouve son logarithme 2.107210, qui, étant divisé par 7, donne 0.301030 ; cherchant ce logarithme dans les tables, je trouve à côté le nombre 2, racine septième de 128. Pour avoir le logarithme d'une fraction, *par exemple*, de la fraction $\frac{1}{4}$, il faut retrancher le logarithme du dénominateur 4 de celui du numérateur 3, le reste — 0.124939 sera le logarithme cherché ; ce qui fait voir que les logarithmes négatifs indiquent des fractions plus petites que l'unité : en effet, si l'on continue en descendant la progression $\div \div a^3 : a^2 : a^1 :$

* Comme 2, logarithme de 100, est l'exposant de la puissance de 10 (c'est-à-dire du carré) qui donne 100 ; de même 0.477121 est l'exposant de la puissance de 10, qui donne 3.

$a^0 : a^{-1} : a^{-2}$, &c. les exposans -1 , -2 seront les logarithmes de $a^{-1} = \frac{1}{a}$, de $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Pour trouver le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, *par ex.* de $3 + \frac{2}{5}$, réduisez l'entier en fraction de même dénominateur, & vous aurez $\frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$; ôtez maintenant le logarithme du diviseur 5 de celui du dividende 17, le reste sera le logarithme du quotient.

Proposons-nous maintenant de trouver à quel nombre appartient un logarithme donné, soit qu'il excède les limites des tables, ou qu'il tombe entre les logarithmes des tables. Dans le premier cas on retranchera de la caractéristique autant d'unités qu'il fera nécessaire pour qu'on puisse trouver dans les tables les premiers chiffres du logarithme proposé ainsi préparé. Si tous les chiffres se trouvent alors dans les tables, le nombre cherché sera le nombre même qu'on trouve à côté; mais il faudra lui ajouter vers la droite autant de 0 qu'on a retranché d'unités à la caractéristique; parce que, selon ce que nous avons dit ci-dessus, on est censé avoir divisé le nombre par autant de fois 10, que l'on a retranché d'unités dans la caractéristique. *Par exemple*, le logarithme $7 \cdot 017451$ se trouve après avoir retranché 3 unités de 7, répondre à 10410, j'en conclus que le nombre auquel appartient le logarithme proposé est 10410000. Si l'on ne trouve dans les tables que les premiers chiffres du logarithme préparé, on se conduira comme dans l'exemple suivant. Pour trouver à quel nombre répond le logarithme $7 \cdot 011499$, j'ôte 3 de la caractéristique, le loga-

rithme restant $4 \cdot 011499$ tombe entre les logarithmes des nombres 10268, 10269. Le nombre auquel il répond, est donc 10268 plus une fraction; pour trouver cette fraction, je retranche de mon logarithme préparé celui de 10268 pour avoir le reste 13. Je prends dans les tables la différence entre le logarithme de 10268 & celui de 10269, je trouve 42; après quoi je fais cette règle de trois. Si 42, différence entre les logarithmes des nombres dont nous venons de parler, donne 1 pour différence entre ces nombres, à quelle différence des nombres doit répondre la différence 13 entre mon logarithme & celui de 10268? c'est-à-dire, je fais $42 : 1 :: 13 : x = \frac{13}{42}$ *. Ainsi le logarithme $4 \cdot 011499$ appartient à $10268 + \frac{13}{42}$ à très-peu-près, & le logarithme $7 \cdot 011499$ à un nombre 1000 fois plus grand.

Si le logarithme proposé tomboit entre ceux des tables, on ne retrancheroit rien à la caractéristique, & même si le logarithme proposé tomboit au-dessous de celui de 1500. Il faudroit pour plus d'exactitude ajouter autant d'unités à la caractéristique qu'on le pourroit, sans passer les bornes des tables, après quoi l'on sépareroit autant de décimales dans le nombre trouvé, qu'on auroit ajouté d'unités à la caractéristique du logarithme.

Soit proposé maintenant de trouver le nombre fractionnaire, auquel appartient un logarithme négatif $— 1 \cdot 532732$. J'ajoute 4 à ce logarithme

* Cette proportion suppose que les différences des nombres sont proportionnelles à celles de leurs logarithmes, ce qui n'est pas exactement vrai; mais seulement à peu-près lorsque les nombres sont assez grands.

pour avoir $2 \cdot 467268$ qui, dans les tables se trouve entre le logarithme de 293 & celui de 294; j'en conclus que la fraction cherchée est $0 \cdot 0294$, à moins d'un dix millième près. En effet ajouter 4 à un logarithme, c'est rendre le nombre auquel il répond 10 mille fois plus grand. Il faut donc, dans le nombre trouvé, séparer quatre décimales.

Soit proposé de trouver la racine cubique de 53, à moins d'un millième près. Le tiers du logarithme de 53 est $0 \cdot 574758$, ce logarithme étant cherché dans les tables avec une caractéristique plus forte de 3 unités, répond à 3756 à-peu-près: donc la racine demandée (en séparant 3 décimales), est $3 \cdot 756$ à-peu-près. Si l'on vouloit avoir la puissance $\frac{1}{7}$, ou, ce qui revient au même, la racine septième du cube de 53, on multiplieroit le logarithme de 53 par 3, divisant le produit par 7, & cherchant le résultat avec une caractéristique plus forte de sept unités, l'on sépareroit ensuite 7 décimales dans le nombre trouvé. Si le logarithme ainsi préparé se trouvoit trop grand pour être contenu dans les tables, on diminueroit sa caractéristique de quelques unités, mais ensuite on ajouteroit au nombre trouvé un pareil nombre de 0, & enfin on sépareroit 7 décimales.

Si l'on proposoit d'extraire la racine cube de $0 \cdot 32 = 0 \cdot 320$; après avoir trouvé le logarithme de 320, je prendrois le tiers de ce logarithme, que je chercherois dans les tables avec une caractéristique plus forte de trois unités, & séparant trois décimales, j'aurois la racine cube de 320; mais comme je veux la racine cube de $0 \cdot 320$, nombre mille fois plus petit, la racine trouvée seroit dix fois trop grande, il faudroit donc séparer encore une décimale.

Puisque toute fraction ordinaire peut se réduire

en une fraction décimale (ou exactement , ou du moins à-peu-près de même valeur) , ainsi que nous l'avons vu ci-devant , ce que nous venons de dire peut s'appliquer aux fractions ordinaires sans erreur sensible.

Disons un mot du complément arithmétique. On appelle *complément arithmétique* d'un nombre , la différence entre ce nombre & l'unité suivie d'autant de zeros, qu'il y a de chiffres dans le nombre. Ainsi le complément arithmétique de 357 se trouve en ôtant ce dernier nombre de 1000. Il est aisé de voir que , pour avoir ce complément , il suffit d'ôter le premier chiffre 7 de 10 , & chacun des autres de 9 , ou, ce qui revient au même , de regarder le premier 0 à droite, comme valant 10 , & chacun des autres 9 , en négligeant l'unité ou le premier chiffre de la gauche. Par-là la soustraction peut être changée en addition : *par exemple* , pour ajouter ensemble les deux nombres 352 & 523 , & retrancher de leur somme les deux nombres 201 & 32 , j'écris les deux pre-

	523
	352
Compl. arithm. de.....201.....	799
Compl. arithm. de.....32.....	68
	<hr/>
	1742
	<hr/>
	642

miers nombres & le complément arithmétique des deux derniers les uns sous les autres, prenant la somme 1742 , je retranche une unité du rang des mille , & une du rang des centaines , le reste 642 est le nombre cherché. Pour en voir la raison , il suffit de remarquer que , si au lieu de retrancher 201 , j'ajoute son complément arithmétique , je fais en même tems la soustraction proposée & une addition de 1000 : c'est-à-dire, d'une dizaine au premier chiffre de la gauche du résultat. On voit aussi qu'en ajoutant le complément de 32 , on fait une augmentation d'une dizaine au second chiffre du résultat. Si les nombres à retrancher avoient autant de chiffres que le plus grand de ceux dont on retranche, on voit qu'il faudroit retrancher du premier chiffre de la gauche du résultat, autant d'unités qu'on ajoute de compléments arithmétiques : or pour cela il n'y a qu'à ajouter vers la gauche

un nombre suffisant de 0, aux nombres qu'on veut retrancher. *Par exemple*, au lieu de prendre le complément de 32, on prendra celui de 032, qui est 968; mais dans ce cas on retrancheroit deux unités du premier chiffre du résultat, & l'on auroit le même nombre cherché que ci-dessus.

Pour diviser 436 par 109, il faudroit, en se servant des logarithmes, retrancher celui du diviseur de celui du dividende. Au lieu de cette opération, j'écris le logarithme de 436, auquel j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 109. Du premier chiffre du résultat; je retranche une unité, le reste 0.602060 est le logarithme du quotient 4 que je trouve à côté dans les tables.

$$\begin{array}{r} 2.639486 \text{ Log. de } 436 \\ 7.962574 \text{ Compl. arithm. du loga-} \\ \hline 0.602060 \text{ rithme de } 109^* \end{array}$$

Pour multiplier une fraction par une autre fraction, on ajouteroit ensemble les logarithmes des numérateurs, & les complémens arithmétiques des logarithmes des dénominateurs, en prenant ces logarithmes aussi-bien que ceux des numérateurs, avec un même nombre de chiffres à la caractéristique (pour cela on ajoutera, s'il est nécessaire, un ou plusieurs zeros vers la gauche), retranchant deux unités du premier chiffre à gauche de la somme, le résultat donneroit le logarithme du produit.

Proposons-nous maintenant de trouver le logarithme d'un nombre qui excède le plus grand nombre des tables, que je suppose être 10000. Soit donc proposé le nombre 3255682, dont on demande le logarithme. Il faut retrancher de ce nombre autant de chiffres qu'il est nécessaire, pour que le reste se trouve dans les tables. Je retranche donc 3 chiffres, & le logarithme du reste 3255, est 3.512551; je prends aussi le logarithme du nombre 3256 plus grand d'une unité, ce logarithme est 3.512684. Maintenant, ajoutant autant d'unités aux caractéristiques des loga-

* Pour avoir le complément arithmétique de 2.037426, logarithme de 109, je soustrais 2.037426 de 10.000000, ou ce qui revient au même, je soustrais 2037426 de 10000000, & je sépare ensuite six décimales.

rithmes que je viens de trouver, que j'ai séparé de chiffres dans le nombre proposé, j'ai les logarithmes $6 \cdot 512551$, $6 \cdot 512684$, & les nombres qui leur répondent, sont 3255000 & 3256000 , dont la différence est 1000 ; c'est pourquoi je fais cette règle de trois: la différence 1000 entre les nombres dont nous venons de parler, donnant $0 \cdot 000133$ pour différence entre leurs logarithmes, combien 682 , différence entre le nombre proposé & le nombre 3255000 , donnera-t-il pour différence entre leurs logarithmes? ou $1000 : 0 \cdot 000133 :: 682 : x = 0 \cdot 000090$. J'ajoute $0 \cdot 000090$ à $6 \cdot 512551$, pour avoir le logarithme du nombre proposé $= 6 \cdot 512641$. Cette règle est fondée sur ce que les différences des nombres sont proportionnelles aux différences des logarithmes, du moins à peu-près, lorsque les nombres sont fort grands.

PROBLEME. Trouver le quinzième terme d'une progression géométrique $\div 2 : ap \cdot ap^2 \&c.$ dont le premier terme $a = 12$, & dont l'exposant $p = 100$. Soit ce terme $= x$ (je désignerai son logarithme par $l \cdot x$), $n = 15$, nous aurons $(51) x = ap^{n-1}$; donc $l \cdot x = l \cdot a p^{n-1} = l \cdot a + (n-1) \cdot l \cdot p$ (car le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au produit de l'exposant de la puissance par le logarithme de ce nombre) $= l \cdot 12 + 14 \cdot l \cdot 100$. Mais $l \cdot 100 = 2, l \cdot 12 = 1 \cdot 079181$; donc le logarithme de x ou $l \cdot x = 1 \cdot 079181 + 28 = 29 \cdot 079181$, qui répond à $12000000000000000000000000000$, nombre cherché.

DES ÉQUATIONS.

63. La raison d'égalité qui se trouve entre deux quantités, s'appelle *équation*, on l'indique par le signe $=$; ainsi $7 + 3 = 10$ est une équation. La quantité qui se trouve à la gauche du signe, se nomme le *premier membre de l'équation*; celle de la droite en est le *second*. L'objet des équations est de faire connoître la valeur d'une ou de plusieurs quantités inconnues qui entrent dans l'équation : voici un principe dont on peut faire un grand usage.

64. PRINCIPE FONDAMENTAL. *Deux quantités égales resteront encore égales, si on leur ajoute, ou si on en soustrait des quantités égales; si on les multiplie, ou si on les divise par des quantités égales; si on les élève à des puissances égales; si on en extrait des racines égales, ou encore si l'on change tous les signes de l'une & de l'autre.*

Les équations sont du premier degré, lorsque l'exposant de l'inconnue (en supposant qu'il n'y en a qu'une dans l'équation) est $= 1$; elles sont dites du second degré, si le plus grand exposant de l'inconnue est 2; du troisième, s'il est $= 3$; &c. Mais s'il y a plusieurs inconnues, le degré de l'équation s'estime par la plus forte somme que peuvent faire les exposants des inconnues dans un même terme. Les quantités connues sont ordinairement désignées par les premières lettres $a, b, c, &c.$ de l'alphabet; & les quantités inconnues par les dernières $x, y, u, &c.$ Ainsi dans les équations $y + x = d + c$, $y = 6 + a$ (qui sont du premier degré), $x^2 - x = a$, $x^2 + y^2 = d$, $xy - y = 9$ (qui sont du second degré) les inconnues sont x & y .

Résoudre les équations, c'est trouver les valeurs des inconnues qu'elles contiennent; pour cela s'il n'y a qu'une équation & une inconnue, il faut faire en sorte que l'inconnue reste seule dans un membre toutes les inconnues se trouvant dans l'autre membre; par ce moyen l'inconnue deviendra connue, puisqu'elle sera égale à une quantité connue. Soit proposée cette équation $gx + a - d = f$. J'ajoute à l'un & à l'autre membre la quantité $+d$, & j'en soustrais la quantité a (ce qui par le principe fondamental ne détruit pas l'égalité), & j'ai $gx + a - d - a + d = f + d - a$, ou, en réduisant, j'ai $gx = f + d - a$.

Maintenant je divise les deux membres par g ; & j'ai $\frac{gx}{g} = \frac{f+d-a}{g}$, ou $x = \frac{f+d-a}{g}$. Si j'avois l'équation $\frac{bx}{a} + d = g$, je multiplierois l'un & l'autre membre par a pour avoir $\frac{abx}{a} + ad = ag$, ou, en réduisant, $bx + ad = ag$. Divisant ensuite tous les termes par le multiplicateur de l'inconnue x (nous appellerons ce multiplicateur, quel qu'il soit, le *coefficient de l'inconnue*), j'ai $\frac{bx}{b} + \frac{ad}{b} = \frac{ag}{b}$, ou $x + \frac{ad}{b} = \frac{ag}{b}$. De - là nous tirons cette regle générale. *Pour faire passer une quantité positive ou négative d'un membre dans un autre, il faut l'effacer dans le membre où elle est, & l'écrire dans l'autre membre avec un signe contraire ; pour dégager une inconnue de son coefficient, il faut la laisser sans ce coefficient, & diviser les autres termes de l'équation par ce coefficient. Mais pour dégager une inconnue de son diviseur, il faut la laisser sans ce diviseur, & multiplier les autres termes de l'équation par ce diviseur.*

65. Si j'avois les deux équations $x + y = a$, $x - 2y = b$, je prendrois la valeur d'une des inconnues dans l'une des deux équations précédentes, en laissant cette inconnue seule dans un membre. Supposons, *par exemple*, que je prenne la valeur de x dans la seconde, j'aurai en transposant, $x = b + 2y$ (par la regle précédente). Substituant $b + 2y$ à la place de x dans la premiere équation, il viendra $b + 2y + y = a$, ou $b + 3y = a$, ou (en transposant) $3y = a - b$, & (en divisant) $y = \frac{a-b}{3}$. Substituant cette valeur de y dans l'une des

deux équations données (il est indifférent dans quelle des deux on substitue), *par exemple*, dans la première on aura $x + \frac{a-b}{3} = a$, transposant $\frac{a-b}{3}$, on trouvera $x = a - \left(\frac{a-b}{3} \right) = \frac{3a - a + b}{3} = \frac{2a + b}{3}$.

Si l'on avoit trois inconnues & trois équations, on prendroit la valeur d'une de ces inconnues dans une des trois équations, & la substituant dans les deux autres, il en résulteroit deux équations avec deux inconnues tout au plus. Or, par le moyen de ces deux équations, l'on trouveroit aisément la valeur de ces inconnues; & substituant ces valeurs dans une des trois équations qui renfermeroit les trois inconnues, on auroit facilement la valeur de la troisième inconnue. Si l'on avoit quatre inconnues & quatre équations, en prenant la valeur d'une des inconnues dans la première, & la substituant dans les trois autres, on auroit tout au plus trois équations & trois inconnues, dont on trouveroit la valeur par le moyen de ces trois équations. Substituant cette valeur dans une des quatre premières équations, l'on auroit la valeur de la quatrième inconnue; & ainsi de suite pour un plus grand nombre d'équations & d'inconnues.

Si j'avois l'équation $\sqrt{x} = a^2 + d$, en élevant au carré les deux membres de cette équation, j'aurois $x = a^4 + 2a^2d + d^2$. Si j'avois cette autre équation $x^2 = 25$, en prenant les racines carrées, j'aurois $\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{25}$ (V. le n°. 36) $= \pm 5$. En effet $+5 \times +5 = +25$ & $-5 \times -5 = +25$.

25. Mais si j'avois l'équation $x^2 + 2ax = b^2$, il faudroit compléter le premier membre, c'est-à-dire, rendre le premier membre un quarré parfait, ce qui se fait en lui ajoutant le quarré de la moitié du coefficient de x ; mais il faut faire la même addition au second membre, afin que l'égalité ne soit point détruite. Ainsi nous aurons $x^2 + 2ax + a^2 = b^2 + a^2$; or il est visible que le premier membre est un quarré, savoir, celui de $x + a$. Prenant donc la racine quarrée de part & d'autre, j'ai $x + a = \pm \sqrt{b^2 + a^2}$, & en transposant, $x = -a \pm \sqrt{b^2 + a^2}$. Si $a = 3$ & $b = 4$, l'on aura $x = -3 \pm \sqrt{25}$, ou $x = -3 \pm 5$, ou $x = 2$ & $x = -8$. Ce qui fait voir que toute équation du second degré a deux racines; mais on entend ici par racines les valeurs de l'inconnue. Si j'avois l'équation $-ax^2 + 2a^2x = b$, je dégagerois x^2 de son coefficient, ce qui me donneroit $-x^2 + 2ax = \frac{b}{a}$. En second lieu je rendrois x^2 positif en changeant tous les signes de l'équation, ce qui (64) ne détruit point l'égalité, pour avoir $+x^2 - 2ax = -\frac{b}{a}$; ajoutant maintenant de part & d'autre le quarré de la moitié de $-2a$, coefficient de x , c'est-à-dire, le quarré de $-a$ qui est a^2 , j'aurois $x^2 - 2ax + a^2 = -\frac{b}{a} + a^2$. Prenant maintenant la racine quarrée de l'un & de l'autre membre, j'ai $x - a = \pm \sqrt{-\frac{b}{a} + aa}$. Si $\frac{b}{a}$ est plus petit que a^2 , les deux racines sont réelles, si $\frac{b}{a}$

est plus grand que a^2 , les deux racines sont imaginaires ; car soit $-\frac{b}{a} + aa = -cc$, on aura $x = +a \pm \sqrt{-cc}$; or $\sqrt{-cc}$ est (36) une quantité imaginaire. Si $\frac{b}{a} = aa$, alors $-\frac{b}{a} + aa = 0$, & $x = +a \pm \sqrt{0}$, ou $x = +a \pm 0$, c'est-à-dire, qu'alors les deux racines sont égales chacune à la quantité a .

66. Faisons maintenant l'application de ce que nous venons de dire à quelques problèmes ; mais auparavant disons un mot de la manière de mettre une question en équation. Pour mettre un problème en équation, il faut le traduire en langage algébrique ; or pour cela il faut exprimer, par le moyen de l'algèbre, les quantités soit connues, soit inconnues, qui entrent dans le problème, & les rapports que ces quantités ont entr'elles.

PROBLEME I. *Etant donnée la somme 100 de deux nombres, & leur différence 30, trouver ces deux nombres.* Soient x le plus grand de ces nombres, y le plus petit, $a = 100$, $30 = b$. Par la nature du problème nous aurons la somme $x + y = a$, & la différence de ces mêmes nombres, savoir, $x - y = b$. Si nous ajoutons le premier membre de la première équation avec celui de la seconde, le second membre de la première avec le second de l'autre, ce qui est très-permis, puisqu'on ne fait qu'ajouter des quantités égales à des quantités égales, nous aurons $x + y + x - y = a + b$, ou $2x = a + b$, & (en divisant les deux membres de cette équation par 2.) $x = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. Mais si on retranche la seconde équation $x - y = b$ de la

première $x + y = a$, le premier membre du premier membre le second du second, il viendra $x + y - x + y = a - b$, ou $2y = a - b$, ou (en divisant par 2) $y = \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. C'est-à-dire, qu'étant donnée la somme & la différence de deux quantités, la plus grande de ces quantités est égale à la moitié de la somme plus la moitié de la différence, la plus petite étant égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence : ainsi dans le cas du problème le plus grand nombre x est $= \frac{100}{2} + \frac{10}{2} = 50 + 15 = 65$, & le plus petit nombre y est $= \frac{100}{2} - \frac{10}{2} = 50 - 15 = 35$.

PROBLÈME II. Pierre, Jean & Jacques ont chacun un certain nombre de louis ; Pierre & Jean en ont ensemble vingt ; Pierre & Jacques en ont quarante ; mais Jean & Jacques n'en ont que trente à eux deux. On demande le nombre de louis de chacun en particulier. Soit x la somme des louis de Pierre, de Jean & de Jacques. Si de cette somme l'on retranche le nombre $20 = a$, il restera $x - a$ pour les louis de Jacques. De même si de x on retranche $40 = b$ on aura $x - b$ pour les louis de Jean ; enfin, si de x nous retranchons $30 = c$, nous aurons $x - c$ nombre de louis de Pierre. Mais ces trois nombres doivent valoir autant que la somme x ; donc nous avons l'équation $(x - a) + (x - b) + (x - c) = x$, ou $x - a + x - b + x - c = x$, ou $3x - a - b - c = x$, ou, en transposant, $3x = x + a + b + c$, & en transposant encore $3x - x = a + b + c$, ou $2x = a + b + c$, ou $x = \frac{a + b + c}{2} = \frac{20 + 40 + 30}{2} = 45$; donc le nombre $x - a$ des louis de Jacques sera $= 45 - 20 = 25$, le

nombre $x - b$ des louis de Jean étant $= 5$; mais celui des louis de Pierre , favoit $x - c$, sera $= 15$.

PROBLEME III. Titius voulant donner une certaine somme à un nombre déterminé de pauvres, a remarqué qu'il lui manquoit 8 sols pour que chacun en reçût 3 ; mais il a remarqué aussi qu'il en avoit 3 de reste, s'il se contentoit d'en donner 2 à chacun. On demande le nombre de sols & celui des pauvres ? Soit x le nombre des pauvres ; puisqu'en voulant donner 3 sols à chacun , il en manque 8 , le nombre des sols est donc $3x - 8$; mais à cause qu'en donnant 2 sols à chaque pauvre , il y en a 3 de reste , le nombre des sols est évidemment $2x + 3$; donc $3x - 8 = 2x + 3$; transposant $- 8$ dans le second membre & $2x$ dans le premier , il vient $3x - 2x = + 11$, ou $x = 11$. Il y avoit donc 11 pauvres ; & par conséquent le nombre de sols $2x + 3$ est $= 25$.

PROBLEME IV. Un chien voit partir un lievre à 100 toises de distance , on demande à quel point il le prendra : on sait seulement qu'il parcourt trois toises dans le tems que le lievre en parcourt deux. Soit $a = 100$, $m = 3$, $n = 2$, x le chemin que fera le lievre avant d'être pris ; il est visible que le chemin que doit faire le chien est $a + x$. D'un autre côté le chemin que fait le chien doit être à celui que fait le lievre dans le même tems , comme la vitesse du chien est à celle du lievre , ou comme $m : n$; donc $a + x : x :: m : n$; & en faisant le produit des extrêmes & celui de moyens , $mx = na + nx$, ou $mx - nx = na$, & en divisant, $x = \frac{na}{m - n}$, c'est-

à-dire , que le chemin que doit faire le lievre avant d'être pris , est égal au produit de la distance qui s'est trouvée au commencement de la course entre

lui & le chien , multipliée par la vitesse du lievre , en divisant ce produit par la différence des vitesses.

Ainsi dans le cas supposé le lievre sera pris après avoir parcouru le chemin $x = \frac{na}{m-n} = \frac{200}{1} = 200$ toises.

Si on supposoit $m=n$, il est visible que le chien ne pourroit jamais atteindre le lievre , à plus forte raison cela arriveroit si m étoit plus petit que n .

PROBLEME V. *Un pere ayant le triple de l'âge de son fils s'en chagrinoit , le fils pour le consoler lui dit : cher pere , attendez encore 20 ans , & vous n'aurez que le double de mon âge. On demande l'âge du pere & celui du fils.* Soit $a = 20$, x l'âge du fils ; donc , par la nature du problème , l'âge du pere qui doit être triple de celui du fils , sera $3x$; au bout de 20 ans , celui du fils sera $x + a$, & celui du pere $3x + a$; mais alors celui du pere doit être double de celui du fils : donc $3x + a = 2 \text{ fois } (x + a) = 2x + 2a$. On a donc l'équation $3x + a = 2x + 2a$. En transposant a dans le second membre , & $2x$ dans le premier , on trouve $3x - 2x = 2a - a$, ou $x = a = 20$; ainsi le fils avoit 20 ans , & le pere 60. En effet dans 20 ans l'âge du fils sera 40 , & celui du pere 80 , double de celui du fils.

PROBLEME VI. *Un pere faisant son testament veut que l'aîné de ses fils reçoive 1000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste ; le second 2000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste ; le troisième 3000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste ; & ainsi de suite. On demande le nombre des enfans , la part de chacun & le bien du pere , on sait seulement que les enfans recevront autant l'un que l'autre.* Soit x le bien du pere , $a = 1000$ liv. Lorsque l'aîné aura pris 1000 liv. le reste

du bien fera $x - a$, dont le $\frac{1}{7}$ fera $\frac{x-a}{7}$, qui, ajouté à a , donnera $\frac{x-a}{7} + a = \frac{x-a}{7} + \frac{7a}{7} = \frac{x-a+7a}{7} = \frac{x+6a}{7}$, part de l'aîné. Otant cette quantité de x , l'on aura $x - \frac{x+6a}{7} = \frac{7x-x-6a}{7} = \frac{6x-6a}{7}$, reste du bien du pere, le premier fils partagé. Le second doit prendre $2a$ sur ce reste, & de plus le $\frac{1}{7}$ du reste. Otant donc $2a$ de $\frac{6x-6a}{7}$, on a $\frac{6x-6a}{7} - 2a = \frac{6x-6a-14a}{7} = \frac{6x-20a}{7}$. Le $\frac{1}{7}$ de cette dernière quantité est $\frac{6x-20a}{7}$ divisé par 7, ou $\frac{6x-20a}{49}$. Ajoutant $2a$ l'on aura la part du second $= 2a + \frac{6x-20a}{49} = \frac{98a+6x-20a}{49} = \frac{78a+6x}{49}$. Mais la portion du premier doit être égale à celle du second. Donc $\frac{x+6a}{7} = \frac{78a+6x}{7 \times 7}$. Multipliant les deux membres de l'équation par 7×7 & réduisant, l'on a $7x + 42a = 78a + 6x$, Transposant $42a$ du premier membre dans le second & $6x$ du second dans le premier, il vient $7x - 6x = 78a - 42a$, ou $x = 36a = 36000$ liv. bien du pere. Le premier fils prend 1000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste, c'est-à-dire 1000 liv. $+ \frac{11000}{7}$ liv. ou 1000 liv. $+ 5000$ l. $= 6000$ l. ; donc la part du premier & celle de chacun des autres est $= 6000$ liv. Divisant le bien

du pere 36000 liv. par une des portions = 6000 liv. , le quotient 6 fera connoître le nombre des enfans.

PROBLEME VII. *Quel est le nombre qui multiplié par 10 donne le tiers de son quarré ?* Soit x ce membre, $a = 10$, $b = 3$. On aura par la nature du problème, $ax = \frac{xx}{b}$. Multipliant l'un & l'autre nombre par b , & divisant par x , on trouve $ab = x = 30$.

PROBLEME VIII. *Partager 5 en deux parties , en sorte que le quotient de la plus grande par la plus petite soit = 5.* Supposant $a = 5$, x la plus grande partie, $a - x$ sera la plus petite. Par la nature du problème $\frac{x}{a-x} = a$; donc (en ôtant la fraction) $x = a \times (a-x) = a^2 - ax$. Transposant $-ax$ dans le premier membre, il vient $x + ax = a^2$, ou $x \times (1+a) = a^2$; donc $x = \frac{a^2}{a+1}$. Pour avoir la seconde partie $a - x$, je substitue la valeur de x , ce qui me donne $a - \frac{a^2}{a+1} = \frac{a^2 + a - a^2}{a+1}$ (en réduisant a en une fraction , dont le dénominateur soit $a+1$) $= \frac{a}{a+1}$; donc la premiere partie $= \frac{25}{6}$, & la seconde $= \frac{5}{6}$. On voit donc que dans tous les cas semblables on trouvera la plus grande des deux parties en divisant le quarré du nombre proposé par ce nombre lui-même augmenté de l'unité, & la plus petite en divisant le nombre proposé par ce nombre augmenté de l'unité.

PROBLEME IX. *Si l'on doubloit le nombre de mes écus , disoit un bon homme , j'en donneroïs 3 , ce qui fut fait ; on continua de même jusqu'à la troisié-*

me fois qu'il ne lui resta rien. Quel étoit le nombre de ses écus ? Soit x le nombre cherché, en doublant l'on aura $2x$, d'où ôtant 3, il restera $2x - 3$. En doublant ce premier reste, & ôtant 3, il viendra $4x - 6 - 3 = 4x - 9$. Doublant encore & ôtant 3, il vient enfin $8x - 18 - 3$, ou $8x - 21$ qui, par la nature du problème, doit être $= 0$; donc $8x - 21 = 0$, ou (en transposant) $8x = 21$ & (en divisant) $x = \frac{21}{8} = 2 + \frac{5}{8}$; c'est-à-dire qu'il avoit 2 écus & $\frac{5}{8}$ d'un écu, ce qu'il est facile de vérifier.

PROBLEME X. Un oncle dit à son neveu, j'ai dans ma main un certain nombre d'écus que je te donnerai, si tu devine combien il y en a. Le carré de ce nombre — 4 fois ce nombre est $= 5$. Soit x le nombre cherché, son carré sera x^2 , le quadruple de ce nombre sera $4x$. On aura donc $x^2 - 4x = 5$. Prenant le carré de la moitié du coefficient de x (65) & l'ajoutant de part & d'autre, j'aurai $x^2 - 4x + 4 = 5 + 4 = 9$. Prenant la racine de l'un & de l'autre membre, j'ai $x - 2 = \pm \sqrt{9} = \pm 3$, & (en transposant) $x = 2 \pm 3$, c'est-à-dire, $x = 5$, & $x = -1$. Il est évident que la première racine donne la solution du problème dans le sens qu'il est proposé; car le carré de 5, moins 4 fois 5 est $= 5$. Mais la seconde racine -1 résout cette question implicitement renfermée dans l'équation, qu'elle est le nombre négatif dont le quadruple étant retranché de ce nombre, le résultat sera 5. Si l'on avoit demandé que le reste fût $= -13$, on auroit trouvé $x = 2 \pm \sqrt{(-13 + 4)}$, ou $x = 2 \pm \sqrt{-9}$. La racine de -9 étant imaginaire; puisqu'il n'y a aucun nombre qui, multiplié par lui-même, puisse donner -9 (car $+3 \times +3 = +9 = -3$

$x - 3$), il s'ensuit que le problème est impossible. Mais on est censé avoir résolu un problème, quand on a démontré qu'il est impossible.

PROBLEME XI. *Etant données deux quantités, en trouver une troisième qui soit en proportion harmonique avec les deux premières.* Soient a & b les quantités données, & x la quantité cherchée. Par la nature de la proportion harmonique (40) la différence de la première quantité à la seconde doit être à la différence de la seconde à la troisième, comme la première est à la troisième; donc $a - b : b - x :: a : x$, si est $a > b$; mais si les quantités vont en augmentant, l'on a $b - a : x - b :: a : x$. Donc en prenant le produit des extrêmes & celui des moyens, on aura dans le premier cas $ax - bx = ab - ax$, & dans le second $bx - ax = ax - ab$; mais l'une & l'autre équation donne $2ax - bx = ab$, & en divisant les deux membres par $2a - b$, on trouvera $x = \frac{ab}{2a - b}$.

Si les deux nombres a & b sont 4 & 6, le nombre cherché x fera $= \frac{24}{2} = 12$. Si $a = 35$ & $b = 21$, on trouvera $x = 15$. On continueroit une progression harmonique, dont on connoîtroit les 2 premiers termes, en cherchant d'abord le troisième, & ensuite le quatrième, par le moyen du second & du troisième, & ainsi de suite. On trouvera même que si on divise successivement une même quantité a par les termes d'une progression arithmétique $\div b \cdot b + d \cdot b + 2d$ &c. Les quotients $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b+d}$, $\frac{a}{b+2d}$, &c. seront en progression harmonique.

PROBLEME XII. *Etant donnée la somme de deux nombres*

nombre avec leur produit, trouver ces nombres. Soit la somme des nombres $= a$, leur différence $= x$; le plus grand fera $\frac{a}{2} + \frac{x}{2}$, & le plus petit $\frac{a}{2} - \frac{x}{2}$ (problème I). Leur produit étant supposé $= b$, nous aurons $\frac{a^2}{4} - \frac{x^2}{4} = b$; donc $a^2 - x^2 = 4b$, $a^2 - 4b = x^2$, prenant les racines & transposant, il vient $x = \pm \sqrt{aa - 4b}$. Si $a = 14$ & $b = 48$, on aura $x = \pm 2$, & les deux nombres seront $7 + 1$ & $7 - 1$, c'est-à-dire, 8 & 6. Si $a = 4$ & $b = 5$, on aura $x = \pm \sqrt{-4}$, quantité imaginaire qui fait voir qu'il ne peut y avoir deux nombres réels, dont la somme soit 4 & le produit 5.

PROBLEME XIII. Un Marchand ayant placé 100000 livres dans un commerce où il perd, a trouvé la seconde année son argent diminué des $\frac{4}{25}$ du total de ce qu'il étoit après la première année, on demande à combien pour 100 se monte la

perte par an. Soit 100000 liv. $= a$, $\frac{4a}{25} = b$, & x le nombre cherché. En faisant cette proportion $100 : 100 - x :: a : a \times$

$\frac{100 - x}{100} = a \times (1 - \frac{x}{100})$, ce quatrième terme exprimera ce que devient la somme après la première année. Si l'on fait maintenant $100 : 100 - x :: a \cdot (1 - \frac{x}{100}) : \frac{100 - x}{100} \times a \times$

$\frac{100 - x}{100} = a \times (1 - \frac{x}{100}) \cdot (1 - \frac{x}{100}) = a \times \frac{(100 - x)^2}{10000}$

$= a \times \frac{(d - x)^2}{d^2}$ en faisant $d = 100$, la quantité $a \times \frac{(d - x)^2}{d^2}$ exprimera ce qui devient la somme a après la seconde année. Mais par la nature du problème, cette quantité est

égale à $a \times \frac{(100 - x)}{100}$ diminué de b , c'est-à-dire, qu'on a l'équation $a \times \frac{(d - x)^2}{d^2} = a \times \frac{(d - x)}{d} - b$, ou

$$\frac{ad^2 - 2adx + ax^2}{d^2} = \frac{ad - ax - bd}{d} \quad (\text{en réduisant } b \text{ en}$$

$$\text{fraction}) = \frac{add - adx - bdd}{dd} \quad (\text{en multipliant le numérateur}$$

& le dénominateur par d , ce qui évidemment ne change point la valeur de la fraction). Donc étant le diviseur commun dd , ce qui ne peut altérer l'égalité, transposant tous les termes affectés de x dans le premier membre & tous les autres dans le second, on aura $axx - 2adx + add = add - add - bdd = -bdd$; donc réduisant le premier membre & divisant par a ,

$$x^2 - dx = -\frac{bdd}{a}. \text{ Ajoutant de part \& d'autre le quar-}$$

$$\text{ré de la moitié du coefficient de } x, \text{ on a } x^2 - dx + \frac{dd}{4} = -\frac{bdd}{a} + \frac{dd}{4}; \text{ \& prenant les racines de part \&}$$

$$\text{d'autre, } x - \frac{d}{2} \pm \sqrt{-\frac{bdd}{a} + \frac{dd}{4}}, \text{ \& en transposant,}$$

$$x = +\frac{d}{2} \pm \sqrt{-\frac{bdd}{a} + \frac{dd}{4}} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{4b}{a} + 1\right) \times$$

$$\frac{dd}{4}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \sqrt{1 - \frac{4b}{a}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \sqrt{1 - \frac{16a}{25a}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \times$$

$$\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \times \frac{3}{5}, \text{ ou en re-}$$

mettant les nombres à la place des lettres, $x = 50 \pm 30$ $\times \frac{3}{5}$. Donc $x = 50 + 30 = 80$, & $x = 50 - 30 = 20$. Ainsi il y a deux solutions, c'est-à-dire, que la somme pou-
voit perdre 80 pour 100, ou seulement 20 *. Mais si l'on sup-

posoit $b = \frac{a}{3}$, on trouveroit $x = 50 \pm 50 \sqrt{-\frac{1}{3}}$, quan-
tité imaginaire, c'est-à-dire, que les deux valeurs de x seroient
imaginaires. Il est donc impossible que la somme soit altérée

* Dans le second cas la somme devient 8000 l. après la pre-
mière année; & 64000 l. après la seconde; mais 80000 l. -
16000 l. = 64000 - $\frac{4a}{15}$. Dans le premier cas la somme de-
vient 20000 liv. à la première année, & 20000 l. - $\frac{4a}{25}$ =
4000 liv. à la seconde année.

d'une année à l'autre dans une proportion qui soit telle que de la première à la seconde année, la diminution soit le tiers du total. En effet lorsque dans une équation du second degré l'on trouve pour résultat des quantités imaginaires, c'est une marque le problème est impossible.

PROBLEME XIV: *Deux sources coulant uniformement, ont rempli un bassin de 90 muids, la première en coulant pendant 3 jours & la seconde pendant 5 jours. Les mêmes fontaines ont rempli un bassin de 64 muids, la première en coulant pendant 2 jours & la seconde pendant 4, quelle est la dépense de chacune par jour ?* Soit x la dépense journalière de la première, y celle de la seconde. Par la première condition du problème l'on a $3x + 5y = 90$, & par la seconde condition $2x + 4y = 64$. Transposant $4y$ dans cette seconde équation, il vient $2x = 64 - 4y$, ou $x = \frac{64 - 4y}{2}$. Transposant $5y$ dans la première équation, on trouvera $3x = 90 - 5y$, & $x = \frac{90 - 5y}{3}$, & en substituant dans cette dernière équation la valeur de x trouvée dans la seconde, l'on a $\frac{64 - 4y}{2} = \frac{90 - 5y}{3}$. Otant les fractions, il vient $192 - 12y = 180 - 10y$, ou (en transposant) $192 - 180 = 12y - 10y$, ou $12 = 2y$ & $y = \frac{12}{2} = 6$. Substituant cette valeur de y dans une des valeurs de x déjà trouvées, dans la dernière, par exemple, l'on a $x = \frac{90 - 5 \times 6}{3} = \frac{90 - 30}{3} = \frac{60}{3} = 20$; donc $x = 20$. C'est-à-dire, que la première fournit 20 muids d'eau par jour, & la seconde 6.

Si l'on supposoit que la première coulant pendant

3 jours , & la seconde pendant 5 , remplissent un bassin de 30 muids , & que la premiere coulant pendant 2 jours , & la seconde pendant 4 remplissent un bassin de 16 muids , l'on auroit alors les deux équations suivantes $3x + 5y = 30$, $2x + 4y = 16$. La premiere donne $x = \frac{30-5y}{3}$, la seconde donne $x = \frac{16-4y}{2}$. Pour trouver la valeur de y , j'égle ces deux valeurs de x * afin d'avoir $\frac{30-5y}{3} = \frac{16-4y}{2}$. Faisant disparoître les fractions, il vient $60 - 10y = 48 - 12y$, & faisant passer tous les termes connus d'un côté & les inconnus de l'autre, l'on a $12y - 10y = 48 - 60 = -12$. Donc $2y = -12$, & $y = \frac{-12}{2} = -6$. Substituant la valeur de y dans une des valeurs trouvées de x , dans la derniere, *par exemple*, l'on aura $x = \frac{16-4 \times -6}{2} = \frac{16+24}{2} = \frac{40}{2} = 20$; donc $x = 20$ & $y = -6$, c'est-à-dire que tandis que la premiere source fournit 20 muids d'eau par jour , la seconde en tire 6 du bassin. En effet la premiere doit fournir soixante muids d'eau dans 3 jours , & puisque la seconde en tire 6 par jour , ou 30 dans 5 jours , les deux fontaines ensemble rempliront un bassin de 30 muids , l'une en coulant pendant 3 jours & l'autre en tirant de l'eau pendant 5 jours. Ce qui fait voir que les quantités négatives doivent se prendre dans un sens contraire aux positives.

* C'est une autre méthode de résoudre les équations : Elle consiste à égaliser les valeurs d'une même inconnue prises dans deux équations différentes. Cette méthode porte avec elle sa démonstration.

PROBLEME XV. *Trouver deux nombres tels que le plus petit étant retranché du plus grand , il reste s & que le quotient du plus grand par le plus petit , soit aussi $= s$. Soit $a = s$, x le plus grand , y le plus petit nombre cherché. Par la premiere condition du problème $x - y = a$, par la seconde $\frac{x}{y} = a$; donc $x = ay$. Substituant cette valeur de x dans la premiere équation , l'on aura $ay - y = a$, ou $(a - 1) \times y = a$, ou $y = \frac{a}{a-1}$. Substituant la valeur de y dans l'équation $\frac{x}{y} = a$ ou $x = a \times y$, on trouvera $x = a \times \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$; donc $y = \frac{1}{4}$ & $x = \frac{25}{4}$; & parce que a peut désigner toutes sortes de nombres , il est évident en général que pour trouver deux nombres tels que la différence du plus grand au plus petit soit égale à un nombre quelconque donné , & que le quotient du plus grand par le plus petit soit aussi égal au même nombre donné , il faut prendre pour le plus grand nombre le quarré du nombre donné divisé par ce même nombre diminué de l'unité , & pour le plus petit nombre , le nombre donné , divisé par ce nombre diminué de l'unité.*

PROBLEME. XVI. *On demande deux nombres x & y tels que le plus petit y soit au plus grand comme $2 : 7$, & que le quotient du plus grand par le plus petit soit $= 10$. Par la premiere condition $2 : 7 :: y : x$; donc (en faisant le produit des extrêmes & celui des moyens) $2x = 7y$ ou $x = \frac{7y}{2}$. Par la seconde condition $\frac{x}{y} = 10$, ou $x = 10y$, substi-*

K ;

tuant cette valeur de x dans l'équation $2x = 7y$, ou plutôt dans l'équation $x = \frac{7y}{2}$, l'on a $10y = \frac{7y}{2}$, & en ôtant la fraction, $20y = 7y$; & en divisant les 2 membres de l'équation par y , $20 = 7$, ce qui est absurde; ainsi le problème est impossible. En général toutes les fois qu'on parvient à une équation absurde, on est sûr que le problème proposé est impossible, pourvu que d'ailleurs on ait bien exprimé algébriquement les conditions du problème, & que l'on n'ait pas fait de faute dans la suite des opérations qui ont conduit à une équation absurde. Au reste on est censé avoir résolu un problème, lorsqu'on a fait voir qu'il est impossible.

PROBLEME XVII. *On veut mêler ensemble du vin à 8 sols & du vin à 12 sols la bouteille, pour avoir un mélange à 10 sols la bouteille, combien doit-on prendre de chacun de ces vins pour 30 bouteilles du mélange ?* Soit $q = 30$, $a = 12$, $b = 8$, $c = 10$, & x ce qu'il faut prendre du vin le plus cher; donc $q - x$ sera ce qu'il faut prendre du vin le moins cher. En multipliant le prix a par le nombre des bouteilles x , ax exprimera la valeur du vin le plus cher; par la même raison $bq - bx$ sera la valeur du second vin. Et parce que ces deux valeurs prises ensemble doivent valoir autant que 30 bouteilles du mélange, c'est-à-dire 30 fois 10 f. $= qc$, on aura $ax + bq - bx = cq$, ou (en transposant) $ax - bx = cq - bq$, ou $x \times (a - b) = q \times (c - b)$, ou (en divisant par $a - b$) $x = q \times \frac{(c - b)}{(a - b)}$. Ainsi $q - x = q - q \times \frac{(c - b)}{(a - b)} = \frac{qa - qb - qc + bq}{a - b} = \frac{qa - qc}{a - b} = q \times \frac{(a - c)}{(a - b)}$, quantité

du vin au plus bas prix. L'on aura donc $x = 30 \times \frac{(10-8)}{12-8} = \frac{10 \times 2}{4} = \frac{60}{4} = 15$. De même $q \times \frac{(a-b)}{a-b}$ se réduit à 15, c'est-à-dire, qu'on doit prendre 15 bouteilles de chaque espèce de vin.

REMARQUE I. De l'équation $x = q \times \frac{(c-b)}{a-b}$, on tire $a-b : c-b :: q : x$. Et faisant $= y$ la quantité du vin ou autre marchandise au plus bas prix, nous aurons $q \times \frac{(a-c)}{a-b} = y$, & $a-b : a-c :: q : y$. Donc si on propose de faire un mélange de 20 livres à 30 f. la livre, avec du café à 50 f. & du café à 12 f., je dirai la différence du plus haut prix au plus bas prix, est à la différence du moyen prix (c'est-à-dire, du prix du mélange) au plus bas prix, comme la quantité du mélange à la quantité du café à 50 f., ou $38 : 18 :: 20 : x = \frac{18 \times 20}{11} = 9 + \frac{2}{11}$, ôtant cette quantité de 20, on aura la quantité qu'il faut prendre du café à 12 f. qu'on peut aussi trouver par la proportion $a-b : a-c :: q : y$, qui dans ce cas devient $38 : 20 :: 20 : y = \frac{400}{11} = 10 + \frac{10}{11}$. C'est-à-dire, qu'on doit prendre 9 livres & $\frac{2}{11}$ de livre du premier café, & 10 livres & $\frac{10}{11}$ de livre du café à 12 sols.

REMARQUE II. Si on donnoit la quantité d'une des marchandises qui doivent entrer dans le mélange avec la quantité du mélange, l'on trouveroit facilement ce qu'on doit prendre de l'autre marchandise, en ôtant de la quantité q , qui représente la quantité du mélange, la quantité que l'on prend de la première marchandise. Mais si on demandoit de faire un mélange qui contînt, *par exemple*, 10 mesures de vin à 10 f. la mesure, & qu'on proposât de tirer

ver combien il faudroit de mesures à 30 f. pour avoir un mélange à 15 f. la mesure ; on chercheroit par le Problème précédent combien il faudroit prendre du vin à 10 f. & du vin à 30 f. pour un certain nombre de mesures à volonté, pour 4, *par exemple* ; on trouveroit qu'il faut prendre 3 mesures du premier vin & 1 du second, après quoi l'on feroit cette règle de trois : trois mesures de vin à 10 f. répondent à 4 mesures du mélange, à combien de mesures du mélange répondront 10 mesures à 10 f., ou $3 : 4 :: 10 : x = \frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}$; c'est-à-dire, que le mélange feroit de $13 \frac{1}{3}$ bouteilles & $\frac{1}{3}$, dont 10 du vin à 10 f. & par conséquent $3 \frac{1}{3}$ du vin à 30 f.

REMARQUE III. Si l'on donnoit la quantité du mélange, la quantité & le prix de chacune des marchandises qui entrent dans le mélange, on trouveroit le prix du mélange en divisant la somme des prix de toutes les marchandises qui entrent dans le mélange par le nombre des mesures du mélange. Ainsi si l'on demande combien vaudra la mesure d'un mélange de 30 mesures de vin, dont 12 à 1 liv. 10 f., 10 à 1 liv. & 8 à 5 f. Le prix des 12 premières est = 18 liv., le prix des 10 secondes est = 10 liv. & celui des 8 dernières est = 2 liv. La somme donne 30 liv. ; donc le prix du mélange = $\frac{30}{30} = 1$ liv., ce qui est évident.

PROBLÈME XVIII. D'un Tonneau qui contient 100 bouteilles de vin, j'en tire une & je remets une bouteille d'eau, je tire de même une seconde bouteille & je remets autant d'eau & ainsi de suite, on demande combien il restera de vin dans le tonneau quand on aura tiré de cette manière un certain nombre de bouteilles, par exemple, 50 bouteilles. Soit $a = 100$ bouteilles, $b = 1$ bouteille, $d = 50$ bouteilles & n le nombre cherché. Après avoir tiré la première bouteille de vin, il reste dans le

tonneau la quantité de vin $a - b$, après la seconde bouteille il reste $\frac{(a-b)^2}{a}$, après la troisième bouteille il reste $\frac{(a-b)^3}{a^2}$,

& après le nombre des bouteilles n , il reste $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$. En effet la mesure b que l'on puise la seconde fois n'est pas de vin pur, elle n'en contient que $\frac{22}{100} = \frac{(a-b)}{a}$; donc cette mesure b

en contiendra $\frac{b \cdot (a-b)}{a}$, & $(a-b) - b \frac{(a-b)}{a}$ sera ce qui reste de vin après la seconde bouteille; or cette quantité se réduit à $[\frac{(a-b)^2}{a}]$. La troisième bouteille b ne doit donc

contenir de vin que $\frac{b}{a} [\frac{(a-b)^2}{a}] = b \times \frac{(a-b)^2}{a^2}$; donc ce

qui restera de vin après la troisième bouteille sera $\frac{(a-b)^2}{a} - b \times \frac{(a-b)^2}{a^2} = \frac{(a-b)^3}{a^2}$. En général après avoir puisé le

nombre n de bouteilles, il doit rester une quantité de vin $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$

$= d$ (par supposition). Comme la quantité n inconnue se trouve être un exposant, il faut avoir recours aux logarithmes: ainsi

nous aurons $L \cdot [\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}] = L \cdot d$ (L désigne le logarithme

de la quantité qui est à sa droite), ou parce que le logarithme du quotient se trouve en ôtant le logarithme du diviseur de celui du dividende, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus en parlant des logarithmes, & que celui de la puissance d'une quantité se trouve en multipliant le logarithme de cette quantité par l'exposant de la puissance, nous aurons $L \cdot (a-b)^n - L \cdot a^{n-1} =$

$L \cdot d$, ou $n L \cdot (a-b) - (n-1) L \cdot a = L \cdot d$, ou $n L \cdot (a-b) - n L \cdot a + L \cdot a = L \cdot d$, ou (en transposant) $L \cdot a - L \cdot d = n [L \cdot a - L \cdot (a-b)]$; donc

(en divisant) $\frac{L \cdot a - L \cdot d}{L \cdot a - L \cdot (a-b)} = n$, ou $\frac{L \cdot 100 - L \cdot 50}{L \cdot 100 - L \cdot 99}$

$= n$, ou $\frac{2.0000000 - 1.6020600}{2.0000000 - 1.9956355} = \frac{0.3979399}{0.0043645} = 69$ à peu près, c'est-à-dire qu'il restera environ 69 bouteilles de vin, quand on aura puisé 50 bouteilles.

Pour savoir combien de vin contiendra la cinquantième bou-

teille, *par exemple*, il faudroit supposer $n = 49$, & l'expression $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ marqueroit alors ce qui reste de vin dans le tonneau après la quarante-neuvième bouteille. Faisant donc cette proportion, la capacité 100 du tonneau est au vin restant, comme la bouteille qu'on puise est à la quantité de vin que cette bouteille doit contenir; ou $a : \frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} :: b : \frac{b}{a} \times \frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$
 $\Rightarrow \frac{b}{a^n} \times (a-b)^n = x$, on a par les logarithmes, $L \cdot b +$
 $n L \cdot (a-b) - n L \cdot a = L \cdot x$, ou (parce que $L \cdot 1 = 0$ ainsi que nous l'avons dit en parlant des logarithmes) $0 +$
 $49 L \cdot 99 - 49 L \cdot 100 = L \cdot x$, ou $-0.213885 = L \cdot x$. Pour avoir le nombre fractionnaire qui répond à ce logarithme négatif, j'ajoute trois unités à la caractéristique (c'est comme si j'ajoutois à ce logarithme 3.000000). Cherchant donc le nouveau logarithme 2.786115 , je trouve que le nombre le plus approchant auquel il répond est 611; donc (à cause des trois unités ajoutées à la caractéristique) 0.611 exprime ce que la cinquantième bouteille contient de vin à très-peu-près.

PROBLEME XIX. *Un usurier prête 1000 liv. à condition qu'on lui en payera l'intérêt composé, c'est-à-dire, non-seulement l'intérêt, mais encore les intérêts des intérêts, à raison de 4 pour 100 par an. Au bout d'un certain tems l'emprunteur n'ayant rien payé, se libere en donnant 1800 liv. On demande combien d'années se sont écoulées depuis l'emprunt.* Soit f la somme empruntée, r l'intérêt simple, c'est-à-dire, le nombre par lequel il faut multiplier la somme pour avoir l'intérêt de la première année, il est visible que cet intérêt sera rf , & que la somme qu'exigera l'usurier au bout de cette année est $f + rf = f \cdot (1+r)$. Par la même raison la somme exigée au bout de la seconde année sera $f \cdot (1+r) \cdot (1+r) = f \cdot (1+r)^2$. Au bout de la troisième année cette somme deviendra $f \cdot (1+r)^3$ & en général au bout d'un nombre n d'années, cette somme sera $f \cdot (1+r)^n$. Si donc on fait cette somme égale à d , on aura $f \cdot (1+r)^n = d$; donc en désignant par L le logarithme, il est visible que l'on aura $L \cdot f \cdot (1+r)^n = L \cdot d$ (car les quantités égales doivent avoir des logarithmes égaux); donc (parce que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes du multiplieande & du multiplicateur, & que celui d'une puissance d'une quantité est égal au produit de l'exposant de cette quantité par le logarithme de cette même quantité)

$L \cdot f + L \cdot (1+r)^n = L \cdot d$, ou $L \cdot d = L \cdot f + L \cdot (1+r)^n$
 $= L \cdot f + n \cdot L \cdot (1+r)$; d'où l'on tire $L \cdot d - L \cdot f = n \times$
 $L \cdot (1+r)$, & enfin $n = \frac{L \cdot d - L \cdot f}{L \cdot (1+r)}$. Ainsi prenant dans les

tables les logarithmes de d , de f , de $(1+r)$, & faisant les opérations qu'indique la formule, on trouvera le nombre des années n . Nous avons $d = 1800$, & $L \cdot d = 3 \cdot 255273$, $f = 1000$, $L \cdot f = 3 \cdot 000000$, $L \cdot d - L \cdot f = 0 \cdot 255273$, $r = \frac{4}{100}$, $1+r = \frac{104}{100}$, $L \cdot (1+r) = 0 \cdot 017033$. Divisant donc $0 \cdot 255273$, par $0 \cdot 017033$, on a 15 à peu de chose près. Ainsi on dira qu'il y a 15 années depuis l'emprunt. Si nous regardons successivement les quantités f, r, n, d comme inconnues l'équa-

tion $f(1+r)^n = d$, donnera $f = \frac{d}{(1+r)^n}$ & $d = f \cdot (1+r)^n$

la même équation donne $(1+r)^n = \frac{d}{f}$, $1+r = \sqrt[n]{\frac{d}{f}}$, &
 $r = \sqrt[n]{\left(\frac{d}{f}\right)} - 1$. Formules par lesquelles on résoudra la plû-

part des questions qu'on peut faire sur les intérêts composés.

PROBLEME XX. *Il y a 10000 hommes dans une ville dont la population va en augmentant dans un rapport constant, au bout d'un certain tems, par exemple, au bout de 15 ans la population est de 20000 hommes, on demande l'accroissement annuel. Soit 10000 = a, 20000 = b, n = 15, x le nombre des habitants à la fin de la première année. Donc si on fait a : x ::*

x : $\frac{x^2}{a}$, on aura évidemment le nombre des habitants après les deux premières années; & faisant ensuite a : x :: $\frac{x^2}{a}$ à un 4^e.

terme $\frac{x^3}{a^2}$, on aura le nombre d'hommes à la fin de la troisième

année. En général $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ indiquera le nombre d'habitans

après le nombre n d'années. Faisant donc ce nombre = b,

*on aura $\frac{x^n}{a^{n-1}} = b$, $x^n = a^{n-1}b$, $L \cdot x^n = L \cdot a^{n-1}b$, ou $n \cdot L \cdot x$
 $= (n-1) L \cdot a + L \cdot b$, & $L \cdot x = \frac{(n-1) L \cdot a + L \cdot b}{n}$. Mais*

$L \cdot a = 4$, $L \cdot b = 4 \cdot 30103$ (en s'en tenant à 5 décimales); donc

$L \cdot x = \frac{60 \cdot 10103}{15} = 4 \cdot 0200687$, logarithme qui répond à 10472.

Si de ce nombre l'on retranche 10000, on aura 472 pour l'accroissement de la première année, ce qui ne donne pas la $\frac{1}{15}$

partie du tout. Ainsi l'accroissement annuel est plus petit que la partie $\frac{1}{11}$ de 10000.

PROBLEME XXI. Si le nombre a des habitans d'une ville augmente tous les ans de la trentième partie, quel sera ce nombre au bout d'un siècle? Après la première année ce nombre sera

évidemment $a + \frac{a}{30} = a(1 + \frac{1}{30}) = a(\frac{31}{30})$. Si l'on fait $a : a(\frac{31}{30}) :: a(\frac{31}{30}) : a(\frac{31}{30})^2$, on aura le nombre des habitans après la seconde année, & en général après le nombre n d'années, ce nombre sera $a(\frac{31}{30})^n$. En faisant $n = 100$, nous aurons $a(\frac{31}{30})^{100} = x$, nombre cherché; donc $L a + 100 L \cdot (\frac{31}{30}) = L \cdot x$; mais $L \cdot \frac{31}{30} = L \cdot 31 - L \cdot 30 = 0.014240439$ (en employant les tables d'Ulacq). Si donc on suppose $a = 100000$, nous aurons $L x = 6.4240439$, & $x = 2654874$. Tel sera le nombre des habitans après 100 ans, en supposant qu'il ait été de 100000 au commencement du siècle.

PROBLEME XXII. Le monde ayant été peuplé après le déluge par six personnes, les trois enfans de Noë & leurs femmes, de quelle partie a dû croître le genre humain, pour qu'il y ait eu un million d'hommes après 200 ans. Soit n cette partie; Après la première année le nombre des hommes au-

roit été (sans y comprendre Noë) $= 6 + \frac{6}{n} = 6(1 + \frac{1}{n}) = 6(\frac{n+1}{n})$, & au bout de 200 ans il aura été $6(\frac{n+1}{n})^{200} =$

1000000 par supposition; donc $\frac{n+1}{n} = (\frac{1000000}{6})^{\frac{1}{200}}$; donc $L \cdot (\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{200} L \cdot (\frac{1000000}{6}) = \frac{1}{200} (5.2218487) =$

0.0261092 , logarithme qui répond au nombre $\frac{1061961}{1000000} = \frac{n+1}{n}$; ôtant les fractions, transposant & réduisant, il vient

$1000000 = 61961 \cdot n$, & enfin $n = \frac{1000000}{61961} = 16$ à-peu-près. Ainsi l'accroissement annuel auroit été d'un $\frac{1}{16}$ de la population, ce que la santé robuste & la longue vie des hommes de ce tems-là rendent très-possible.

PROBL. XXIII. A quelle puissance faut-il élever le nombre $10 = a$ pour le rendre égal au nombre b . Soit y l'exposant cherché, on aura $a^y = b$, $L \cdot a^y = L \cdot b$,

ou $y \cdot L a = L \cdot b$ ou $y = \frac{L \cdot b}{L a}$. Si on demande à quelle puissance on doit élever le nombre 10 pour le rendre égal à 10000, nous aurons $y = \frac{L \cdot 10000}{L \cdot a} = \frac{10000}{a} = 4$. Ainsi en élevant 10 à la quatrième puissance, on aura 10000.

PROBLEME XXIV. *Huit chevaux ont mangé en 7 semaines les herbes d'un pré de 4 arpens *, tant celles qui étoient crûes, que celles qui ont dû croître pendant que les chevaux païssoient ; 9 chevaux ont mangé de la même manière celles d'un pré de 5 arpens en 8 semaines. Combien faut-il de chevaux pour manger, selon les mêmes conditions, les herbes d'un pré de 6 arpens en 12 semaines ?* Avant de passer plus loin, nous prévenons que la solution que nous allons donner (par une méthode dont nous ne sommes pas les inventeurs) n'est pas bien exacte, pour les raisons que nous dirons bientôt ; cependant comme elle est ingénieuse, nous croyons devoir la rapporter. Je fais le nombre des chevaux qui ont mangé les herbes du premier pré $= a = 8$, le nombre des semaines qu'ils ont employé à manger ces herbes $= c$, l'étendue du premier pré ou 4 arpens $= b$, $9 = d$, $e = 5$, $f = 8$ (je désigne les 8 semaines employées par les 9 chevaux pour manger les herbes du second pré, par f & non par a , afin de rendre la solution générale), $g = 6$, $h = 12$, & le nombre de chevaux cherché $= x$. Cela posé, imaginons que les chevaux qui mangent les herbes de chaque pré sont partagés en deux bandes, dont l'une mange l'herbe contenue au premier instant dans chaque pré, & l'autre mange l'herbe qui croît pendant que les chevaux paissent. Soit y la première bande du premier pré ; la seconde sera $a - y$. Si nous faisons $= z$ la première bande des chevaux du second pré, la seconde sera $d - z$; & si la première bande des chevaux du troisième pré est $= r$, la seconde sera $x - r$.

Cette supposition (que je serai voir un peu plus bas n'être pas exacte) une fois admise, il est clair que les premières ban-

* L'arpent, suivant l'Ordonnance de 1669 pour les Eaux & Forêts, est de 100 perches quarrées, la perche étant supposée de 22 pieds ; mais on ne suit pas par tout cette mesure.

des des chevaux sont entr'elles comme les étendues des prés (dans lesquels on suppose la quantité d'herbe en raison des surfaces) divisées par les tems correspondans. Car il est visible que si l'on a deux quantités d'herbes, l'une de 12, l'autre de 48 quinteaux, & que six chevaux puissent manger la premiere quantité dans 4 jours, 12 chevaux mangeront la seconde quantité dans 8 jours, & les premiers chevaux seront aux seconds comme $\frac{12}{4} : \frac{48}{8} :: 3 : 6 :: 6 : 12$. Revenant donc à notre pro-

blème, nous aurons ces deux proportions $y : z :: \frac{b}{c} :: \frac{e}{f}$; $y : e :: \frac{b}{c} : \frac{g}{h}$. La premiere en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, donne $\frac{y \cdot e}{f} = \frac{b \cdot z}{c}$, ou $c \cdot ey = bf \cdot z$ équation que je désignerai par I. La seconde proportion donnera l'équation $cgy = bhz$ que je désigne par II.

Les secondes bandes $a - y$, $d - z$, $x - e$, qui mangent journellement les herbes qui croissent pendant que les chevaux paissent sont entr'elles comme les étendues des prés, parce que nous supposons que les herbes (tant celles qui étoient d'abord dans les prés, que celles qui repoussent à chaque instant à proportion que les chevaux paissent) croissent uniformement dans tous les prés, & proportionnellement à leur étendue. Nous avons donc les deux proportions $a - y : d - z :: b : e$; $a - y : x - e :: b : g$. Desquelles en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, il est aisé de tirer les deux équations $ae - ey = bd - bz$ (que je désigne par III), & $ag - gy = bx - be$ (que je désigne par IV), les équations I & II donnent $z = \frac{cey}{bf}$, $e = \frac{cgy}{bh}$. Substituant la valeur de z dans l'équation III,

nous trouverons $y = \frac{afe - bdf}{fe - ce}$. Cette valeur de y étant substituée dans l'équation $e = \frac{cgy}{bh}$, il vient $e = \frac{cg(afe - bdf)}{bh(fe - ce)}$.

la même valeur de y substituée dans l'équation $z = \frac{cey}{bf}$ donne

$z = \frac{ce(afe - bdf)}{bf(fe - ce)}$. Mettons les valeurs de y & de e dans l'équation IV, & nous trouverons après les opérations ordinaires,

$x = \frac{aceg \cdot (f - h) + bdfg \cdot (h - c)}{beh(f - c)}$. Substituant main-

tenant les valeurs numériques de a, b, c, d, e, f, g, h , il vient $x = 8$. ainsi le nombre des chevaux cherché est 8, si la méthode qu'on vient d'employer est exacte.

Mais nous avons supposé que les herbes des trois prés croissent uniformément & proportionnellement à l'étendue de ces prés pendant que les chevaux païssoient, supposition qu'on ne sauroit admettre ; car il n'y a pas d'apparence que l'herbe qui a 6 pouces, *par exemple*, croisse en grosseur & en longueur comme celle qui en a 8, ou 3, ou 5, &c. D'autre côté selon que le tems est plus ou moins favorable les herbes croissent plus ou moins dans un jour, dans une heure, &c. De sorte qu'il pourroit arriver que les chevaux qui suffisoient pour manger la quantité d'herbe qui étoit crüe hier dans un pré d'une certaine étendue, ne suffiroient pas pour manger dans le même espace de tems l'herbe qui pourra croître demain dans le même pré. Il est donc visible qu'on ne doit pas regarder la solution que nous venons de donner comme bien rigoureuse, & il n'arrive que trop souvent que les Géomètres donnent des solutions fausses de certains problèmes, parce qu'ils partent des principes peu exacts, & qu'ils n'ont pas bien approfondis : cela peut arriver bien facilement à ceux qui n'ont pas fait une certaine étude de la métaphysique, & de la physique.

DES PROBLEMES INDÉTERMINÉS,

Sémidéterminés & plus que Déterminés.

67. Les *problèmes déterminés* sont ceux pour la solution desquels il y a autant d'équations que d'inconnues. Tels sont les problèmes que nous avons résolus jusqu'ici. On appelle *problème indéterminé*, un problème pour la solution duquel il y a moins d'équations que d'inconnues, parceque, pour la résoudre, il est nécessaire de déterminer arbitrairement une ou plusieurs inconnues. Si, *par exemple*, on demandoit deux nombres x & y , dont la somme fût 10, l'on auroit l'équation $x + y = 10$, ou $x = 10 - y$. Pour résoudre ce problème, supposons $y = 9$, afin d'avoir $x = 10 - 9 = 1$. Si

l'on suppose $y = 8$, l'on aura $x = 2$. En général on voit que ce problème a une infinité de solutions: car on peut supposer y égal à un nombre négatif ou positif, entier ou fractionnaire; de sorte que l'on peut faire une infinité de suppositions arbitraires. Mais si l'on exigeoit que les deux nombres x & y fussent entiers & positifs, il est évident qu'il n'y auroit que 9 solutions possibles, & qu'on pourroit seulement supposer $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Dans le cas où l'on ajoute des conditions aux problèmes indéterminés (ces conditions peuvent quelque fois rendre le nombre des solutions déterminé, ou faire voir que dans certains cas le problème n'a point de solution), ces problèmes prennent le nom de *sémi-déterminés*. Si le nombre des équations d'un problème surpasse celui des inconnues, le problème est plus que déterminé & la solution en est souvent impossible, tel seroit celui-ci: trouver deux nombres x & y , dont la somme $= 8$, la différence $= 2$ & le produit $= 12$. On aura donc ces trois équations, $x + y = 8$, $x - y = 2$, $xy = 12$. La seconde donne $x = 2 + y$; cette valeur de x substituée dans la première donne $2 + y + y = 8$, ou $2 + 2y = 8$, ou $2y = 8 - 2 = 6$, & $y = 3$. Substituant cette valeur de y dans la seconde, l'on a $x - 3 = 2$, ou $x = 5$; donc $xy = 5 \times 3 = 15$. Mais xy doit être $= 12$, par la troisième condition; donc le problème est impossible. Si l'on avoit exigé que le produit des nombres cherchés fût 15, la solution du problème auroit été possible; mais cette troisième condition qui suit des deux premières auroit été superflue. On connoît qu'il y a des conditions superflues exprimées par les équations, lorsqu'on parvient à une *équation identique*, c'est-à-dire,

c'est-à-dire , à une équation telle que les quantités qui composent le premier membre, sont les mêmes que celles qui composent le second. *Par exemple* , dans le problème ci-dessus nous avons $x + y = 8$, $x - y = 2$; & supposant que la troisième condition exige que xy soit $= 15$, nous aurons par les deux premières équations, $x = 5$, & $y = 3$; ces valeurs substituées dans la troisième $xy = 15$, donnent $15 = 15$. La raison en est que les conditions identiques doivent donner des expressions identiques, comme les conditions différentes donnent des expressions différentes. En général il y aura autant d'équations identiques qu'on aura employé d'équations inutiles. Lorsque dans la solution d'un problème , après avoir rempli toutes les conditions, l'on arrive à une équation identique , c'est une marque que toutes les quantités du genre de celles dont on parle, ont les conditions requises , & que c'est un théorème & non un problème qu'on propose. Supposons , *par exemple* , que dans la série des nombres naturels 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , &c. on demande quatre nombres de suite , tels que la somme des extrêmes soit égale à celle des moyens. Appellons ces nombres x, y, z, p ; par la nature de la série , $x + 1 = y$, $y + 1 = z$, & $z + 1 = p$; par la condition du problème , $x + p = y + z$; par les deux premières équations , $x + 2 = z$; par celle-ci & la troisième , $x + 3 = p$. Substituant dans la quatrième les valeurs de y, z, p , il vient $2x + 3 = 2x + 3$, équation identique qui fait voir que quatre nombres quelconques successifs de la série 1 , 2 , 3 &c. sont toujours tels que la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens : ainsi c'est un théorème & non un problème.

Si l'on parvient à une équation identique, sans avoir exprimé toutes les conditions du problème, c'est une marque d'erreur, ou que l'on a pris une condition superflue, & omis quelque condition nécessaire. On peut encore remarquer que les conditions superflues peuvent faire paroître un problème déterminé, quoique réellement il soit indéterminé. *Par exemple*, qu'on demande quatre nombres x, y, z, u dont la somme des moyens soit égale à celle des extrêmes, que celle des extrêmes soit 5, & le triple de celle des moyens 15. Par la première condition $x + u = y + z$; par la seconde & la première $y + z = 5$, & $x + u = 5$; par la troisième $3y + 3z = 15$. Nous avons autant d'équations que d'inconnues, & l'on pourroit croire le problème déterminé; mais si dans la première équation, à la place du premier & du second membre, on substitue leurs valeurs prises dans les autres équations, il vient $5 = 5$. De même si dans la quatrième on substitue la valeur de $y + z$ prise dans la seconde, on aura $15 = 15$. Ainsi il y a quelque condition superflue, & en effet celle-ci $y + z = 5$ suit évidemment de $x + u = y + z$, & de $x + u = 5$; de même $3y + 3z = 15$ suit de $x + u = y + z$, & de $x + u = 5$. Et parce qu'il n'y a aucun moyen de trouver deux autres équations réellement différentes, le problème est indéterminé. Il faut donc faire beaucoup d'attention, afin de trouver les équations nécessaires pour la solution d'un problème, sans en introduire de superflues.

Dans les problèmes semi-déterminés que nous allons résoudre, nous supposerons à l'égard de ceux du premier degré, qu'on demande des nombres entiers & positifs.

PROBLEME I. On demande deux nombres x , y , tels que $3x - 5y = 9$. Donc $3x - 9 = 5y$, & $y = \frac{3x - 9}{5}$, qui doit être un nombre entier & positif ;

ainsi $3x > 9$ & $x > 3$, autrement y feroit négatif. En second lieu pour que y soit un nombre entier, il faut que $3x - 9$ soit exactement divisible par 5 ; mais parce que les seuls nombres terminés en 0, ou en 5, sont divisibles par 5, il faut que $3x - 9$ soit un nombre terminé en 0 ou en 5 ; or pour que $3x - 9$ soit terminé en 0, il est nécessaire que $3x$ soit terminé en 9, & pour que $3x - 9$ soit terminé en 5, $3x$ doit être terminé en 4 ; de sorte qu'aucun nombre ne peut être admis pour la valeur de x excepté ceux qui, multipliés par 3, se terminent en 9 ou en 4. Ainsi le plus petit possible est 8, viennent ensuite 13, 18, &c. auxquels répondent $y = 3, 6, 9$, &c. comme on le voit $x = 8, y = 3$ dans la table. On peut remarquer que les nombres qui représentent x , forment une progression arithmétique dont la différence est 5 ; &c. &c. mais la différence de la progression des nombres qui représentent y , est seulement 3 ; de sorte qu'en continuant les deux progressions à l'infini, l'on aura une infinité de solutions. Si l'on prend 13 pour x , on prendra pour y la valeur correspondante 6, & l'on aura $3x - 5y = 39 - 30 = 9$. Si l'on suppose $x = 18$, il faudra prendre 9 pour la valeur de y , & l'on aura de même $3x - 5y = 54 - 45 = 9$, & ainsi de suite.

PROBLEME II. On demande deux nombres x & y tels que le triple du premier joint au double du second donne 20, ou tels que $3x + 2y = 20$. Donc $x =$

$\frac{20-2y}{3}$. Pour que x soit entier & positif il faut que $20 \geq 2y$ & $10 > y$. De même il faut que $x < 7$, autrement $y = \frac{20-3x}{2}$ ne sauroit être un nombre entier & positif. L'équation $x = \frac{20-2y}{3}$ se réduit à celle-ci $x = 6 + \frac{2-2y}{3} = 6 + 2 \times \frac{1-y}{3}$. Pour que la fraction donne un entier, en supposant $y < 10$. Il est facile de voir que y ne peut avoir d'autres valeurs que 7, 4 & 1, auxquelles répondent les valeurs de $x = 2, 4, 6$. On peut remarquer qu'il importe peu que le nombre entier qui doit résulter de la fraction, soit négatif, pourvu que y ne passe pas $y=7$ $x=2$ les limites prescrites. Ici, par exemple, y ne doit pas être au-dessous de $\frac{4}{1}$ $\frac{4}{6}$ 1, ni au-dessus de 9.

PROBLEME III. On demande deux nombres x & y tels que $33x = 76 + 59y$. Donc $x = \frac{76+59y}{33}$.

Parce que l'un & l'autre terme de la fraction peut être divisé par le dénominateur, on aura en faisant cette division, $x = 2 + y + \frac{10+26y}{33}$. Voyons

maintenant si les termes du numérateur n'ont pas un facteur commun, ils en ont un $= 2$: ainsi réduisant la fraction, nous aurons $\frac{2 \times (5+13y)}{33}$. Fai-

sant $\frac{5+13y}{33} = p$, nombre entier ; le double de cette fraction sera aussi un nombre entier. Nous appellerons *fractions réduites* les fractions pures (ce sont celles qu'on ne peut plus réduire) dans les-

quelles les termes du numérateur sont premiers entr'eux. De l'équation $\frac{5 + 13y}{33} = p$, on tire $y = \frac{33p - 5}{13}$, ou en réduisant la fraction, $y = 2p + \frac{7p - 5}{13}$. Faisons maintenant $\frac{7p - 5}{13} = q$ nombre entier, on trouvera $p = \frac{13q + 5}{7}$, & en réduisant la fraction, $p = q + \frac{6q + 5}{7}$. Supposons $\frac{6q + 5}{7} = r$ nombre entier, on aura $q = r + \frac{r - 5}{6}$. Soit enfin $\frac{r - 5}{6} = t$ (nombre entier); donc $r - 5 = 6t$ & $r = 5 + 6t$. Cette équation donne pour r un nombre entier, puisque t par supposition est un nombre entier. En rétrogradant nous avons $q = 7t + 5$, $p = 13t + 10$, $y = 33t + 25$. Cette valeur de y étant substituée dans l'équation $x = \frac{76 + 59y}{33}$ donne $x = 47 + 59t$, équation qui fait voir qu'en substituant à la place de t un nombre entier positif, x sera toujours un nombre entier positif. Si l'on suppose $t = 1$, 106 sera le plus petit nombre qui puisse représenter x .

Supposons $a = 5$, $d = 13$, $c = 33$; la première fraction réduite devient $p = \frac{a + dy}{c}$. Si l'on fait attention à la suite des opérations précédentes, on pourra voir dans quel cas on peut substituer des valeurs de y qui rendent x entier & positif; car dans la nouvelle fraction qui résulte de la première on divise c par d (d représente le coefficient de l'inconnue y , p , &c. dans chaque fraction réduite, &

c le dénominateur de chaque fraction réduite), & l'on a pour reste une nouvelle fraction réduite, dans laquelle on divise encore c par d , premier reste, ensuite celui-ci par le second reste, &c. (On entend ici par reste le multiplicateur de l'inconnue dans la fraction réduite). Si d & c sont premiers entr'eux, on doit arriver à la fin à un reste égal à l'unité (14.) ; ce qui étant fait, l'on a ce que l'on cherche. Car faisant la dernière fraction égale à une nouvelle inconnue, on pourra assigner à cette inconnue une valeur en nombres entiers & positifs. Mais si d & c ne sont pas premiers, il est impossible d'arriver à un reste $= 1$. Soit la fraction réduite $\frac{a+dy}{c}$, a & d étant premiers entr'eux, d & c ne l'étant pas. Supposons que leur diviseur commun soit n , il est clair que n ne divisera pas a , autrement a & d ne seroient pas premiers entr'eux. Faisons $d = nf$, $c = ng$, notre fraction deviendra $\frac{a+nfy}{ng} = p$; donc $\frac{a}{n} + fy = gp$ (nombre entier), & parce que fy est aussi un nombre entier, $\frac{a}{n}$ seroit un nombre entier & a seroit divisible par n , ce qui est impossible; donc, &c. En effet supposons la fraction réduite $\frac{5+11y}{33}$ dans laquelle d & c , c'est-à-dire 11 & 33 ne sont pas premiers entr'eux. Faisons $\frac{5+11y}{33} = p$; donc $y = 3p - \frac{5}{11}$; mais y & p étant des nombres entiers, il est évident que cette équation ne peut jamais avoir lieu. On peut donc connoître par-là dans quel cas une fraction réduite peut, ou ne peut pas être un entier,

en supposant y entier, ou dans quel cas la méthode précédente peut réussir.

PROBLÈME VI. *Un Cuisinier a acheté des perdrix & des lapins ; il a payé chaque perdrix 31 sols, & chaque lapin 20 sols. Il se trouve que les lapins lui ont coûté 7 sols de plus que les perdrix, combien a-t-il acheté de perdrix & de lapins ?* Supposons que x est le nombre des lapins, & que y désigne celui des perdrix. Par la nature du problème on aura

$$20x = 31y + 7, \text{ \& } x = \frac{31y + 7}{20} = y + \frac{11y + 7}{20} \\ = y + r \text{ (en faisant la fraction } = r \text{)}; \text{ donc } 20r \\ = 11y + 7, \text{ \& } y = \frac{20r - 7}{11} = r + \frac{9r - 7}{11} = r \\ + f; \text{ donc } 11f = 9r - 7, \text{ \& } r = \frac{11f + 7}{9} = f + \frac{2f + 7}{9} \\ = f + t; \text{ ainsi } 9t = 2f + 7, \text{ \& } f = \frac{9t - 7}{2} \\ = 4t + \frac{t - 7}{2} = 4t + u. \quad x = 5 \quad y = 3$$

C'est pourquoi $2u = t - 7$, & $t = 2u + 7$; donc $f = 4t + u = 9u + 28$; $r = f + t = 11u + 35$; $y = r + f = 20u + 63$ nombre des perdrix; & $x = y + r = 31u + 98$ nombre des lapins. Il est visible que les plus petites valeurs positives de x & de y se trouvent en faisant $u = -3$; celles qui sont plus grandes se suivent en progression arithmétique comme le fait voir la table.

PROBLÈME. *Un orfèvre a trois lingots d'or, le premier contient 7 onces d'or par marc, le second $5\frac{1}{2}$, & le troisième $4\frac{1}{2}$; il veut faire un alliage de 30 marcs, de manière que le marc de cet alliage con-*

tienne six onces d'or. Comment doit-il s'y prendre ? Qu'il prenne x marcs du premier lingot, y marcs du second, & z marcs du troisième, pour avoir 1°. l'équation $x + y + z = 30$; 2°. il est visible que $7x + 5\frac{1}{2}y + 4\frac{1}{2}z$ exprimera la quantité d'or qui doit se trouver dans l'alliage, c'est-à-dire, 30 fois 6 onces d'or, ou 180 onces; donc $7x + 5\frac{1}{2}y + 4\frac{1}{2}z = 180$. multipliant la première équation par 9 & la retranchant ensuite de celle-ci multipliée par 2, il vient $5x + 2y = 90$; d'où l'on tire $2y = 90 -$

$$5x, y = 45 - \frac{5x}{2} = 45 - 5u, \text{ en faisant } \frac{x}{2} = u.$$

Mais $z = 30 - x - y$: donc $z = 3u - 15$; ainsi u doit être plus grand que 4, & plus petit que 10. Cependant il ne peut pas être $= 5$, autrement z seroit $= 0$, il ne peut pas non plus être $= 9$, parce que dans ce cas y seroit $= 0$; de sorte que le problème admet les solutions qu'indique la table.

$$x = 6, \quad x = 12, \quad y = 15, \quad z = 3$$

$$7 \qquad 14 \qquad 10 \qquad 6$$

$$8 \qquad 16 \qquad 5 \qquad 9$$

PROBLEME. VI. Les faisans se vendant deux écus, les perdrix un écu & les cailles $\frac{1}{2}$ écu, un seigneur ordonne à son maître-d'hôtel de lui acheter cent de ces oiseaux ne lui donnant pour cela que 70 écus, comment pourra s'y prendre le maître-d'hôtel? Par la nature du problème en faisant le nombre des faisans cherché $= x$, celui des perdrix $= y$, & celui des cailles $= z$, on aura ces deux équations $x + y + z = 100$, $2x + y + \frac{1}{2}z = 70$. De la seconde

multipliée par 2, retranchez la première, pour avoir $3x + y = 40$; ainsi il est visible que x est $< \frac{40}{3}$ ou < 14 , & $y < 40$. Considérons maintenant la formule $y = 40 - 3x$. Si l'on fait $x = 13$, on trouve $y = 1$, & $z = 86$. Si $x = 12$, y sera $= 4$, & $z = 84$, & ainsi de suite. La table fait voir qu'il y a treize solutions.

$x =$	$y =$	$z =$
13	1	86
12	4	84
11	7	82
10	10	80
9	13	78
8	16	76
7	19	74
6	22	72
5	25	70
4	28	68
3	31	66
2	34	64
1	37	62

PROBLEME VII. Trente bêtes ont coûté 75 écus; les moutons coûtent 5 écus, les brebis 3, & les agneaux 2; on demande le nombre des moutons x , celui des brebis y , & celui des agneaux z . Il est évident par la nature du problème, que les moutons ont coûté $5x$, les brebis $3y$, & les agneaux $2z$. Donc on a l'équation $5x + 3y + 2z = 75$. De plus, puisqu'il y a 30 bêtes, on a $x + y + z = 30$. Multipliant la seconde équation par 2, & la retranchant ensuite de la première, le premier membre du premier membre, le second du second (ce qui évidemment ne détruit point l'égalité, puisque de quantités égales on ôte seulement des quantités égales), il vient $3x + y = 15$, ce qui fait connoître que $y < 15$, & $x < 5$. Multipliant la seconde équation par 3, & du produit ôtant la première, l'on a $-2x + z = 15$; mais $2x < 10$, puisque $x < 5$; donc $z < 25$. Parce que la limite de x est plus petite que celle de y , servons nous de l'équation $3x + y = 15$, qui nous donne $y = 15 - 3x$. Faisant usage de cette première équation & de $z = 15 + 2x$, si nous supposons $x = 4$, nous aurons $y = 3$ & $z = 23$. La table fait voir les solutions qu'admet le problème, où l'on voit aussi les séries & les différences des séries des valeurs correspondantes de x, y, z .

$x =$	$y =$	$z =$
4	3	23
3	6	21
2	9	19
1	12	17

PROBLEME VIII. On a acheté 30 bouteilles de différens vins

75 liv. Le vin de Bourgogne coûte 5 liv. la bouteille, celui de Champagne 3 liv. & celui de Cahors 2 liv. On demande le nombre des bouteilles de chaque espece de vin ? Il est visible qu'en appellant x le nombre des bouteilles du premier vin, y le nombre des bouteilles du second, & z celui des bouteilles du troisième, on aura les équations suivantes $x + y + z = 30$; $5x + 3y + 2z = 75$, desquelles on tirera les mêmes valeurs numériques de x , y & z que dans le problème précédent.

PROBLEME IX. Supposant qu'un voyageur n'a que trois especes de monnoie, les pieces de la premiere espece valent 5 liv. celle de la seconde 3 liv. & celle de la troisième 2 liv. Il a dépensé 75 liv. qu'il veut payer en 30 pieces, combien de pieces doit-il donner de chaque espece ? Soit x le nombre cherché des pieces de la premiere espece, y celui des pieces de la seconde espece, z celui des pieces de la troisième espece ; il est évident que nous aurons les deux équations $x + y + z = 30$; $5x + 3y + 2z = 75$, d'où nous tirerons les mêmes valeurs numériques de x , y & z que dans l'avant dernier problème : ainsi ce voyageur peut payer sa dépense de quatre manieres différentes.

PROBLEME X. Trois marchands ont chacun un certain nombre d'écus, de maniere que si on multiplie le nombre des écus du premier par 3, le nombre des écus du second par 5, & le nombre des écus du troisième par 7, la somme des produits est = 560 ; mais si l'on multiplie le premier nombre par 9, le second par 25, & le troisième par 49, la somme des produits sera 2920, on demande le nombre des écus de chacun. Soit x le nombre des écus du premier marchand, y le nombre des écus du second, & z le nombre des écus du troisième. On aura donc les deux équations $3x + 5y + 7z = 560$; $9x + 25y + 49z = 2920$. Multipliant la premiere par 3 & la retranchant ensuite de la seconde, il restera $10y + 28z = 1240$; donc $5y + 14z = 620$; d'où l'on tire $y = 124 - \frac{14z}{5}$. Il est donc nécessaire que z soit divisible par 5. Ainsi faisant $u = \frac{z}{5}$ ou $5u = z$, nous aurons $y = 124 - 14u$; c'est pourquoi la premiere équation deviendra $3x - 35u + 620 = 560$, ou $3x = 35u - 60$, & $x = \frac{35u}{3} - 20$. Si l'on fait $u = 3$, on trouvera $x = 35$.

— 20, $y = 124 - 42t$, & $t = 1$, $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$
 $z = 15t$. Or il est visible que t doit être < 3 , autrement y se-
 roit négatif ; de maniere que l'on est borné aux deux solutions
 qu'on voit dans la table.

PROBLEME XI. *Disposer 20 chevaux dans cinq écuries de maniere qu'il y en ait un nombre impair dans chacune.* Soit f le nombre des chevaux qu'il doit y avoir dans la premiere écurie, t celui de la seconde, x celui de la troisième, y celui de la quatrième, & z celui de la cinquième. Comme f & t doivent être des nombres impairs, leur somme $f + t$ sera évidemment un nombre pair que je fais $= p$. Par la même raison $x + y$ sera un nombre pair que je suppose $= q$; mais $p + q$, somme de deux nombres pairs est aussi un nombre pair que je fais $= n$. Si au nombre n j'ajoute z , nombre impair, la somme $n + z$ des deux nombres, dont l'un est pair, & l'autre impair, sera évidemment un nombre impair ; donc le nombre des chevaux devroit être impair. Mais ce nombre est 20 nombre pair ; donc le problème est impossible. On prouvera de même qu'il n'est pas possible de placer 100 chevaux dans sept écuries de maniere qu'il y en ait un nombre impair dans chacune, parce qu'alors sept nombres impairs donneroient un nombre pair, c'est-à-dire, que la somme d'un nombre impair de nombres impairs donneroit un nombre pair, ce qui est impossible.

Il arrive souvent qu'on ne parviendroit jamais à la solution d'un problème, si l'on ne faisoit attention à quelques propriétés singulieres des quantités qui peuvent le résoudre ; c'est ce qu'on peut facilement remarquer dans l'exemple suivant.

PROBLEME XII. *Trouver un nombre parfait, c'est-à-dire, un nombre égal à la somme de ses diviseurs e.* Parmi ces diviseurs nous ne comptons pas le nombre lui-même, autrement le problème seroit absurde. Je remarque que lorsqu'une progression géométrique commence par l'unité & que son second terme est un nombre premier, aucun de ses termes ne peut être divisé exactement que par quelqu'un de ceux qui précèdent, comme il est facile de s'en appercevoir dans la progression $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16$ &c. (A). Je fais encore attention que dans la progression A, 1°. Chaque terme est égal à la somme des termes précédens augmentée de l'unité ; 2°. Que si l'on multiplie un des termes par un nombre premier, le produit

ne peut être divisé que par le terme qu'on a pris, par ceux qui le précédent, par le multiplicateur premier, & par les produits de ce multiplicateur par les termes précédens de la progression. Soit $d = 2$, la progression A deviendra $\div d^0 : d : d^2$ &c. Soit encore d^n le terme cherché, x le multiplicateur premier par lequel on doit multiplier le terme d^n pour avoir $d^n x$ nombre parfait cherché. Tous les diviseurs de ce produit sont $d^0 = 1, d, d^2, d^3 \dots d^n, x, dx, d^2x \dots d^{n-1}x$; & parce que d^n est égal à la somme de tous ses diviseurs, on aura $d^n x = 1 + d + d^2 \dots + d^n + x + dx + d^2x \dots + d^{n-1}x$. D'où l'on tirera aisément $d^n x - x - dx - d^2x \dots - d^{n-1}x = 1 + d + d^2 \dots + d^n$, & $x = \frac{1 + d + d^2 \dots + d^n}{d^n - 1 - d - d^2 \dots - d^{n-1}}$. Mais $d^n = (1 + d + d^2 \dots + d^{n-1}) + 1$; donc $d^n - 1 - d - d^2 \dots - d^{n-1} = 1$, c'est-à-dire, que le dénominateur de la valeur de x est l'unité, & par conséquent $x = 1 + d + d^2 \dots + d^n$. D'autre côté x doit être un nombre premier; ainsi si on ajoute les uns avec les autres les termes de la progression $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$ &c. jusqu'à ce que la somme donne un nombre premier, & qu'on multiplie cette somme par le dernier terme qu'on a pris, le produit sera un nombre parfait, & l'on pourra de cette manière en trouver tant qu'on voudra. En prenant les deux premiers termes 1 & 2, on a 3 nombre premier, & multipliant ce nombre par 2 dernier terme pris, on a 6 nombre parfait; car il est égal à la somme de tous ses diviseurs, 1, 2, 3. De même prenant les trois premiers termes 1, 2, 4, on trouve 7 nombre premier qui, étant multiplié par 4, donne 28, autre nombre parfait égal à tous ses diviseurs 1, 2, 4, 7, 14; & ainsi de suite.

68. Venons maintenant à une autre espèce de problèmes dans lesquels nous supposerons que les quantités inconnues ne sont pas sourdes ou incommensurables : comme seroit, *par exemple*, la quantité $\sqrt{3}$.

PROBLEME I. *Trouver deux nombres dont la somme des quarrés soit un nombre quarré.* Si au quarré $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$, on ajoute un autre quarré $4x^2y^2$, la somme sera $= x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, quarré de

$x^2 + y^2$; donc les nombres cherchés sont $x^2 - y^2$ & $2xy$, dont la somme des quarrés égale le quarré de $x^2 + y^2$. Ainsi l'on peut donner à x & à y telles valeurs que l'on voudra, pourvu que ces valeurs ne soient point des quantités fourdes ou irrationnelles. Si l'on suppose $x = 3$ & $y = 2$, on aura $x^2 - y^2 = 9 - 4 = 5$, $2xy = 12$, & $25 + 144 = 169$, quarré de $x^2 + y^2 = 13$.

PROBLEME II. *Trouver deux nombres quarrés dont la différence soit un quarré.* Soit $x + y$ l'un de ces nombres, $x - y$ l'autre nombre, leurs quarrés sont $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - 2xy + y^2$, dont la différence $4xy$ doit être un nombre quarré ; mais la racine $2\sqrt{xy}$ est nécessairement un nombre pair (parce que le double d'un nombre pair ou impair est nécessairement pair). Soit donc $2n$ cette racine, l'on aura $4xy = 4nn$; & $xy = nn$; ce qui fait voir que xy est un nombre quarré. Ainsi si l'on divise un quarré quelconque nn en deux facteurs, dont l'un soit pris pour x , & l'autre pour y , le problème sera résolu. Soit supposé $nn = 4$, si l'on fait $x = 4$ & $y = 1$, les nombres cherchés $x + y$, $x - y$ seront 5 & 3, dont les quarrés sont 25 & 9 ; or la différence de ces quarrés est $= 16$ nombre quarré.

PROBLEME III. *Trouver deux nombres x & y tels que le quarré du premier joint au second soit égal au quarré du second joint au premier.* On aura donc $x^2 + y = y^2 + x$, ou $x - y = x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y)$; donc en divisant par $x - y$, $1 = x + y$; & partant si l'on partage l'unité en deux parties quelconques, ces deux parties résoudront le problème. Ainsi si l'une des parties est $\frac{2}{3}$ & l'autre $\frac{1}{3}$, on aura $\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}$.

PROBLEME IV. *Diviser un nombre quarré aa en deux*

autres quarrés x^2 & y^2 . Par la nature du problème l'on aura $a^2 = x^2 + y^2$ (A), $a^2 - x^2 = y^2 = (nx - a)^2$, en faisant $y = nx - a$; donc l'équation A deviendra $a^2 = x^2 + n^2xx - 2anx + a^2$, ou en transposant & effaçant les termes qui se détruisent, $2nax = xx + n^2xx$, ou $2na = (1 + n^2)x$; donc $x = \frac{2na}{1 + n^2}$. Si on prend donc pour x & pour n des nombres rationnels, y fera aussi rationnel. Soit $n = 2$, x fera $= \frac{4a}{5}$. C'est pourquoi si on suppose $a = 5$, & par conséquent $a^2 = 25$, on aura $x = 4$ & $y = nx - a$ fera $= 3$; ainsi les nombres cherchés x & y seront 4 & 3, & la somme 16 + 9 de leurs quarrés sera égale au quarré $a^2 = 25$.

PROBLEME V. Etant donnés deux nombres quarrés aa , bb partager leur somme $aa + bb$ en deux autres quarrés. Soit $x - a$ la racine d'un des quarrés cherchés, $nx - b$ la racine de l'autre; nous aurons donc $(x - a)^2 + (nx - b)^2 = a^2 + b^2$, ou $x^2 - 2ax + a^2 + n^2x^2 - 2nbx + b^2 = a^2 + b^2$; & en transposant & effaçant les quantités qui se détruisent, $x^2 + n^2x^2 = 2nbx + 2ax$, & en divisant par x , $x + n^2x = 2nb + 2a$; d'où l'on tire $x = \frac{2nb + 2a}{1 + n^2}$. On pourra donc satisfaire à la question proposée, en prenant pour n un nombre rationnel, excepté l'unité; car si on faisoit $n = 1$, on auroit $x = b + a$, & le nombre $x - a$ seroit $= b$; de sorte que dans ce cas la somme $a^2 + b^2$ ne seroit pas partagée en deux quarrés différens de a^2 & b^2 . Si on suppose $n = 2$, l'on a $x = \frac{4b + 2a}{5}$. Si donc on suppose encore $b = 2$, $a = 3$, il viendra $x =$

$\frac{14}{5}$, $x - a = -\frac{1}{5}$, & $nx - b = \frac{28}{5} - 2 = \frac{18}{5}$.
Les quarrés de ces nombres $\frac{1}{5}$ & $\frac{18}{5}$ étant ajoutés ensemble donnent $\frac{325}{25} = 13$, somme de deux quarrés $4 + 9 = a^2 + b^2$.

PROBLEME VI. On demande un nombre x , qui ajouté à deux nombres donnés a & b , les rende quarrés. Par la nature du problème $a + x$ sera un quarré parfait, aussi-bien que $b + x$. Soit $m + n$ la racine du premier quarré & supposons que $m - n$ soit celle du second, nous aurons,

$$a + x = mm + 2mn + nn. \text{ A}$$

$$b + x = mm - 2mn + nn. \text{ B}$$

$$a - b = 4mn.$$

Ainsi si on prend le quart mn de la différence des nombres donnés, & qu'on le divise en deux facteurs m & n , les racines des quarrés qui résoudront le problème, seront $m + n$ & $m - n$. Or l'un quelconque de ces quarrés suffira pour trouver la valeur de x par le moyen des équations A ou B. Soit $a = 17$, $b = 5$, on aura $a - b = 12$ & $mn = 3$. Ayant donc pris $m = 3$ & $n = 1$, pour avoir $m + n = 4$, $m - n = 2$, il viendra $a + x = 16$ & $x = -1$ (l'équation $b + x = 4$ donne aussi $x = -1$) & il est visible que $17 - 1 = 16$, & $5 - 1 = 4$ sont des nombres quarrés.

PROBLEME VII. Titius & Alexandre ont chacun un certain nombre de louis, de maniere que si l'on ajoute le produit de ces nombres à leur somme, le résultat donne 79; quel est le nombre des louis de chacun? Soit x le nombre des louis de Titius, y le nombre des louis d'Alexandre. Par la nature du problème $xy + x + y = 79$; donc $xy + y = 79 - x$, & $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x + 1}$. Il faut donc que $x + 1$ soit un diviseur de

80. Si l'on veut que x & y soit des nombres entiers positifs ou 0, on aura les solutions indiquées par la table.

Diviseurs de 80	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
$x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
$y =$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

PROBLEME VIII. m , a , b & c étant des nombres donnés, on demande la valeur de x & de y en nombres entiers, lorsqu'on a l'équation $mxy = ax + by + c$. On aura donc $y = \frac{ax + c}{mx - b}$, $my = \frac{max + mc}{mx - b} = a + \frac{mc + ab}{mx - b}$, & par conséquent le numérateur de cette fraction doit être divisible par le dénominateur; c'est pourquoi en faisant le numérateur $= fg$, & $mx - b = f$ ou $x = \frac{f + b}{m}$, $f + b$ doit être divisible par m . Ainsi parmi les facteurs de $mc + ab$ on ne peut employer que ceux qui, étant ajoutés à b , donnent une somme divisible par m .

PROBLEME IX. Alexandre a un nombre x de louis & Titius un nombre y tels que $5xy = 2x + 3y + 18$, quel est le nombre des louis d'Alexandre & celui de Titius? On aura $y = \frac{2x + 18}{5x - 3}$ & $5y = \frac{10x + 90}{5x - 3} = 2 + \frac{96}{5x - 3}$. Il ne s'agit donc que de trouver parmi les diviseurs de 96 ceux qui, ajoutés à 3, donnent des nombres divisibles par 5; mais les diviseurs de 96 étant 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, il est facile de voir qu'il n'y a que 2, 12, 32 qui aient la condition requise. Si l'on fait $5x - 3 = 2$, on aura $x = 1$ & $y = 10$; l'équation $5x - 3 = 12$ donne $x = 3$ & $y = 2$. Enfin la supposition de $5x - 3 = 32$ donnera $x = 7$ & $y = 1$.

REMARQUE. Comme dans la solution générale l'on a $my = a + \frac{mc + ab}{mx - b}$, il n'est pas difficile de voir que si un nombre de la forme $mc + ab$ est divisible par $mx - b$, le quotient est nécessairement renfermé dans la forme $my - a$. Ainsi l'on peut représenter $mc + ab$ par $(mx - b) \cdot (my - a)$. Si l'on avoit $m = 12$, $b = 7$, $a = 5$ & $c = 15$, on trouveroit $12y - 5$

$= \frac{215}{12x-7}$. Les diviseurs de 215 sont 1, 5, 43, 215, parmi lesquels il faut choisir ceux qui sont compris dans la formule $12x - 7$. Le seul diviseur 5 satisfaisant à cette condition, on a $12x - 7 = 5$, & $12y - 5 = 43$; donc $x = 1$ & $y = 4$.

PROB. X. Titius a un nombre x & Alexandre un nombre y de chevaux, de manière que $xx + xy = 2x + 3y + 29$; quel est le nombre des chevaux de chacun? On aura $y = \frac{2x - xx + 29}{x - 3}$

$= -x - 1 + \frac{26}{x - 3}$; $x - 3$ doit donc être un diviseur de 26, & la division étant supposée faite, le quotient sera $y + x + 1$; mais les diviseurs de 26 sont 1, 2, 13, 26: Ainsi nous aurons les solutions suivantes, si $x - 3 = 1$, ou si $x = 4$, on aura $y + x + 1 = y + 5 = 26$, & $y = 21$. Si $x - 3 = 2$, on aura $x = 5$ & $y = 7$. Si $x - 3 = 13$, on aura $x = 16$ & $y = -14$: Cette dernière valeur étant négative ne peut pas servir, & c'est pour la même raison qu'on ne peut pas supposer $x - 3 = 26$.

PROBLEME XI. On demande de rendre rationnelle la quantité $\sqrt{a + bx}$. Soit $a + bx = yy$, on aura $x = \frac{yy - a}{b}$, & quel que nombre que l'on substitue à la place de y , il en résultera toujours pour x une valeur telle que $a + bx$ sera un carré, & par conséquent $\sqrt{a + bx}$ une quantité rationnelle.

PROBLEME XII. Rendre rationnelle la formule $\sqrt{1 + xx}$. Il est clair que les valeurs de x ne peuvent être des nombres entiers; il faut donc se borner à chercher des nombres fractionnaires. Soit $1 + xx = x + t$; donc $1 + x^2 = xx + 2tx + t^2$; d'où l'on tire $2tx + t^2 = 1$, & $x = \frac{1 - t^2}{2t}$. Si à la place de t on substitue un nombre entier ou fractionnaire, il en résultera pour x une valeur qui résoudra le problème.

blème. Soit $t = \frac{m}{n}$, on aura $x = \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{2 \frac{m}{n}} = \frac{nn - mm}{2mn}$

(en multipliant les deux termes de la fraction par nn). Donc $1 +$

$$xx = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{4mmnn}, \text{ \& } \sqrt{(1 + xx)} = \frac{nn + mm}{2mn}. \text{ Si}$$

$n = 2$, & $m = 1$, on a $x = \frac{1}{4}$; si $n = 3$, & $m = 1$, il vient $x = \frac{4}{9}$; si $n = 3$ & $m = 2$, x sera $= \frac{1}{11}$; &c.

PROBLEME XIII. z étant un nombre entier, on propose de rendre rationnelle la formule $\sqrt{(2zz + 1)}$. Soit supposée cette quantité $= z + p$, l'on aura $2zz + 1 = zz + 2zp + pp$; ainsi $zz = 2zp + pp - 1$, & $z = p + \sqrt{(2pp - 1)}$. Il est donc visible que si $p = 1$, z sera une quantité rationnelle $= 2$ & $\sqrt{(2zz + 1)}$ sera $= 3$.

PROBLEME XIV. z étant toujours un nombre entier, on propose de rendre rationnelle la forme $\sqrt{(3zz + 1)}$. Supposant cette quantité $= z + p$, nous aurons $3zz + 1 = zz + 2zp + pp$ & $2zz = 2zp + pp - 1$, d'où l'on tire $z = \frac{p + \sqrt{(3pp - 2)}}{2}$;

z sera donc rationnel en supposant $p = 1$, ce qui donnera $z = 1$, & $\sqrt{(3zz + 1)} = 2$.

PROBLEME XV. z étant encore un nombre entier, on demande de rendre rationnelle la forme $\sqrt{(5zz + 1)}$ qui est plus grande que $2z$. Je suppose cette quantité $= 2z + p$ pour avoir $5zz + 1 = 4zz + 4zp + pp$; d'où je tire $zz = 4zp + pp - 1$, & $z = 2p + \sqrt{(5pp - 1)} = 2 + 2$, en supposant $p = 1$; donc $z = 4$ & $\sqrt{(5zz + 1)} = 9$.

PROBLEME. z étant toujours un nombre entier, on propose de rendre rationnelle la forme $\sqrt{(6zz + 1)}$ dont la valeur est entre $2z$ & $3z$. Je fais donc cette quantité $= 2z + p$ pour avoir $6zz + 1 = 4zz + 4zp + pp$, ou $2zz = 4zp + pp - 1$. Donc par la méthode des équations du second degré, j'aurai $z = p + \frac{\sqrt{(6pp - 2)}}{2}$; donc $z > 2p$, du moins en supposant

$p > 1$. Si en conséquence je suppose $z = 2p + q$, nous aurons en substituant cette valeur dans l'équation précédente, & ôtant la fraction, nous aurons, dis-je, $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6pp - 2)}$, ou $2p + 2q = \sqrt{(6pp - 2)}$ ou, en prenant les quarrés $4pp + 8pq + 4qq = 6pp - 2$. Il est donc facile de voir que $2pp = 4qq + 8pq + 2$, $pp = 2qq + 4pq + 1$, & $p = 2q + \sqrt{(6qq + 1)}$. Cette formule ressemblant à la première, je fais $q = 0$, donc $p = 1$, $z = 2$, & $\sqrt{(6zz + 1)} = 5$.

PROBLEME XVI. z étant encore un nombre entier, comment

peut-on rendre rationnelle la formule $\sqrt{7zz + 1} = m$? Il est facile de voir que $m > 2z$; je fais donc $m = 2z + p$ pour avoir $7zz + 1 = 4zz + 4zp + pp$, ou $3zz = 4zp + pp - 1$; donc $z = \frac{2p + \sqrt{7pp - 3}}{3}$. Maintenant, puisque $z > \frac{4p}{3}$, & par conséquent plus grand que p , je supposerai $z = p + q$, & j'aurai $p + 3q = \sqrt{7pp - 3}$, ou $pp + 6pq + 9qq = 7pp - 3$; donc $6pp = 9qq + 6pq + 3$, ou $2pp = 3qq + 2pq + 1$, & par conséquent $p = \frac{q + \sqrt{7qq + 2}}{2}$. Or on a ici $p > q$; c'est pourquoi je fais $p = q + r$, pour avoir $q + 2r = \sqrt{7qq + 2}$. De là je tire d'abord $qq + 4rq + 4rr = 7qq + 2$; ensuite $6qq = 4qr + 4rr - 2$, ou $3qq = 2qr + 2rr - 1$; & enfin $q = \frac{r + \sqrt{7rr - 3}}{3}$. Et parce que $q > r$, je fais $q = r + s$, pour avoir $2r + 3s = \sqrt{7rr - 3}$, ou $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$, ou $3rr = 12rs + 9ss + 3$, ou $rr = 4rs + 3ss + 1$, & $r = 2s + \sqrt{7ss + 1}$, formule par laquelle en faisant $s = 0$, on obtient $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$, $z = 3$, & $m = 8$.

On peut aussi résoudre plus facilement ce problème de la manière suivante. Puisque $7zz + 1 = mm$, il est visible que $m < 3z$. Je suppose donc $m = 3z - p$ pour avoir $7zz + 1 = 9zz - 6zp + pp$, ou $2zz = 6zp - pp + 1$. Résolvant cette équation du second degré, en regardant z comme l'inconnue, je trouve $z = \frac{3p + \sqrt{7pp + 2}}{2}$. Ainsi $z < 3p$.

Je fais $z = 3p - 2q$ pour avoir, en prenant les quarrés, $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2$, d'où il est aisé de tirer $pp = 6pq - 2q^2 + 1$, & $p = 3q + \sqrt{7qq + 1}$. Donc en faisant $q = 0$, il viendra $p = 1$, $z = 3$, & $m = 8$, comme nous l'avons déjà trouvé par la première méthode.

PROBLEME XVII. Rendre rationnelle la forme $\sqrt{8zz + 1} = m$. Je fais $m = 3z - p$, pour avoir $8z^2 + 1 = 9z^2 - 6zp + pp$, ou $zz = 6zp - pp + 1$; d'où je tire $z = 3p + \sqrt{8pp + 1}$. Comme $\sqrt{8pp + 1}$ est semblable à la forme proposée, je puis faire $p = 0$: ainsi $z = 1$, & $m = 3$.

PROBLEME XVIII. g étant un nombre entier positif & non quarré, rendre rationnelle la forme $\sqrt{gzz + 1}$. En suivant

la méthode qu'on vient d'employer dans le dernier & l'avant dernier problème, on parviendra à la fin à une quantité radicale de la forme $\sqrt{(guu + 1)}$ qui sera semblable à la proposée, dans laquelle en supposant $u = 0$ & retournant sur ses pas, on trouvera pour z une valeur qui rendra rationnelle la forme proposée. Si g étoit un nombre quarré, entier & positif, il est visible que gz seroit un quarré, car z est supposé un nombre entier. Mais un quarré augmenté d'une unite ne peut demeurer quarré; donc $gz + 1$ ne sauroit dans ce cas être un quarré. Si g étoit négatif & entier, la formule proposée seroit imaginaire; ainsi il seroit absurde de vouloir la rendre rationnelle.

PROBLEME XIX. *Rendre rationnelle la forme* $\sqrt{(aa + bx + cx^2)}$. Je fais cette quantité $= a + \frac{mx}{n}$ pour avoir $aa +$

$bx + cxx = aa + \frac{2am}{n}x + \frac{mm}{nn} \cdot xx$. Effaçant les termes qui se détruisent & divisant le reste par x , il vient $b + cx = \frac{2am}{n} + \frac{mm}{nn}x$; d'où il est aisé de tirer $x = \frac{2amn - bnn}{nnc - mm}$. En

substituant cette valeur de x , nous aurons $a + \frac{mx}{n} = a + \frac{2mmn - mnb}{nnc - mm} = \sqrt{(aa + bx + cxx)}$.

Si $a = 0$, la forme $\sqrt{(bx + cxx)}$ deviendra rationnelle en supposant $\sqrt{(bx + cxx)} = \frac{mx}{n}$, ce qui donnera $bx + cxx$

$= \frac{mmxx}{nn}$; donc $bnn + cnnx = mmx$, & $x = \frac{nmb}{mm - cnn}$.

Soit $b = c = 2$, $m = 3$, & $n = 2$, nous aurons $x = 8$ & $\sqrt{(2x + 2xx)} = 12$.

PROBLEME XX. *Rendre rationnelle la forme* $\sqrt{(a + bx + cxx^2)}$ dans laquelle le coefficient de x^2 est un quarré. Je fais cette for-

mule $= cx + \frac{m}{n}$, pour avoir $a + bx + cxx = cxx + \frac{2mx}{n} + \frac{mm}{nn}$. En multipliant par nn , & faisant les opérations ordinai-

res, on trouvera $x = \frac{mm - ann}{bnn - 2cmn}$. Ainsi en substituant cette valeur de x , nous aurons $\sqrt{(a + bx + cxx)} = \frac{cmm - acnn}{bnn - cmn}$

$+ \frac{m}{n}$, les nombres m & n sont arbitraires.

PROBLEME XXI. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt{a + bx + cx^2}$ *lorsque la quantité sous le signe est le produit de deux facteurs rationels* $(f + gx) \cdot (h + kx)$. Soit $\sqrt{[(f + gx) \times (h + kx)]} = \frac{m(f + gx)}{n}$, on aura $(f + gx) \cdot (h + kx) = \frac{mm \cdot (f + gx)^2}{nn}$; d'où l'on tire $hnn + knnx = mm \cdot (f + gx)$, & $x = \frac{fmm - hnn}{knn - gmm}$: cette valeur de x résout le problème.

Si l'on demande, *par exemple* de trouver un nombre tel que du double de son quarré retranchant 2, le reste soit un quarré; $2xx - 2$ sera donc un quarré; or $2xx - 2 = 2 \cdot (x + 1) \times (x - 1)$. Si donc on suppose $\sqrt{[(2x + 2)(x - 1)]} = \frac{m \cdot (x + 1)}{n}$, on aura $2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = \frac{mm(x + 1)^2}{nn}$

Multipliant par nn & divisant par $x + 1$, il viendra $2nnx - 2nn = mmx + mm$; d'où l'on tire $x = \frac{mm + 2nn}{2nn - mm}$. Si l'on fait $m = n = 1$, il vient $x = 3$, & $2xx - 2 = 16$. Si $m = 3$, & $n = 2$, l'on trouvera $x = 17$; mais parce que le quarré de x & de $-x$ est toujours le même on peut faire $x = 17$, & l'on aura également $2xx - 2 = 576$ quarré de 24.

PROBLEME XXII. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt{a + bx + cx^2}$ *lorsque la quantité sous le signe peut se décomposer en deux parties dont l'une soit un quarré, la seconde étant le produit de deux facteurs.* Dans ce cas la quantité $a + bx + cxx$ pourra donc être représentée par la forme $pp + qr$, les lettres p, q, r indiquant des quantités de la forme $f + gx$. L'on fera $\sqrt{(pp + qr)} = p + \frac{mq}{n}$, pour avoir $pp + qr = pp + \frac{2mpq}{n} + \frac{mmqq}{nn}$. Effaçant pp de part & d'autre, & divisant par q , on trouvera $r = \frac{2mp}{n} + \frac{mmq}{nn}$; donc $nur = 2mnp + mmq$, formule par laquelle on peut facilement déterminer x .

Supposons qu'on demande un nombre x , tel que si du double de son quarré l'on retranche 1, le reste soit un quarré, ou tel que $2xx - 1$ soit un quarré. Cette formule peut être représentée par $xx + (xx - 1) = xx + (x - 1) \cdot (x + 1)$. Ainsi elle est dans le cas du problème. Supposant donc la racine $= x +$

$\frac{m \cdot (x+1)}{n}$, on aura $xx + (x-1) \cdot (x+1) = xx +$
 $\frac{2m(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$; ainsi, en effaçant xx de
 part & d'autre, divisant ensuite par $x+1$ & ôtant les
 fractions, on aura $nnx - nn = 2mnx + mmx$
 $+ mm$; donc $x = \frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; & puisque
 dans la formule $2xx - 1$ le carré de x s'y trouve seul, il est
 indifférent de prendre pour x des valeurs positives ou négatives.
 On peut de même écrire $-m$ au lieu de $+m$, afin d'avoir x
 $= \frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$. Si on fait $m=1=n$, on aura $x=1$
 & $2xx-1=1$.

Si l'on demandoit de trouver un nombre x tel que $2xx$
 $+ 2$ fût un carré; on auroit $2xx + 2 = 4 + 2(x+1)$
 $\cdot (x-1)$; qui est dans le cas du problème pré-
 cédent. Supposons sa racine $= 2 + \frac{m(x+1)}{n}$ nous trouve-

rons $x = \frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}$. Le calcul qu'il faut faire pour
 cela n'ayant rien de difficile, je le laisse aux Commencans.
 Si dans la valeur de x on fait $m=1$ & $n=1$, on trouvera x
 $= 7$, & $2xx+2=100$.

PROBLEME XXIII. On demande la valeur de x qui peut ren-
 dre la quantité $5xx + 3x + 7$ un carré parfait. Si je fais
 $x = z-1$, la formule proposée devient $5zz - 7z + 9$, dont
 je suppose la racine carrée $= 3 - \frac{mz}{n}$. Donc $5zz - 7z + 9$

$= 9 - \frac{6mz}{n} + \frac{mmz^2}{nn}$. Donc en effaçant 9 de part & d'autre,
 divisant ensuite par z & ôtant les fractions, $5nnz - 7nn =$
 $-6mn + mmz$, d'où il est aisé de tirer $z = \frac{7nn-6mn}{5nn-mm}$, & en-
 fin $x = \frac{2nn-6mn+mm}{5nn-mm}$. Si $m=2$, & $n=1$, on aura $x=$

-6 , & par conséquent $5xx + 3x + 7 = 169$ carré de 13.

PROBLEME XXIV. Titius & Alexandre ont chacun un cer-
 tain nombre de louis qu'il s'agit de trouver: on sait que la
 somme des carrés de ces nombres est égale à la somme des car-

rés des nombres de louis de Pierre & de Jacques. Soit a le nombre de louis de Pierre, b le nombre de louis de Jacques. La somme des quarrés de ces nombres sera $a^2 + b^2$. Supposons que le nombre des louis de Titius est $mx - a$, celui des louis d'Alexandre étant $nx - b$. La somme des quarrés de ces nombres sera donc $mmxx - 2max + aa + nnxx - 2nbx$

$$+ bb = aa + bb, \& x = \frac{2ma + 2nb}{mm + nn}.$$
 Cette valeur substituée

dans les nombres $mx - a$ & $nx - b$ résoudra le problème.

Si l'on demandoit en général deux nombres dont la somme des quarrés fût égale à la somme de deux autres quarrés qui ne sont pas donnés. Les nombres cherchés seroient $mm + 2bmn - ann$ & $bmm + 2amn + bnn$, dont la somme des quarrés

$$\text{donne } a^2 m^4 + 2a^2 m^2 n^2 + a^2 n^4 + b^2 m^4 + 2b^2 m^2 n^2 + b^2 n^4;$$

or cette quantité est égale à la somme des quarrés des nombres $(mm + nn)a$, & $(mm + nn)b$; mais il faut remarquer que m ne doit pas être $= n$, autrement les nombres trouvés seroient égaux aux nombres supposés, & la solution du problème seroit illusoire. Si l'on fait $m : n :: a : b$, le premier des nombres supposés sera égal au premier des nombres trouvés, & le second des supposés au second, des trouvés.

PROBLEME XXV. *Trouver deux nombres tels que la différence de leurs quarrés soit donnée, & $= a$.* Supposons que les nombres cherchés sont $mx + n$, & $mx - n$, la différence $4mnx$ de leurs quarrés doit être $= a$; donc $x = \frac{a}{4mn}$. Ainsi les nombres

qui résolvent le problème, sont $\frac{a}{4n} + n$, $\frac{a}{4n} - n$. Si la

différence donnée a est supposée $= 2$, ces nombres seront $\frac{1}{2n} + n$ & $\frac{1}{2n} - n$. Si donc on fait $n = 1$ les nombres cherchés seront $\frac{3}{2}$, & $-\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$; car le quarré d'un nombre négatif $-\frac{1}{2}$ est le même que celui de $+\frac{1}{2}$. Si $n = 2$, ces nombres seront $\frac{5}{4}$ & $-\frac{3}{4}$, ou $\frac{3}{4}$ & $\frac{7}{4}$, &c.

PROBLEME XXVI. *On demande 1°. un nombre x qui étant ajouté à son quarré, donne un quarré; 2°. on demande aussi un nombre qui étant retranché de son quarré donne aussi un quarré. Donc $x^2 + x$ sera un quarré que je fais $= p^2 x^2$; d'où l'on tire*

$x = \frac{1}{pp-1}$. Si je fais $x^2 - x = q^2 x^2$, j'aurai $x = \frac{1}{1-qq}$. Cette dernière solution suppose $xx > x$; mais si $x < 1$, on fera $x - x^2 = qqxx$, & l'on aura dans ce cas $x = \frac{1}{qq+1}$; & $x - x^2$ fera un nombre carré.

PROBLEME XXVII. Trouver un nombre dont le carré d'une des parties multiplié par aa , & ajouté à l'autre partie multipliée par b donne un carré. Soit x le nombre cherché, y la première partie, $x - y$ la seconde; par la nature du problème, $aa yy + bx - by$ ou $yy + \frac{bx}{a} - \frac{by}{aa}$ doit être un carré. Or cela aura lieu si $\frac{bx}{aa} = \frac{bb}{4a^4}$, ou si $x = \frac{b}{4aa}$.

PROBLEME XXVIII. Trouver trois nombres tels que la somme de ces trois nombres, & de deux quelconques d'entr'eux donne un nombre carré. Soient les trois nombres $4x$, $xx - 4x$, $2x + 1$. La somme des trois est $x^2 + 2x + 1$; la somme du premier & du second est x^2 ; celle du second & du troisième est $x^2 - 2x + 1$. Or tous ces nombres sont des nombres carrés. Pour satisfaire donc parfaitement au problème, il faut que la somme $6x + 1$ du premier & du troisième soit un carré. Je fais $6x + 1 = p^2$: donc $x = \frac{p^2-1}{6}$. Ainsi nos trois nombres sont $\frac{2pp-2}{3}$, $\frac{p^4-26p^2+25}{36}$, $\frac{p^2+2}{3}$.

PROBLEME XXIX. Trouver trois nombres x , y , z , tels que si au produit de deux quelconques de ces nombres on ajoute un nombre donné a , il en résulte toujours un carré. Par la nature du problème ces trois quantités $xy + a$, $xz + a$, $yz + a$ doivent être des carrés. Je fais $xy + a = p^2$, ou $xy = pp - a$, $x = p + m$, & $y = p - n$; donc $xy = p^2 + pm - np - mn = p^2 - a$, & $p = \frac{mn-a}{m-n}$. Ainsi $x = \frac{mn-a}{m-n} + m = \frac{mm-a}{m-n}$, & $y = \frac{mn-a}{m-n} - n = \frac{nn-a}{m-n}$. Si donc x & y ont les valeurs que nous venons de trouver, $xy + a$ fera un carré. Or il est visible que si l'on multiplie les valeurs de x & de y par $m-n$ & qu'on leur ajoute ensuite la quantité a , elles donne-

ront m^2, n^2 , donc si on fait $z = m - n$, $xz + a$ & $yz + a$ seront aussi des quarrés.

PROBLEME XXX. On demande deux nombres x & y , dont la somme soit un quarré tel que sa racine soit égale à la somme faite du second ajouté au quarré du premier. On aura donc $x + y = (xx + y)^2$. Je fais chaque membre de cette équation $= p^2 x^2$ pour avoir $(xx + y)^2 = p^2 x^2$, $xx + y = px$, & $y = px - xx$. Mais $x + y = p^2 x^2$; donc en substituant la valeur de y , $x + px - xx = p^2 x^2$, ou $x = \frac{p+1}{pp+1}$; donc $y = \frac{(p+1) \cdot p - (p+1)^2}{(pp+1)^2}$, ou $y = \frac{(pp+1) \cdot (p+1) \cdot p - (p+1)^2}{(pp+1)^2} = \frac{p^4 + p^3 - p - 1}{(pp+1)^2}$
 $= \frac{(p^3 - 1) \cdot (p+1)}{(pp+1)^2}$.

LEMME. Soit $a > b$, si l'on multiplie la somme $a + b$ de deux quantités a & b par leur différence $a - b$, le produit sera $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$, & la demi-somme des facteurs donnera la racine a du plus grand quarré, la demi-différence de ces mêmes facteurs donnant la racine b du plus petit quarré.

PROBLEME XXXI. On demande trois nombres tels que le quarré de chacun de ces nombres ajouté à la somme des deux autres, donne un quarré. Puisque $xx + 2x + 1$ est un quarré, si les trois nombres cherchés sont $x, 2x, 1$, le premier satisfera au problème. Pour que les autres aient les conditions requises, il est nécessaire que $4xx + x + 1$, & $3x + 1$ soient des nombres quarrés. Je retranche le quarré $3x + 1$ du quarré $4xx + x + 1$, il reste $4xx - 2x = (4x - 2) \cdot x$. La demi somme de ses facteurs est $\frac{5x}{2} - 1$, la demi-différence étant $\frac{3x}{2} - 1$; donc (par le lemme précédent) $\frac{5x}{2} - 1$ est la racine de $4xx + x + 1$, & $\frac{3x}{2} - 1$, la racine de $3x + 1$. On aura donc $\frac{25xx}{4} - 5x + 1 = 4xx + x + 1$ (d'où l'on tire $25xx = 16xx + 24x$, ou $9x = 24$, $x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$), & $\frac{9xx}{4} - 3x + 1 = 3x + 1$; donc $9xx = 12x$

$+4 = 12x + 4$, $9x^2 = 24x$, $x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$. Ainsi les nombres cherchés sont $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{9}$, 1.

PROBLEME XXXII. *Titius achete deux especes de vins , le premier lui coûte huit louis la mesure , & le second cinq louis la mesure. La somme des louis dépensés est un nombre quarré qui , ajouté à 60 , donne encore un nombre quarré , dont la racine est la somme des prix de l'un & de l'autre vin. Quel est le nombre total des mesures ?* Soit x ce nombre ; par la nature du problème $xx - 60$ est le nombre des louis dépensés, qui doit être un quarré. Si Titius n'avoit acheté avec cet argent que du vin à cinq louis la mesure, le nombre des mesures seroit $\frac{xx - 60}{5}$, nombre qui est certainement plus grand que $xx - 60 > 5x$. Il est visible aussi qu'en supposant que Titius n'eût

acheté que du vin à huit louis la mesure, $\frac{xx - 60}{8}$ exprimerait la

nombre des mesures de ce vin , & il est aisé de voir que $xx - 60 < 8x$. Donc $xx - 5x > 60$, & $xx - 8x < 60$; donc (en ajoutant les quarrés de la moitié du coefficient de x) $x^2 - 5x + \frac{25}{4} > \frac{265}{4}$, $xx - 8x + 16 < 76$. Supposons que le premier quarré est plus grand que $\frac{265}{4}$, & que le second est plus petit que 64. Donc, en extrayant les racines, nous aurons $x - \frac{5}{2} > \frac{17}{2}$, $x - 4 < 8$; & partant $x > 11$, & $x < 12$. On auroit pu à la vérité trouver des limites moins étroites, mais celles-là suffisent pour notre objet.

Voyons maintenant de quelle maniere , en retenant les mêmes limites, $xx - 60$ peut être un quarré. Nous savons que x doit être un des termes de la racine de ce quarré; faisons l'autre $= y$, & supposons $xx - 60 = (y - x)^2$, ou $xx - 60 = x^2 - 2xy + yy$, ou $2xy = yy + 60$, ou $x = \frac{yy + 60}{2y}$, mais x doit être > 11 & < 12 : donc $(y - 11)^2 > 121 - 60 = 61$. Je suppose $(y - 11)^2 > 64$, donc $y - 11 > 8$, & $y > 19$.

L'on a aussi $(y - 12)^2 < 144 - 60 = 84$; donc en supposant $(y - 12)^2 < 81$; l'on aura $y - 12 < 9$ & $y < 21$. Les valeurs de y se trouvant entre 19 & 21, voyons si la supposition de $y = 20$ résout le problème. On aura donc $xx - 60 = (20 - x)^2 = x^2 - 40x + 400$, ou $x = \frac{460}{4} = 11\frac{1}{2}$; ainsi le nombre total des mesures sera $11\frac{1}{2} = \frac{23}{2}$. Si du quar-

ré de ce nombre l'on retranche $60 = \frac{240}{4}$, il reste $\frac{282}{4}$, quar-
ré de $\frac{17}{2}$: ainsi le nombre des louis dépensés est $= 72 \frac{1}{4}$.

Pour trouver le nombre des mesures de chaque espèce de vin, je suppose que z exprime le nombre des mesures de la se-
conde espèce ; il est visible que $5z$ sera le prix du vin à 5 louis
la mesure, & que $11 \frac{1}{2} - z$ sera le nombre des mesures de l'aut-
re, dont le prix est $92 - 8z$ & par conséquent le prix de tout
le vin sera $92 - 3z$; donc $92 - 3z = 72 \frac{1}{4}$; d'où l'on tire
 $3z = 19 \frac{1}{4}$ & $z = 6 \frac{7}{12}$, nombre des mesures au plus bas
prix. Donc $11 \frac{1}{2} - 6 \frac{7}{12} = 4 \frac{11}{12}$ sera le nombre des mesures
de l'autre vin.

PROBLEME XXXIII. *Trouver deux nombres x & y , dont la
somme soit à celle de leurs quarrés, comme $a : b$.* Par la nature
du problème $x + y : xx + yy :: a : b$; ainsi l'on a l'équation
 $bx + by = axx + ayy$. Je fais $y = xz$, & j'ai
 $bx + bxz = axx + axxz$; d'où l'on tire $b + bz = ax$
 $+ axz$, & $x = \frac{b + bz}{a + az}$. Ainsi en prenant pour z tel
nombre rationnel que l'on voudra, l'on aura une valeur ratio-
nelle de x , & de $y = xz$. Si, par exemple, a est $= 1$, $b =$
 4 & $z = 4$, on aura $x = 4$ & $y = 16$.

PROBLEME XXXIV. *Trouver deux nombres x & y , tels qu'en
ajoutant le quarré de l'un avec le produit du quarré de l'autre par
un nombre donné a , positif ou négatif, la somme soit un nombre
quarré $= bb$. L'on aura $xx + ayy = bb$. Supposant $x = zy - b$,
& $xx = (zy - b)^2$, nous aurons $(zy - b)^2 + ayy = bb$;
ou $zzyy - 2bzy + bb + ayy = bb$. En effaçant bb de part &
d'autre, transposant, divisant par y , & ensuite par $a + zz$; il
vient $y = \frac{2bz}{a + zz}$. Mais $x^2 = bb - ayy$; donc $x = \pm$
 $\frac{b \cdot (a - zz)}{a + zz}$. Ainsi en prenant pour z un nombre rationnel
quelconque, on aura aussi pour x & y des nombres rationnels.
Ce problème renferme comme un cas particulier celui dans
lequel on demanderoit deux nombres quarrés, dont la diffé-
rence fût un quarré donné : car il suffit de supposer $a = -1$;
il renferme encore le Problème (IV).*

PROBLEME XXXV. *Trouver deux nombres rationnels x &
 y , tels que si, du quarré du premier, l'on retranche celui du
second multiplié par un nombre quarré bb , il reste un nombre
donné a . Par la nature du problème $xx - bby = a$. Si l'on*

Suppose $x = z - by$, notre équation deviendra en substituant la valeur de x & réduisant, $zz - 2bzy = a$; ainsi l'on aura $y = \frac{zz - a}{2bz}$, $x = \frac{zz + a}{2z}$, & quelque nombre rationel qu'on substitue à la place de z , il en résultera des valeurs de x & de y qui résoudront le problème.

PROBLÈME XXXVI. a, b, c, d, e, f étant des nombres entiers & rationels, on demande des nombres rationels t & u , qui satisfassent à cette équation $att + btu + dt = -cuu - eu - f$. Regardant t comme la seule quantité inconnue, & résolvant cette équation par la méthode du second degré, il vient $t = \frac{-(bu + d) \pm \sqrt{(bu + d)^2 - 4a(cuu + eu + f)}}{2a}$.

Pour que t soit un nombre rationel, il est nécessaire que la quantité sous le signe soit un carré parfait : or cette quantité étant développée devient $bbuu + 2bdu + dd - 4acuu - 4aeu - 4af$. Faisons pour abréger, $bb - 4ac = g$, $2bd - 4ae = h$, $dd - 4af = m$, & nous aurons $t = \frac{-(bu + d) \pm \sqrt{guu + hu + m}}{2a}$. Suppo-

sons maintenant que $guu + hu + m$ est $= xx$, pour avoir $guu + hu = xx - m$, $uu + \frac{h}{g}u = \frac{xx - m}{g}$, $uu + \frac{h}{g}u + \frac{hh}{4g^2} = \frac{xx - m}{g} + \frac{hh}{4g^2} = \frac{4gxx + hh - 4gm}{4g^2}$, & $u = \frac{-h \pm \sqrt{4g(xx - m) + hh}}{2g} = \frac{-h \pm \sqrt{Axx + B}}{2g}$,

en faisant $4g = A$ & $-4gm + hh = B$. Si nous supposons maintenant $yy = Axx + B$, la question se réduira à trouver pour y & x des nombres rationels qui satisfassent à cette dernière équation ; car, en remontant, on trouvera ensuite facilement des nombres rationels pour u & t . Or il est facile de résoudre dans une infinité de cas l'équation $y = \sqrt{Axx + B}$ en nombres entiers.

Si B seul est un nombre carré, on emploiera la méthode du Problème XXXIV. Si A seul est carré, on fera usage de la méthode du Problème XXXV.

PROBLÈME XXXVII. Rendre rationnelle la forme $\sqrt{aa + bx + cx^2 + dx^3}$ dans laquelle le premier terme est le carré d'un nombre a . Si b, c, d étoient 0 en même temps, la formule deviendrait $\sqrt{aa} = a$; ainsi ce cas n'a aucune difficulté.

Nous ne nous proposons pas de parcourir tous les cas dans lesquels cette formule peut devenir rationnelle, il suffira pour notre objet de parler de quelques-uns. Supposons que $a^2 = 1$, $b = 2$, $c = -1$, & $a = 1$; donc $1 + 2x - xx + x^3$ doit être un carré. Le premier terme étant un carré, je choisis pour la racine cherchée une quantité telle que les deux premiers termes puissent s'évanouir. Soit donc cette racine cherchée $= 1 + x$, on aura $1 + 2x - x^2 + x^3 = 1 + 2x + x^2$, ou les deux premiers termes disparaissent; de manière que l'on a $xx = -xx + x^3$, ou $2xx = x^3$, ou en divisant par xx , $2 = x$. Ainsi la formule devient $\sqrt{(1 + 4 - 4 + 8)} = \sqrt{9} = 3$.

Pour faire un carré de la formule $4 + 6x - 5xx + 3x^3$ dont le premier terme est un carré, je supposerai la racine cherchée $= 2 + px$ pour avoir $4 + 6x - 5xx + 3x^3 = 4 + 4px + ppxx$. Pour que les deux premiers termes disparaissent de part & d'autre, il est nécessaire que $6x = 4px$, ou que $6 = 4p$; donc $p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Ainsi l'on aura l'équation $-5xx + 3x^3 = \frac{9}{4}xx$, ou $3x^3 = \frac{13}{4}x^2$, & $x = \frac{13}{12}$. Ainsi $\sqrt{(4 + 6x - 5xx + 3x^2)} = 2 + \frac{3}{2}x$.

Il y a une autre méthode dont on peut faire usage, lorsque le premier terme de la quantité sous le signe est un carré: elle consiste à donner trois termes à la racine cherchée, qu'on peut faire $= a + gx + hxx$; de manière que dans l'équation les premiers termes s'évanouissent.

Soit, par exemple, la formule $\sqrt{(1 - 4x + 6xx - 5x^3)}$. Je suppose cette quantité $= 1 - 2x + hxx$ pour avoir l'équation $1 - 4x + 6xx - 5x^3 = 1 - 4x + 4xx + 2hxx - 4hx^3 + hhxx^4$. Les deux premiers termes se détruisent de deux côtés; & pour faire disparaître xx , il suffit de supposer $6xx = 4xx + 2hxx = (4 + 2h)xx$, ou $6 = 4 + 2h$, & $2h = 2$ ou $h = 1$; par ce moyen l'on trouve $-5x^3 = -4x^3 + x^4$, ou $-5 = -4 + x$, ou $+4 - 5 = x$, ou $x = -1$.*

La forme $\sqrt{(1 + x^3)}$ deviendra un carré, en faisant $x = 0$, ou bien $x = 2$. La formule $\sqrt{(1 + 3x^3)}$ devient rationnelle si $x = 0$, ou si $x = 1$, ou si $x = 2$. Maintenant 1 étant une des valeurs qui satisfont, supposons x égal à cette valeur augmentée de y , pour avoir $x = 1 + y$ & $1 + 3x^3 = 4 + 9y +$

* Ces méthodes supposent que b & c ne sont pas 0.

$9yy + 3y^3$. Que la racine de cette nouvelle formule soit supposée $2 + py$, de manière que $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + ppyy$; il faudra supposer $9 = 4p$, ou $p = \frac{9}{4}$, & alors l'on aura $9 + 3y = pp = \frac{81}{16}$, ou $y = -\frac{1}{16}$. Ainsi x sera $= -\frac{1}{16}$; & $\sqrt{(1 + 3x^3)} = \pm \frac{61}{4}$. En supposant $x = -\frac{1}{16} + z$, nous aurions une nouvelle valeur, &c. Cependant la méthode que l'on vient d'employer dans ce dernier cas est encore fort défectueuse.

Si l'on vouloit rendre rationnelle la forme $\sqrt{(1 - x - xx + x^3)}$ il suffiroit de faire $x = pp - 1$, en donnant à p telles valeurs rationnelles que l'on voudra. Si $p = 3$, notre formule donnera 21.

Pour rendre rationnelle la forme $\sqrt{(cx^2 + dx^3)}$, il est nécessaire que $cx^2 + dx^3 = x^2(c + dx)$ soit un quarré; mais x^2 est un quarré: donc $c + dx$ doit aussi être un quarré.

Si donc on fait $c + dx = pp$, on aura $x = \frac{pp - c}{d}$, valeur qui résoudra toujours la question.

PROBLEME XXXVIII. *Rendre rationnelle la forme $\sqrt{(aa + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)}$ dans laquelle le premier terme est un nombre quarré, b, c, d, e , étant des nombres réels, & non 0.* Nous ferons cette forme $= a + px + qxx$, nous déterminerons ensuite p & q , de manière qu'il ne reste que deux termes dans la quantité sous le signe; ce qui fera trouver une valeur rationnelle de x . Nous aurons donc $aa + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = aa + 2apx + (2aq + pp)xx + 2pqx^3 + qqx^4$. Les premiers termes disparaissent d'eux-mêmes; les seconds disparaîtront en faisant $b = 2ap$ & $p = \frac{b}{2a}$. Pour faire disparaître cx^2 , il faudra supposer $c = 2aq + pp$, ou $q = \frac{c - pp}{2a}$. Cela posé, on aura $dx^3 + ex^4 = 2pqx^3 + qqx^4$; donc en divisant par x^3 , $d + ex = 2pq + qqx$, équation qui donne $x = \frac{d - 2pq}{qq - e}$, ou (en changeant les signes du numérateur & du dénominateur) $x = \frac{2pq - d}{e - qq}$.

PROBLEME XXXIX. *Rendre rationnelle la forme $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ggxx^4)}$ dans laquelle gg est un nombre quarré.* Supposant cette quantité $= q + px + gx^2$, on aura $a + bx + cxx + dx^3 + ggxx^4 = qq + 2pqx + ppxx + (2gq + pp)$

$\times xx + 2gpx^3 + ggxx^4$. Les cinquièmes termes se détruisant d'eux-mêmes, & il faut faire en sorte que les quatrièmes disparaissent aussi; ce qu'on obtiendra en supposant $2gp = d$, ou $p = \frac{d}{2g}$. Il faut encore faire disparaître cx^2 , en faisant $2gq + pp = c$, ou $q = \frac{c - pp}{2g}$. Les deux premiers termes donneront alors l'équation $a + bx = qq + 2pqx$; d'où il est facile de tirer $x = \frac{qq - a}{b - 2pq}$.

PROBLEME XL. *Rendre rationnelle la forme $\sqrt{(aa + bx + cxx + dx^3 + ggxx^4)}$.* Comme le premier terme est un quarré, nous pourrions employer la méthode qui convient à ce cas, & parce que le coefficient du cinquième terme est aussi un quarré, nous pourrions nous servir de la méthode du problème précédent; de cette manière nous trouverions deux valeurs de x , dont chacune résoudroit le problème. L'on peut aussi supposer la quantité donnée égale à $a + px + gxx$, en déterminant p de manière que les quatrièmes termes disparaissent dans l'équation $aa + bx + cxx + dx^3 + ggxx^4 = aa + 2apx + (pp + 2ag)xx + 2gpx^3 + ggxx^4$, dans laquelle $(pp + 2ag)xx$ est considéré comme un seul terme. Mais il est visible qu'en faisant $p = \frac{d}{2g}$, les quatrièmes termes dis-

paraissent; & puisque les premiers & les derniers se détruisent d'eux-mêmes, on aura en divisant par x , $b + cx = 2ap + 2agx + ppx$, équation d'où l'on tire $x = \frac{b - 2ap}{2ag + pp - c}$.

Comme le quarré aa se trouve seul dans la formule, je veux dire sans que a s'y trouve seul, on pourra supposer que la racine a le signe —, & écrire — a au lieu de a ; ainsi l'on a aussi

$$x = \frac{b + 2ap}{pp - 2ag - c}.$$

PROBLEME XLI. *Trouver une valeur de x qui puisse rendre $a + ex^4$ un quarré parfait.* Je suppose qu'en faisant $x = h$, on satisfait au problème, & qu'on a l'équation $a + eh^4 = kk$. Si l'on veut trouver d'autres valeurs de x qui aient la propriété demandée, on supposera $x = h + y$, de manière que la forme $a + eh^4 + 4eh^3y + 6eh^2yy + 4ehy^3 + ey^4$ soit un quarré; donc en substituant la valeur de $a + eh^4$, la forme kk

$+ 4eh^3y + 6chhy + 4ehy^3 + ey^4$ sera un quarré. Or cette dernière forme est la première des trois espèces que nous avons résolues ; ainsi en procédant par la méthode qui convient à ce cas, supposant la racine cherchée $= k + py + qyy$; & faisant les opérations nécessaires , nous trouverons $p = \frac{2eh^3}{k}$, & $6ehh = 2kq + pp$, ou $q = \frac{6ehh - pp}{2k} = \frac{3ehhkk - 2eeh^6}{k^3} = \frac{ehh(3kk - 2eh^4)}{k^3}$; ou parce que $eh^4 = kk - a$, $q = \frac{ehh(kk + 2a)}{k^3}$. On trouvera aussi $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$.

Si l'on demandoit donc de rendre rationnelle la forme $\sqrt{(2x^4 - 1)}$, nous aurions ici $a = -1$, $e = 2$, & il est visible qu'en supposant $h = 1$, cette forme donneroit 1 ; donc $k = 1$, & $kk = 1$, $p = 4$, $q = -2$, $y = 12$, & $x = h + y = 13$; ainsi l'on auroit $\sqrt{(2x^4 - 1)} = \sqrt{(57121)} = 239$. Regardant maintenant ceci comme le cas connu , & faisant $h = 13$ & $k = 239$, on trouveroit une nouvelle valeur de x qui satisferoit ; & ainsi de suite.

PROBLEME XLII. *Rendre rationnelle la formule* $\sqrt[3]{(a + bx)}$. Je fais $\sqrt[3]{(a + bx)} = p$, pour avoir $a + bx = p^3$, ou $bx = p^3 - a$, & $x = \frac{p^3 - a}{b}$.

PROBLEME XLIII. *Rendre rationnelle la formule* $\sqrt[3]{(a^3 + bx + cx^2 + dx^3)}$ dans laquelle le premier terme est un cube. Je fais cette quantité $= a + px$; donc $a^3 + bx + cx^2 + dx^3 = a^3 + 3a^2px + 3ap^2xx + p^3x^3$. Comme les premiers termes se détruisent , il faut déterminer p de manière à faire disparaître les seconds termes , ce qui arrivera si $3aap = b$, ou si $p = \frac{b}{3aa}$. L'on aura donc $cx^2 + dx^3 = 3ap^2x^2 + p^3x^3$, & en divisant par xx , $c + dx = 3app + p^3x$; ainsi $x = \frac{c - 3app}{p^3 - d}$.

PROBLEME XLIV. *Trouver la valeur de x qui peut rendre rationnelle la forme* $\sqrt[3]{(a + bx + cx^2 + gx^3)}$ dans laquelle

laquelle le coefficient du dernier terme est un cube. Faisant cette quantité $= p + g x$, pour avoir $a + b x + c x x + g^3 x^3 = p^3 + 3 p^2 g x + 3 p g^2 x^2 + g^3 x^3$, je vois que les derniers termes des deux membres de cette équation se détruisent d'eux-mêmes ; & pour déterminer p de manière que les pénultièmes se détruisent aussi, je fais $3 p g^2 = c$, ou $p = \frac{c}{3 g^2}$. Maintenant puisque les termes restans donnent $a + b x = p^3 + 3 p^2 g x$, l'on aura $x = \frac{a - p^3}{3 g p p - b}$.

Si le premier terme a avoit été $= 0$, on auroit pu faire $\sqrt[3]{(b x + c x^2 + g^3 x^3)} = g x$, pour avoir $b x + c x x + g^3 x^3 = g^3 x^3$, ou $b x = - c x^2 + g^3 x^3 - g^3 x^3 = - c x^2$, & $b = - c x$ ou $x = - \frac{b}{c}$.

PROBLEME XLV. *Rendre rationnelle la forme $\sqrt[3]{(a^3 + b x + c x x + g^3 x^3)}$ dans laquelle le premier & le dernier termes sont des cubes.* Il est visible qu'on peut la traiter comme l'une & comme l'autre des deux especes qu'on a résolues dans les deux problèmes précédens. On peut aussi faire la racine cherchée $= a + g x$, pour avoir $a^3 + b x + c x^2 + g^3 x^3 = a^3 + 3 a^2 g x + 3 a g^2 x^2 + g^3 x^3$, équation dans laquelle les premiers & les derniers termes des deux membres se détruisent d'eux-mêmes, puisqu'ils sont égaux & qu'ils ont les mêmes signes. Donc $b x + c x x = 3 a a g x + 3 a g g x x$, ou $b + c x = 3 a a g + 3 a g^2 x$; d'où l'on tire $x = \frac{b - 3 a a g}{3 a g g - c}$.

PROBLEME XLVI. *Quelle valeur de x peut rendre rationnelle la forme $\sqrt[3]{(3 + 3 x^3)}$?* Il est clair que cela arrivera si on fait $x = 2$, & l'on aura alors $\sqrt[3]{(3 + 3 x^3)} = 3$. Pour avoir une nouvelle valeur de x qui résolve le problème, je fais $x = h + y$ ou en faisant $h = 2$, $x = 2 + y$, pour avoir $3 + 3 x^3 = 27 + 36 y + 18 y y + 3 y^3$, & comme 27 est un cube, cette formule est de la même espece que celle que nous avons déjà traitée. Faisons la racine $= 3 + p y$, dont le cube est $27 + 27 p y + 9 p p y y + p^3 y^3 = 27 + 36 y + 18 y y + 3 y^3$. Les premiers termes se détruisent mutuellement, & il faut faire en sorte que les seconds disparoissent de même, ce qu'on obtiendra en supposant $27 p = 36$, ou $p = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$. L'on aura mainte-

nant $9ppyy + p^3y^3 = 18yy + 3y^3$, ou $9pp + p^3y = 18 + 3y$, ou $p^3y - 3y = 18 - 9pp$, ou $y = \frac{18 - 9pp}{p^3 - 3} = -\frac{3}{17}$; donc $x = -\frac{20}{17}$, & $\sqrt[3]{(3 + 3x^3)} = 3 + py = -\frac{21}{17}$: cette solution fournira une nouvelle valeur, & ainsi de suite.

PROBLÈME XLVII. *Rendre rationnelle la forme* $\sqrt[3]{a \cdot (b + cx)^2}$. Faisant cette quantité $= \frac{b + cx}{q}$, on

aura l'équation $a \cdot (b + cx)^2 = \frac{(b + cx)^3}{q^3}$; d'où l'on tire (en

divisant par $(b + cx)^2$ l'équation $a = \frac{b + cx}{q^3}$. Donc $aq^3 =$

$b + cx$, $aq^3 - b = cx$, & $x = \frac{aq^3 - b}{c}$, valeur dans

laquelle q est un nombre arbitraire.

Si l'on demandoit la valeur de x qui peut rendre rationnelle la forme $\sqrt[3]{(2xx - 5)}$, on n'auroit qu'à supposer $x = 4$, & l'on auroit $2xx - 5 = 27$, dont la racine cube est 3.

PROBLÈME XLVIII. *a & b étant des nombres inégaux, on demande un troisième nombre x tel que son cube ajouté à la somme des cubes de a & de b donne un cube parfait.* Par la nature du problème $a^3 + b^3 + x^3$ doit être un cube; or il est visible que cela aura lieu, si l'on suppose $x = -a$: car alors $a^3 + b^3 + x^3 = a^3 + b^3 - a^3 = b^3$, cube de b . Pour trouver une autre valeur de x qui satisfasse, je fais $x = y - a$. Substituant la valeur de x^3 que donne cette supposition, la formule $a^3 + b^3 + x^3$ devient $b^3 + 3a^2y - 3a^2y + y^3$, formule dans laquelle le premier terme est un cube aussi bien que le dernier. Pour résoudre celle-ci, je fais la racine $= b + py$, afin d'avoir $b^3 + 3a^2y - 3a^2y + y^3 = b^3 + 3b^2py + 3bp^2yy + p^3y^3$. Les premiers termes se détruisent d'eux-mêmes, & les seconds dis-

paraîtront, si l'on fait $3aa = 3bbp$, ou $p = \frac{a}{b}$. L'on aura

donc $-3a^2y + y^3 = 3b^2py + p^3y^3$, ou $y - 3a =$

$3b^2p + p^3y = \frac{3a^4}{b^3} + \frac{a^6}{b^6} \cdot y$, équation qui, multipliée

par b^6 , donne $b^6y - 3ab^6 = 3a^4b^3 + a^6y$, & $y =$

$$\frac{3a^4b^3 + 3ab^6}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3(a^3 + b^3)}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3(a^3 + b^3)}{(b^3 + a^3)(b^3 - a^3)}$$

$$= \frac{3ab^3}{b^3 - a^3}; \text{ donc } x = y - a = a \left(\frac{2b^3 + a^3}{b^3 - a^3} \right).$$

deux cubes a^3 & b^3 étant donnés, nous connoissons la racine du cube cherché; or cette racine sera positive en supposant $b > a$.

PROBLEME XLIX. *Trouver deux nombres entiers & positifs x & y , tels que leur somme soit égale au quarré du second.* Par la nature du problème, nous aurons $x + y = y^2$, $x = y^2 - y = y \cdot (y - 1)$; ainsi $x = y \cdot (y - 1)$. Si donc l'on prend pour y un nombre quelconque entier & positif plus grand que 1, on trouvera une valeur de x qui résoudra le problème. Soit, par exemple, $y = 5$, nous aurons $x = 5 \cdot (5 - 1) = 5 \times 4 = 20$. Or $x + y = 20 + 5$ est $= 25$ quarré de 5. Mais on ne peut pas supposer $y = 1$, parce que $x = y \cdot (y - 1)$, seroit alors $= 1 \cdot (1 - 1) = 1 \times 0 = 0$.

PROBLEME L. *Trouver deux nombres x & y tels que la somme $x^2 + y^2$ de leurs quarrés soit égale au cube y^3 du second.* Par la nature du problème $x^2 + y^2 = y^3$ ou $x^2 = y^3 - y^2 = yy \cdot (y - 1)$, & $x = y \cdot \sqrt{y - 1}$. Si donc on prend pour y un nombre quarré quelconque augmenté de l'unité, le problème sera résolu, & la valeur de x sera rationnelle. Soit, par exemple, $y = 9 + 1 = 10$, nous aurons $x = 10 \cdot \sqrt{9} = 10 \cdot 3 = 30$, & $x^2 + y^2 = 900 + 100 = 1000$, cube de y ou de 10.

PROBLEME LI. *Trouver deux nombres x & y tels que la somme de leurs cubes soit égale à la quatrième puissance du second.* Par la nature du problème nous avons $x^3 + y^3 = y^4$, ou $x^3 = y^4 - y^3 = y^3 \cdot (y - 1)$, & enfin $x = y \cdot \sqrt[3]{y - 1}$. Ainsi en prenant pour y un nombre cube quelconque augmenté de l'unité, le radical $\sqrt[3]{y - 1}$ donnera un nombre rationnel, & la valeur de x sera aussi rationnelle. Soit $y = 9$, $y - 1$ sera $= 8$, & $\sqrt[3]{y - 1} = 2$; donc $x = 9 \cdot 2 = 18$. Ainsi en ajoutant le cube de 18 avec celui de 9, on aura la quatrième puissance de 9; ce qu'il est facile de vérifier.

PROBLEME LII. *On demande deux nombres x & y tels que la somme de leurs puissances du degré m , soit égale à la puissance du degré $m + 1$ de y . L'on aura $x^m + y^m = y^{m+1}$,*

$x^m = y^{m+1} - y^m = y^m \cdot (y - 1)$, & $x = y \cdot \sqrt[m]{y - 1}$. Si donc on prend pour y une puissance parfaite du degré m & qu'on lui ajoute l'unité, le problème sera résolu. Si $m = 5$, & $y = 32 + 1 = 33$ (32 est la cinquième puissance de 2), on aura $x = 33 \cdot \sqrt[5]{33 - 1} = 33 \cdot \sqrt[5]{32} = 33 \cdot 2 = 66$, & la somme des cinquièmes puissances de 66 & de 33 sera égale à la sixième puissance de ce dernier nombre.

Des Equations du second degré à plusieurs inconnues.

69. Lorsqu'on a deux équations & deux inconnues, si dans l'une de ces équations une des inconnues ne passe pas le premier degré, on en prendra la valeur, qu'on substituera dans l'autre équation, & l'on aura une équation à une seule inconnue. *Exemple*, soient les équations $dx - y^2 = a$, $x^2 + y^2 = b$. De la première je tire $x = \frac{a + y^2}{d}$, substituant cette valeur dans la seconde, l'on a

$$\frac{a^2 + 2ay^2 + y^4}{d^2} + y^2 = b, \text{ ou } y^4 + 2ay^2 + ddy^2$$

$+ aa = bd^2$, équation à une seule inconnue, mais qui est du quatrième degré. Si les deux inconnues se trouvent élevées au quarré dans chaque équation, prenez dans chaque équation la valeur du quarré d'une des inconnues; & égalant ces valeurs, vous aurez une nouvelle équation, de laquelle on tirera aisément la valeur d'une des inconnues. Cette valeur étant substituée dans l'une ou l'autre des équations données, il en résultera une équation qui ne contiendra qu'une inconnue.

Soyent les équations

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + l.$$

$$x^2 + fxy + gx = hy^2 + iy + k.$$

La première donne $x^2 = cy^2 + dy + l - axy$ — bx , & la seconde donne $x^2 = hy^2 + iy +$

$k - fxy - gx$. Egalant ces deux valeurs de x^2 , & faisant passer tous les termes affectés de x dans le premier membre de l'équation, on aura $fxy + gx - axy - bx = hy^2 - cy^2 - dy + iy - l + k$, & en divisant par le multiplicateur de x , il vient $x = \frac{(h-c)y^2 + (i-d)y + k-l}{fy + g - ay - b}$.

quantité que je fais $= p$, & qui ne contient point x . Substituant cette valeur dans l'une des équations données dans la première, *par exemple*, j'ai $p^2 + apy + bp = cy^2 + dy + l$, équation où x ne se trouve point. En mettant au lieu de p^2 & de p , leurs valeurs en y & constantes, on aura l'équation cherchée, dans laquelle y ne montera tout au plus qu'au quatrième degré, comme on s'en convaincra aisément par l'opération.

Si les équations surpassent le second degré, voici une méthode générale qu'on pourra suivre. En supposant que tous les termes du second membre d'une équation soyent transposés dans le premier, toute équation à deux inconnues x & y pourra être mise sous cette forme $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \dots + p = 0$. Si x^{m-2} , *par exemple*, ne se trouvoit dans aucun terme, on supposeroit le coefficient c de ce terme $= 0$. Les coefficients a, b, c peuvent représenter des fonctions de y ou des constantes (nous entendons par fonction de y une expression dans laquelle entre y de quelle manière que ce soit). Cela posé, soient les deux équations

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \dots + p = 0$$

$$a'x^m + b'x^{m-1} + c'x^{m-2} \dots + p' = 0$$

desquelles on veut chasser x . Supposons-les du même degré, on multipliera la première par a' , & la seconde par a ; retranchant le second produit

du premier, il est évident que x^m ne se trouvera pas dans la nouvelle équation, qui sera par conséquent tout au plus du degré $m - 1$. Multipliant la première par $a'x + b'$, & la seconde par $ax + b$, & retranchant encore le second produit du premier, il en résultera une nouvelle équation du même degré, par rapport à x , que celle qu'on vient de trouver. Multipliant de même la première par $a'x^2 + b'x + c'$, & la seconde par $ax^2 + bx + c$; & retranchant encore le second produit du premier, il en résultera une troisième équation du même degré par rapport à x ; & continuant ainsi jusqu'à ce que le multiplicateur soit devenu du degré $m - 1$, on aura $m - 1$ équations du même degré $m - 1$ par rapport à x , & considérant dans ces équations les quantités x^{m-1} , x^{m-2} , x^{m-3} , &c. comme des inconnues simples, on déterminera les valeurs de ces inconnues. Substituant donc ces valeurs dans la dernière équation, on aura une équation qui contiendra x linéaire & dont il sera aisé d'avoir la valeur. Cette valeur étant substituée dans la première ou dans la seconde équation, on aura une équation qui ne contiendra que la seule inconnue y avec des quantités connues. Si dans la première équation x étoit du degré m , & dans l'autre du degré n , on multiplieroit la seconde par x^{m-n} , & alors les deux équations se trouveroient du même degré par rapport à x ; ainsi l'on pourroit s'y prendre comme nous venons de le dire.

Si l'on avoit trois équations & trois inconnues x , y & z , on négligeroit d'abord une des inconnues, z , par exemple, qu'on regarderoit comme connue, & par le moyen de deux premières équations proposées on parviendroit à une équation (que j'appelle-

rai B) qui ne contiendrait que l'inconnue négligée & une des autres, x , *par exemple*. Par le moyen de la première & de la troisième ou bien encore par le moyen de la seconde & de la troisième, on trouveroit une autre équation (que je nommerai D) qui ne contiendrait que les mêmes deux inconnues x & z . Et par le moyen des équations B & D, on parviendroit à une équation qui ne contiendrait qu'une seule inconnue. Si l'on avoit quatre équations & quatre inconnues; par le moyen des deux premières en négligeant d'abord deux inconnues, on parviendroit à une équation qui ne contiendrait que x & les deux inconnues négligées; par le moyen de la première & de la troisième, on parviendroit à une seconde équation qui ne contiendrait que x & les inconnues négligées; enfin par le moyen de la première & de la dernière, on parviendroit à une autre équation qui auroit les mêmes conditions. L'on auroit donc trois équations & trois inconnues, cas que nous venons de résoudre, & ainsi des autres.

PROBLÈME I. *Trouver deux nombres x & y dont la somme $x + y$ soit $= 1 = a$, & la somme des quarrés $x^2 + y^2 = 25 = b^2$. Par la première condition $x + y = a$; donc en prenant le quarré de part & d'autre, $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$. De cette équation retranchant la seconde, il vient $2xy = a^2 - b^2$. Retranchant cette dernière équation de la seconde, on trouve $x^2 - 2xy + y^2 = 2b^2 - a^2$; & en prenant la racine quarrée de chaque membre, $x - y = \pm \sqrt{2b^2 - a^2}$. Cette dernière équation étant ajoutée à la première & ensuite soustraite, il vient dans le premier cas, $x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$ ou $x = +4$, & $x = -3$, & dans le second cas*

N. 4

$y = \frac{a \mp \sqrt{(2b^2 - a^2)}}{2} = \frac{1 \mp 7}{2}$ ou $y = -3$, & $y = +4$; c'est-à-dire, que si $x = 4$, y sera $= -3$, & réciproquement.

PROBLÈME II. *On demande deux nombres positifs x & y , dont la somme des quarrés soit 274 & dont le produit donne 105.* Par la nature du Problème $xx + yy = 274$, & $xy = 105$ ou $2xy = 210$. Si l'on ajoute cette dernière équation à la première, & qu'ensuite on l'en retranche, on aura $xx + 2xy + yy = 484$, & $xx - 2xy + yy = 64$, équation que je désignerai par (A). L'avant dernière équation que nous venons de trouver, donne en prenant les racines, $x + y = \pm 22$; mais en prenant les racines dans l'équation A, on trouve $x - y = \pm 8$. Donc en nous en tenant aux racines positives, $x + y = 22$, & $x - y = 8$; donc $x + y + x - y = 30$ ou $2x = 30$, & $x = 15$. Mais $x + y - x + y = 22 - 8$, ou $2y = 14$, & $y = 7$. Les racines négatives donnent $x = -15$ & $y = -7$; mais ces valeurs ne peuvent résoudre le Problème.

PROBLÈME III. *On demande deux nombres positifs x & y , dont la somme des quarrés soit donnée & $= b$, & dont le produit soit $= a$.* On aura donc les deux équations suivantes $xx + yy = b$, $xy = a$. Si l'on ajoute la première à la seconde multipliée par 2, on aura $xx + 2xy + yy = b + 2a$, & par conséquent $x + y = \sqrt{(b + 2a)}$. Si de la première équation nous retranchons le double de la seconde, il viendra $xx - 2xy + yy = b - 2a$, d'où l'on tire $x - y = \sqrt{(b - 2a)}$; donc $x + y + x - y$ ou $2x = \sqrt{(b + 2a)} + \sqrt{(b - 2a)}$ ou $x = \frac{1}{2} \sqrt{(b + 2a)} + \frac{1}{2} \sqrt{(b - 2a)}$. L'on a aussi $x + y - x + y$ ou $2y = \sqrt{(b + 2a)} - \sqrt{(b - 2a)}$.

$$-\sqrt{b-2a}, \text{ \& } y = \frac{1}{2} \sqrt{b+2a} - \frac{1}{2} \sqrt{b-2a}.$$

Si $b < 2a$ le Problème est impossible, parce que b & a étant des nombres positifs par la nature du Problème, x & y doivent être dans ce cas imaginaires.

PROBLÈME IV. On demande deux nombres tels que leur somme, leur produit, & la différence de leurs quarrés soient égaux entr'eux. Soit x le plus grand, y le plus petit nombre. Par la nature du Problème $x + y = xx - yy = (x + y) \cdot (x - y)$; donc, en divisant par $x + y$, $1 = x - y$ & $x = y + 1$; donc $x + y = 2y + 1$, & $xx - yy = 2y + 1$. D'un autre côté le produit xy ou $yy + y$ devant être égal à la même quantité, on a l'équation $yy + y = 2y + 1$, ou $yy - y = 1$, ou $yy - y + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, $y - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)}$, & $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

PROBLÈME V. Trouver deux nombres tels qu'il y ait égalité entre leur produit, leur somme & la somme de leurs quarrés. Je fais l'un des nombres cherchés $= x + y$, & l'autre $= x - y$. Leur somme sera $2x$, leur produit sera $xx - yy$, & la somme de leurs quarrés sera $2xx + 2yy$. Par la nature du Problème, on a $2x = xx - yy$ ou $yy = xx - 2x$. Substituant cette valeur de yy dans $2xx + 2yy$, & comparant le résultat $4xx - 4x$ avec $2x$, on aura $2x = 4xx - 4x$, d'où l'on tire $x = \frac{3}{2}$; donc $yy = -\frac{1}{4}$, & $y = \pm \frac{\sqrt{(-3)}}{2}$; donc les

nombres cherchés sont $x + y = \frac{3 + \sqrt{(-3)}}{2}$ & $x - y = \frac{3 - \sqrt{(-3)}}{2}$; & quoique ces nombres soient

imaginaires, ils résolvent cependant le Problème.

REMARQUE. Dans le premier Problème,

pour avoir la valeur de x , nous avons ajouté l'équation $x - y = \pm \sqrt{2b^2 - a^2}$ avec l'équation $x + y = a$. Au contraire nous l'avons soustraite pour avoir la valeur de y , parce que dans le premier cas les signes de y dans les deux équations sont différents, & comme d'ailleurs leurs coefficients sont les mêmes, il est visible que l'inconnue y ne doit plus se trouver dans le résultat; de même dans le second cas, x ne doit point se trouver dans le résultat, parce que $-x$ doit détruire $+x$. Donc, pour faire disparaître une inconnue quand on a deux équations à deux inconnues qui ont les mêmes coefficients dans ces deux équations, il faut ajouter les deux équations si l'inconnue qu'on veut faire disparaître a différents signes dans les deux équations. Mais il faut soustraire une équation de l'autre, lorsque l'inconnue qu'on veut faire disparaître a le même signe dans les deux équations. Si l'on avoit les deux équations $ax + by = c$, $dx - gy = f$ dans lesquelles les inconnues x & y n'ont pas le même coefficient, on pourroit néanmoins faire disparaître telle des deux inconnues qu'on voudroit. Supposons, *par exemple*, qu'on voulût faire disparaître y ; on multiplieroit tous les termes de la seconde par le coefficient b de y dans la première, & tous les termes de la première par le coefficient g de y dans la seconde, & l'on auroit les deux équations $agx + bgy = gc$, $bdx - bgy = bf$; ajoutant maintenant ces deux équations, l'on trouveroit $agx + bdx = gc + bf$, équation qui ne contient que l'inconnue x . Si l'on avoit voulu faire évanouir x , on auroit multiplié tous les termes de la seconde par a , & tous ceux de la première par d ; retranchant ensuite le second résultat du premier, l'on

auroit eu une équation qui n'auroit contenu que la seule inconnue y . Si l'on vouloit appliquer cette méthode à trois équations & trois inconnues, en négligeant d'abord une de ces inconnues, l'on parviendroit, par le moyen de la première & de la seconde équation, à une équation qui ne contiendrait que l'inconnue négligée & l'une des deux autres, x , *par exemple*. Par le moyen de la première & de la troisième on parviendroit aussi à une seconde équation qui auroit les mêmes conditions; l'on auroit donc deux équations & deux inconnues, ce qui donne le cas que nous venons de traiter. Si l'on avoit quatre équations & quatre inconnues, en négligeant d'abord deux inconnues, on trouveroit, par le moyen des deux premières, une équation qui ne contiendrait que les deux inconnues négligées & l'une des deux autres, x , *par exemple*. Par le moyen de la première & de la troisième, l'on trouveroit une autre équation de la même espèce, & par le moyen de la première & de la quatrième, l'on parviendroit à une troisième équation qui auroit les mêmes conditions; on auroit donc trois équations & trois inconnues, ce qui est le cas précédent. Si l'on avoit cinq équations & cinq inconnues, en négligeant d'abord trois de ces inconnues, on parviendroit à quatre équations & quatre inconnues, ce qui donne le cas que nous venons de traiter, & ainsi des autres.

Des Equations à deux termes.

70. Soit l'équation $ax^m = b$, à laquelle on peut facilement rapporter toutes les équations à deux termes & à une seule inconnue. Donc en divisant, $x^m = \frac{b}{a}$ ou $x^m = c$ (en supposant $\frac{b}{a} = c$);

donc en prenant la racine m de part & d'autre, $x = \sqrt[m]{c}$. Si m est pair, cette racine aura le double signe \pm : si, par exemple, m est $= 4$, x sera $= \pm \sqrt[4]{c}$, & si l'on suppose $c = 16$, on aura $x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$. Outre ces deux racines il y en a encore deux autres, mais imaginaires. Si c étoit $= -8$, on auroit $x = \pm \sqrt[4]{-8}$, dont toutes les racines sont imaginaires. Si m étoit 3, l'on auroit $x = \sqrt[3]{-8} = -2$; & outre cette racine il y en auroit encore deux autres, mais imaginaires. Tout cela se comprendra mieux par la suite.

En général si l'on a l'équation $x^m = b$, on aura $l \cdot x^m = l \cdot b$ * ou $m l \cdot x = l \cdot b$ ou $l \cdot x = \frac{l \cdot b}{m}$; c'est-à-dire, que le logarithme de x est égal à celui de b divisé par m . Cherchant donc $\frac{l \cdot b}{m}$ dans les tables, on connoîtra $l \cdot x$, & par conséquent on connoîtra x ; si $\frac{l \cdot b}{m}$ ne se trouve pas dans les tables, on cherchera par la méthode dont nous avons parlé en traitant des logarithmes, à quel nombre il répond, & ce nombre fera $= x$.

PROBLÈME I. *Je vous donnerai, dit un pere à son fils, les écus que j'ai dans ma bourse, si vous devinez combien il y en a; le quarré de ce nombre multiplié par le quart du même nombre, donne 432.*

* En désignant le logarithme de x^m par $l \cdot x^m$ ou par $m l \cdot x$; car le logarithme de la puissance m d'un nombre est égal au produit de l'exposant m par le logarithme de ce nombre. Voyez ce qu'on a dit ci-dessus sur les logarithmes.

Soit x ce nombre, l'on aura, par la nature du Problème, $xx \times \frac{x}{4} = 432$. Ainsi $\frac{x^3}{4} = 432$, $x^3 = 1728$, & $\sqrt[3]{x^3} = x = 12$. Donc le nombre des écus étoit 12.

PROBLÈME II. On demande un nombre x tel qu'en divisant la quatrième puissance par sa moitié & ajoutant $14 + \frac{1}{4}$ au quotient, le résultat donne 100. Divisant x^4 par $\frac{x}{2}$, j'ai $2x^3$, & par la nature du Problème $2x^3 + 14 + \frac{1}{4} = 100$; donc $2x^3 = 100 - 14 - \frac{1}{4} = \frac{141}{4}$, $x^3 = \frac{141}{8}$ & $x = \sqrt[3]{(\frac{141}{8})} = \frac{7}{2}$; ainsi le nombre cherché est $x = \frac{7}{2}$.

PROBLÈME III. Quelques Négociants ayant formé un capital, pour lequel chacun a contribué cent fois autant d'écus qu'il y a d'Associés, envoient un Facteur à la Martinique pour faire valoir ce fonds. Ce Facteur gagne pour chaque centaine d'écus deux fois autant d'écus qu'il y a d'intéressés & son gain est de 2662 écus, on demande le nombre x des Associés. Puisque chaque Négociant a fourni $100x$ écus, le capital entier étoit $100xx$; & parce que le profit étoit de $2x$ pour cent, on trouvera ce que rapportoit le capital en faisant $100:2x::100xx:$

$\frac{2x \cdot 100xx}{100} = 2x^3$. Mais ce profit est $= 2662$; donc $2x^3 = 2662$, $x^3 = 1331$ & $x = \sqrt[3]{(1331)} = 11$; ainsi le nombre des Associés étoit 11.

PROBLÈME IV. Un Paysan échange des lapins domestiques contre des poules, à raison de deux lapins pour trois poules; ces p^oules pondent chacune un tiers autant d'œufs qu'il y a de poules. Le Paysan vend tous ses œufs au marché, en donnant neuf œufs pour autant de sols que chaque

poule a pondu d'œufs , & il reçoit 3 liv. 12 sols ; combien de lapins a-t-il échangé ? Soit x le nombre des lapins cherché ; celui des poules que le Payſan a reçues en échange ſera $\frac{3x}{2}$, & chaque poule pondant $\frac{x}{2}$, le nombre des œufs ſera $\frac{3xx}{4}$. Mais 9 œufs ſe vendent pour $\frac{x}{2}$ ſols ; donc l'argent que $\frac{3xx}{4}$ œufs produiſent eſt $= \frac{x^3}{24}$; ainſi $\frac{x^3}{24} = 3 \text{ liv. } 12 \text{ ſols} = 72 \text{ ſ.}$, $x^3 = 24 \times 72 = 8 \cdot 8 \cdot 27$, & $x = \sqrt[3]{(8 \cdot 8 \cdot 27)} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. C'eſt pourquoi le Payſan a donné 12 lapins & a reçu 18 poules.

Des équations plus élevées que le ſecond degré & qui peuvent néanmoins ſe réſoudre à la maniere de celles du ſecond.

71. Ces équations ne doivent renfermer que deux puiffances de x , mais dont l'expoſant de l'une ſoit double de celui de l'autre ; ainſi elles peuvent ſe réduire à cette formule $ax^{2m} + bx^m = c$ ou en diviſant par a , faiſant $\frac{b}{a} = 2d$ & $\frac{c}{a} = g$, à celle-ci $x^{2m} + 2dx^m = g$. Ajoutant de part & d'autre le quarré de la moitié du coefficient de x^m , on aura $x^{2m} + 2dx^m + d^2 = g + d^2$, & prenant les racines quarrées de part & d'autre, $x^m + d = \pm \sqrt{g + d^2}$, & en tranſpoſant, $x^m = -d \pm \sqrt{g + d^2}$, & prenant la racine m de part & d'autre, $x = \sqrt[m]{-d \pm \sqrt{g + d^2}}$. Si m eſt pair, il peut y avoir juſqu'à quatre racines réelles, & le premier radical doit avoir le ſigne \pm ; ſi m eſt im-

pair, le radical $\sqrt[m]{}$ ne peut avoir qu'un seul signe. Si g est négatif & plus grand que dd , toutes les racines seront imaginaires, quelque soit m , pair ou impair.

PROBLÈME. Trouver la racine m de la quantité $a^m + b$, b étant supposé fort petit en comparaison de a^m . Il est aisé de voir que la racine cherchée est $a + x$, x étant une quantité qu'il s'agit de trouver. Elevant $a + x$ à la puissance m , nous avons $a^m + m a^{m-1} x + m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot a^{m-2} x^2 + \&c. = a^m + b$.

Je néglige les termes ultérieurs, parce que se trouvant multipliés par des puissances de la fraction x (qui doit évidemment être assez petite) plus élevées que le quarré, ils doivent être fort petits. Retranchant de chacun des membres de l'équation, la quantité a^m & divisant par $m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot a^{m-2}$, l'on a

$$x^2 + \frac{2ax}{m-1} = + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}, \text{ ajoutant de part \& d'autre le quarré de la moitié du coefficient de } x, \text{ il vient } x^2 + \frac{2ax}{m-1} + \frac{a^2}{(m-1)^2} = + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}} + \frac{aa}{(m-1)^2}.$$

Prenant les racines de part & d'autre, l'on a $x + \frac{a}{m-1} = \pm$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}} \right)}, \text{ \& enfin } x = - \frac{a}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}} \right)};$$

nous ne nous servons pas du signe — du radical, parce qu'il est inutile ici. Donc $\sqrt[m]{a^m + b} = a +$

$$x = a - \frac{a}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}\right)},$$

& en réduisant, $\sqrt[m]{a^m + b} = \frac{(m-2)}{m-1} \times a +$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}\right)}.$$

Si la quantité b avoit le signe —, de manière qu'on eût $a^m - b$, on

donneroit le signe — au terme $\frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}$ qui

se trouve sous le radical, & l'on auroit $\sqrt[m]{a^m - b}$

$$= \frac{(m-2)}{m-1} \times a + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} - \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}\right)}.$$

COROLLAIRE. Si on suppose successivement $m = 3, 4, 5, 6, 7$ &c. on aura les formules suivantes :

$$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 \cdot a^2}{4} \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{a^4 \pm b} = \frac{2 \cdot a}{3} + \sqrt{\left(\frac{1 \cdot a^2}{9} \pm \frac{b}{6a^2}\right)}$$

$$\sqrt[5]{a^5 \pm b} = \frac{3 \cdot a}{4} + \sqrt{\left(\frac{1 \cdot a^2}{16} \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{a^6 \pm b} = \frac{4 \cdot a}{5} + \sqrt{\left(\frac{1 \cdot a^2}{25} \pm \frac{b}{15a^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{a^7 \pm b} = \frac{5 \cdot a}{6} + \sqrt{\left(\frac{1 \cdot a^2}{36} \pm \frac{b}{21a^5}\right)}$$

&c.

On peut voir maintenant pourquoi nous avons supposé que le radical avoit seulement le signe +, parce que nous ne cherchons que les racines positives de la quantité $a^m \pm b$; mais en prenant le radical en —, il est visible que la première formule deviendrait une quantité négative, en supposant b positif. Pour

Pour faire l'application des formules que nous venons de trouver, supposons qu'on demande la racine cube de 28. Je prends le plus grand cube contenu dans ce nombre, & je le suppose $= a^3$ & le reste $= b$, de sorte que j'ai $27 + 1 = a^3 + b$, & la première formule devient $\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right)} =$ (en réduisant au même dénominateur) $\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{16}\right)}$; prenant ensuite la plus grande racine du numérateur avec une seule décimale, & la divisant par la racine 6 du dénominateur, l'on aura la racine cherchée $= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 3 + 0.03$ à-peu-près. En général on peut chercher par les logarithmes la racine approchée du nombre proposé & la faire $= a$, élevant ensuite a à la puissance m & retranchant a^m de la quantité proposée, le reste donnera b . Substituant ensuite la valeur de a & de b dans la formule générale, il sera aisé d'en déduire la racine cherchée à peu de chose près, en prenant, par le moyen des décimales, la racine quarrée de la quantité qui se trouvera sous le signe radical.

Des Equations de tous les degrés.

72. Dans ce que nous allons dire des équations de tous les degrés, nous supposerons que le second membre est $= 0$, c'est-à-dire, qu'on a fait passer tous les termes dans le premier membre. Cela posé, soit proposé de trouver une équation, dans laquelle x soit indifféremment $= 2$ ou $= 3$. On aura donc les deux équations $x = 2$, $x = 3$ ou, en faisant passer tout dans le premier membre, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$; & en multipliant ces équations l'une par l'autre, le premier membre par

le premier & le second par le second, $(x - 2) \times (x - 3) = 0$, ou $x^2 - 5x + 6 = 0$. Dans cette équation x est $= 2$, & $x = 3$. Si l'on a $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, en multipliant ces trois équations l'une par l'autre, il viendra $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$. De la formation précédente, il suit premièrement qu'une équation a autant de racines que le plus haut exposant de l'inconnue contient d'unités. Secondement, que si à la place de l'inconnue on substitue sa valeur, la somme de tous les termes se réduira à 0. En effet, puisque l'équation ci-dessus résulte de $(x - a) \times (x - b) \times (x - c)$, si à la place de x je mets sa valeur a dans le premier facteur $x - a$, pour avoir $a - a = 0$, l'on aura $0 \times (x - b) \times (x - c) = 0$, comme il est évident. Troisièmement, que le coefficient du second terme d'une équation est égal à la somme des racines de l'équation, prises avec un signe contraire. Car les racines de l'équation précédente sont $x = a$, $x = b$, $x = c$. En effet l'équation $x - a = 0$, donne en transposant $x = a$; de même les équations $x - b = 0$, $x - c = 0$ donnent $x = b$, & $x = c$; or le coefficient du second terme de notre équation est $-(a + b + c) = -a - b - c$. Quatrièmement, que le coefficient du troisième terme d'une équation est égal à la somme des produits des racines multipliées deux à deux. Si l'équation étoit plus élevée, on trouveroit que le coefficient du quatrième terme seroit égal à la somme des produits des racines prises trois à trois, mais avec un signe contraire; que le coefficient du cinquième terme seroit égal à la somme des produits des racines prises quatre à quatre; &c. Mais le dernier terme est le produit de toutes les racines

prises avec un signe contraire. Cinquièmement, si le second terme manque, c'est une marque qu'il y a des racines négatives & des racines positives, & que la somme de unes est égale à la somme des autres; si le troisième terme manque, la somme des produits des racines positives, combinées avec les négatives, se réduit à 0; &c. Mais si le dernier terme manque, il y a une racine $= 0$, & l'on peut abaisser l'équation en divisant les deux membres par $x = 0$. Ainsi l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0$ devient, en divisant par x , $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Sixièmement, que les valeurs de l'inconnue se trouvent parmi les diviseurs du dernier terme, de sorte qu'en substituant dans l'équation, à la place de x , chaque diviseur du dernier terme, d'abord avec le signe $+$, ensuite avec le signe $-$, on sera sûr d'avoir une des racines lorsque la substitution d'un de ces diviseurs rendra la somme de tous les termes $= 0$. Ainsi substituant b à la place de x dans l'équation $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$, je trouve $b^3 - ab^2 - b^3 - cb^2 + ab^2 + acb + cb^2 - abc = 0$; mais si j'avois substitué $-b$ au lieu de $+b$, la somme de tous les termes ne se seroit pas réduite à 0.

En multipliant les unes par les autres, les trois équations $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 5 = 0$, l'on aura l'équation $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0$, où l'on peut remarquer qu'il y a un changement de signe du second au troisième terme, & une racine positive $x = 2$, deux successions des mêmes signes, puisque le premier & le second terme ont le signe $+$, le troisième & le quatrième le signe $-$; mais il y a deux racines négatives. En général il y a autant de racines négatives qu'il y a de succes-

sions du même signe , & autant de positives qu'il y a de changemens de signe d'un terme à l'autre.

En effet, si toutes les racines sont positives, elles entreront dans les équations composantes avec le signe —. Si, *par exemple*, les racines sont $+b$, $+c$, &c. les équations composantes seront $x - b = 0$, $x - c = 0$, &c. & dans le produit de toutes ces équations, il ne pourra y avoir de termes négatifs que le second & ceux où les racines se trouveront être multipliées les unes par les autres en nombre impair, ce qui n'arrive qu'aux places paires, selon ce qu'on a dit ci-dessus ; ainsi les termes seront alternativement positifs & négatifs.

Si toutes les racines sont négatives, elles entreront dans les équations composantes avec le signe $+$: or il est clair que le produit de ces équations aura tous les termes positifs.

Enfin soient les racines les unes positives, les autres négatives, comme $+a$, $-b$, &c. & les équations composantes $x - a = 0$, $x + b = 0$, &c. & supposons d'abord qu'il n'y en ait que deux, l'équation composée sera $xx - ax - ab = 0$,
 $+bx$

dans laquelle si on suppose $a > b$, le premier terme sera positif, & les deux autres négatifs, & il y aura un changement de signe & une répétition du même signe ; & si on suppose $a < b$, les deux premiers termes seront positifs & le troisième négatif, & il y aura de même un changement de signe & une répétition du même signe. Si $a = b$, l'équation se réduira à $xx \pm 0 \cdot x - ab = 0$; & quelque signe qu'on donne à zéro, il y aura toujours un changement de signe & une répétition du même signe, comme il y a une racine positive & une négative.

Supposons maintenant qu'il y ait trois racines, deux positives & une négative, & que les équations composantes soient $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, l'équation composée sera

$$\left. \begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx + abc \\ - bx^2 - acx \\ + cx^2 - bcx \end{array} \right\} = 0$$

dans laquelle, si on suppose $a + b > c$, le second terme sera négatif, & quelque signe qu'on donne au troisième, il y aura deux changemens de signe & une répétition du même signe; & si on suppose $a + b < c$, le second terme sera positif & le troisième négatif, & il y aura encore deux changemens de signe & une répétition du même signe. Enfin si $a + b = c$, le second terme sera ± 0 , mais le troisième sera négatif, & quelque signe qu'on donne au second, il y aura toujours deux changemens de signe & une répétition du même signe, comme il y a deux racines positives & une négative.

On trouveroit par un raisonnement semblable que s'il y avoit deux racines négatives & une positive, & que les équations composantes fussent $x - a = 0$, $x + b = 0$, $x + c = 0$, le produit auroit un seul changement de signe & deux répétitions du même signe. Ce que nous venons de dire a également lieu pour les équations plus élevées; de sorte qu'en général il y a autant de racines positives qu'il y a de changemens de signes dans deux termes consécutifs, & autant de racines négatives qu'il y a de répétitions du même signe dans deux termes consécutifs. Mais nous reprendrons cette matière dans le Calcul Différentiel.

D'où il suit qu'à la simple inspection d'une équation on peut juger combien elle a de racines négatives.

tives, si l'on fait d'ailleurs que toutes les racines sont réelles.

Il est aisé de voir que si toutes les racines étoient négatives, tous les termes auroient le signe $+$; car ils résulteroient du produit de plusieurs quantités qui auroient toutes le signe $+$. Le dernier terme auroit aussi le signe $+$ si le nombre des racines positives de l'équation étoit pair; car un nombre pair de signes $-$ multipliés les uns par les autres donne $+$. Mais le dernier terme auroit le signe $-$, si le nombre des racines positives étoit impair, puisqu'un nombre impair de signes $-$ multipliés les uns par les autres donne nécessairement $-$. Mais parce que, ainsi qu'il sera aisé de le conclure de ce que nous dirons dans la suite, les facteurs imaginaires ne se trouvant dans les équations qu'en nombre pair, & que le produit de deux de ces facteurs a nécessairement le dernier terme positif, dans une équation quelconque dont le dernier terme est négatif, il y a au moins une racine positive.

Ce que nous venons de dire sur les changemens de signe & les successions des mêmes signes, ne peut avoir lieu que lorsqu'il n'y a point de racines imaginaires, lesquelles se trouvent toujours en nombre pair dans une équation délivrée de radicaux. En effet, si l'on multiplie l'une par l'autre, les deux équations

$$\left. \begin{array}{l} x - \sqrt{-a^2} = 0 \\ x + \sqrt{-a^2} = 0 \end{array} \right\} \text{on aura l'équation } x^2 + a^2 = 0,$$

qui aura nécessairement ses racines imaginaires. Mais si l'on multiplioit $x - \sqrt{-a^2} = 0$ par $x - \sqrt{-a^2} = 0$, l'équation qui en résulteroit, contiendrait nécessairement un radical, ainsi qu'il est aisé de le voir en exécutant l'opération. Il en seroit de même en multipliant l'une par l'autre. Les deux équations $x + \sqrt{-aa} = 0$, $x + \sqrt{-aa}$

$= 0$ ou $x + a \sqrt{-1} = 0$ & $x + a \sqrt{-1} = 0$. De même si la valeur de x est une quantité réelle — a jointe à une imaginaire — $b \sqrt{-1}$, pour que l'équation ne soit point affectée de quel que radical, il faut que l'équation $x + a + b \sqrt{-1} = 0$, soit multipliée par $x + a - b \sqrt{-1} = 0$; de manière que la quantité réelle ait le même signe & , la quantité imaginaire différens signes dans les deux facteurs. Toutes les quantités imaginaires peuvent se réduire à la forme $M + N \sqrt{-1}$, en supposant $M = 0$, lorsque la quantité imaginaire se trouve seule : ainsi que nous la démontrerons dans la seconde partie de ce Cours. Mais nous supposerons dans la suite les équations délivrées de radicaux.

Il suit de ce que nous venons de dire, qu'une équation d'un degré impair, doit avoir au moins une racine réelle, puisque les racines imaginaires ne peuvent trouver dans une équation qu'en nombre pair. Donc une équation du troisième degré, doit avoir au moins une racine réelle ; de plus dans une équation du troisième degré qui n'a point de second terme, & dont le troisième est positif (nous prenons pour troisième terme celui qui le seroit, si le second ne manquoit pas), il y a nécessairement deux racines imaginaires. En effet soit l'équation $x^3 + (a b + a c + b c) x + a b c = 0$. Puisque le second terme manque, la somme des racines $+ a + b + c$ est $= 0$; donc en transposant, $b = -a - c$. Substituant cette valeur de b dans le coefficient de x , l'on aura $+(-a a - a c - a c - c c + a c) = (-a a - c c - a c)$; or cette quantité ne peut être positive : car le carré de $a - c$ doit toujours être une quantité positive, en

supposant même $c > a$. Donc $(a - c)^2 = a^2 - 2ac + c^2$ est une quantité positive, & par conséquent $a^2 + c^2 > 2ac$, donc $-a^2 - c^2 - ac$ est une quantité négative. Donc puisque dans l'équation dont nous venons de parler, cette quantité est supposée positive, il doit y avoir deux racines imaginaires*. Donc c & a ne sont pas des quantités réelles, mais au moins l'une des deux est imaginaire, & parmi les trois a, b, c , il y en a deux imaginaires.

73. PROBLÈME. *Délivrer une équation de ses radicaux.* Pour faire évanouir les radicaux d'une équation, on mettra à la place de chaque radical une inconnue, & l'on aura premierement une nouvelle équation qui ne contiendra plus de radicaux, secondement de plus autant d'équations à deux termes qu'il y avoit de radicaux dans l'équation proposée, & en élevant chacun des membres de ces équations à la puissance indiquée par l'exposant du radical correspondant, il n'y aura plus qu'à chasser de ces équations délivrées des radicaux les inconnues introduites. Soit, par exemple, l'équation $x - \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{d} = 0$. Ayant fait $\sqrt[3]{a} = y, \sqrt[3]{d} = p$, on aura $x - y - p = 0$ ou $x = y + p$; $a = y^3$; $d = p^3$. De la première équation je tire $y = x - p$, substituant cette valeur de y dans $a = y^3$ il vient $x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - p^3 = a$, de laquelle il ne s'agit plus que chasser p . Si dans cette équation, à la place de p^3 , je substitue sa valeur

* Si l'on suppose $a = 2 + 5\sqrt{-1}, c = 2 - 5\sqrt{-1}$, l'on aura $-aa - cc - ac = 37$. En supposant $a = 2 + 5\sqrt{-1}$ & $c = -4$, l'on aura $-aa - cc - ac = 13$.

d prise de l'équation $d = p^3$, elle devient $x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - d = a$, de laquelle je tire $p^2 = \frac{d + a - x^3 + 3x^2p}{3x}$. Multipliant les deux mem-

bres de celle-ci par p , & mettant d à la place de p^3 , j'ai $d = \frac{pd + pa - px^3 + 3x^2pp}{3x}$, d'où je tire en

en multipliant, transposant & divisant, $p^2 = \frac{3dx - pd - pa + px^3}{3x^2}$. Egalant ces deux valeurs de

p^2 , je tire du résultat l'équation $p = \frac{x^4 + 2dx - ax}{a + d + 2x^3}$,

substituant cette valeur de p dans l'équation $x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - p^3 = a$, j'ai enfin l'équation

$$\left. \begin{aligned} x^9 - 3dx^6 + 3a^2x^3 - a^3 \\ - 3ax^6 + 3d^2x^3 - 3a^2d \\ - 21adx^3 - 3ad^2 \\ - d^3 \end{aligned} \right\} = 0, \text{ équation}$$

tion qui ne contient d'autre inconnue que la proposée. On se tireroit de la même manière de quelque équation qu'on eût; mais il y a des cas où il est inutile d'avoir recours à la méthode précédente.

Si, par exemple, l'on avoit l'équation $x + a - \sqrt[3]{b + \sqrt[3]{x}} = 0$, on auroit en transposant,

$x + a = \sqrt[3]{b + \sqrt[3]{x}}$, élevant au carré, $x^2 + 2ax + a^2 = b + \sqrt[3]{x}$; transposant b dans le

premier membre, il vient $x^2 + 2ax + a^2 - b = \sqrt[3]{x}$. On voit bien qu'en élevant l'un & l'autre

membre à la troisième puissance, il en résulteroit une équation sans radicaux.

74. PROBLEME. Délivrer une équation de son se-

cond terme. Soit l'équation $x^n + a x^{n-1} + \dots + \&c. = 0$. Supposons $x = y + p$; substituant cette valeur à la place de x , on aura

$$\left. \begin{aligned} y^n + p n y^{n-1} + p^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) \cdot y^{n-2} + \&c. \\ + a y^{n-1} + p \cdot (n-1) \cdot a \cdot y^{n-2} + \&c. \end{aligned} \right\} = 0.$$

Si l'on suppose $p n + a = 0$, ou $p n = -a$ ou $p = -\frac{a}{n}$, c'est-à-dire, si l'on suppose x égal à une nouvelle inconnue y jointe à la quantité p , p étant égal au coefficient du second terme pris avec un signe contraire & divisé par le degré de l'équation, on aura une nouvelle équation délivrée du second terme. Si l'on supposoit $= 0$ la somme de toutes les quantité qui multiplient y^{n-2} , en cherchant la valeur de p que donneroit cette supposition, on auroit une équation sans troisieme terme. On peut voir maintenant comment il faudroit s'y prendre pour avoir une équation sans quatrieme terme, sans cinquieme terme, &c.

75. PROBLEME. *Délivrer une équation des fractions qu'elle peut contenir.* Il suffit de supposer l'inconnue $x = \frac{y}{n}$, n étant supposée divisible par tous les dénominateurs des fractions qui se trouvent dans l'équation. Soit, *par exemple*, l'équation $x^3 + \frac{a}{b} x^2 + \frac{c}{d} x + \frac{g}{f} = 0$. En supposant $x = \frac{y}{n}$, on aura $\frac{y^3}{n^3} + \frac{a y^2}{b n^2} + \frac{c y}{d n} + \frac{g}{f} = 0$, & en multipliant par n^3 , il viendra $y^3 + \frac{n a}{b} y^2 + \frac{n^2 c}{d} y + \frac{n^3 g}{f} = 0$. Si l'on suppose $n = b d f$, l'é-

quation précédente deviendra $y^3 + a d f y^2 + b^2 f^2 d c y + b^3 d^3 f^2 g = 0$, équation sans fractions. Il suffit donc dans tous les cas de supposer $n =$ au produit des dénominateurs de toutes les fractions, ou même à une quantité divisible par tous ces dénominateurs, lorsqu'ils ne sont pas premiers entr'eux.

76. PROBLEME. *Délivrer le premier terme d'une équation de son coefficient.* Soit l'équation $a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$, en divisant par le coefficient a du premier terme, l'on aura $x^3 + \frac{b x^2}{a} + \frac{c x}{a} + \frac{d}{a} = 0$; & en faisant évanouir les fractions, en supposant $x = \frac{y}{a}$, l'on aura $y^3 + b y^2 + a c y + a^2 d = 0$, équation dans laquelle le premier terme n'a plus de coefficient. Donc pour délivrer une équation d'un coefficient qui affecte le premier terme, il suffit de supposer l'inconnue égale à une autre inconnue divisée par ce coefficient.

77. PROBLEME. *Changer les racines positives d'une équation en négatives & réciproquement.* Pour changer les racines positives en négatives & réciproquement, il suffit de changer les signes des termes où se trouvent les puissances impaires de x : en effet il est évident que l'on changera les signes des racines de l'équation, en mettant $-x$ au lieu de $+x$; or ce changement ne peut affecter que les termes dans lesquels x a un exposant impair; donc, &c.

78. PROBLEME. *Changer les racines d'une équation sans les connoître, soit en les augmentant ou en les diminuant d'une quantité donnée, soit en les multi-*

pliant ou en les divisant par une quantité donnée , soit en faisant qu'elles soient à ce qu'elles étoient dans un rapport donné.

REGLÉ. I°. Pour augmenter les racines d'une équation d'une quantité donnée, on substituera à l'inconnue une autre inconnue moins la quantité donnée. *Par exemple* , pour les augmenter de la quantité a , on mettra $y - a$ à la place de l'inconnue x , & les puissances de $y - a$ à la place des mêmes puissances de x ; car la première inconnue x représente les racines de l'équation proposée , & la seconde inconnue y représente celles de l'équation transformée : or cette seconde inconnue y est égale à la première x plus la quantité a , puisqu'on a mis $y - a$ pour x , ce qui suppose $y = x + a$; donc les racines de la transformée sont celles de la proposée , augmentées de la quantité a .

II°. Par la même raison , s'il falloit diminuer les racines d'une équation d'une quantité donnée a , on n'auroit qu'à substituer à son inconnue x une autre inconnue y plus la quantité donnée a , parce que $y + a$ mis à la place de x suppose $y = x - a$.

III°. Pour multiplier les racines d'une équation par une quantité a , on substituera à l'inconnue une autre inconnue divisée par a , comme $\frac{y}{a}$, *par exem-*

ple , parce que $\frac{y}{a} = x$, donne $y = ax$.

IV°. Pour diviser les racines d'une équation par une quantité a , on substituera à la place de l'inconnue une autre inconnue multipliée par a , *par exemple* , ay à la place de x ; parce que $ay = x$ donne $y = \frac{x}{a}$.

V°. Pour faire que les racines d'une équation soient à ce qu'elles étoient dans un rapport donné , *par exemple* , dans le rapport de b à c , on substituera à la place de l'inconnue une autre inconnue multipliée

par $\frac{c}{b}$: ainsi à la place de x on mettra $\frac{cy}{b}$, parce

que la proportion $b : c :: y : x$ donne $x = \frac{cy}{b}$.

R E M A R Q U E S. On peut dans les transformations dont on vient de parler , laisser la même inconnue , parce qu'il est indifférent d'exprimer une quantité inconnue par une lettre ou par une autre , & on ne l'a changée dans la règle que pour faire mieux comprendre l'effet de la transformation ; il faut seulement faire sur l'inconnue de l'équation ce qu'on feroit relativement à une nouvelle inconnue. *Par exemple* , on mettra $x - a$ à la place de x , lorsqu'on voudra augmenter les racines de la quantité a , on y mettra $x + a$, lorsqu'on voudra les diminuer de la quantité a , &c. Cette méthode abrégera même différentes opérations , comme celles de la multiplication & de la division des racines , lesquelles se réduiront à multiplier ou à diviser le second terme de l'équation proposée par la quantité donnée , le troisième terme par le carré de cette quantité , le quatrième terme par le cube de la même quantité , &c. Ce qu'on comprendra mieux par un exemple.

Soit l'équation proposée $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, dont on veut multiplier les racines par a ; il faudroit en changeant l'inconnue mettre

$\frac{y}{a}$ à la place de x , ce qui donneroit $\frac{y^3}{a^3} - \frac{py^2}{a^2}$

$+ \frac{qy}{a} - r = 0$; & comme il convient d'ôter les fractions , & sur tout celle du premier terme , il faudroit multiplier tous les termes de la transformée par a^3 , ce qui donneroit $y^3 - a p y^2 + a^2 q y - a^3 r = 0$; ce qu'on auroit trouvé plus simplement en laissant l'inconnue x , & multipliant le second terme par a , le troisième par a^2 , & le quatrième terme par a^3 , puisqu'on auroit $x^3 - a p x^2 + a^2 q x - a^3 r = 0$, qui est la même que la précédente , si ce n'est que l'inconnue est ici désignée par la lettre x .

De même si l'on veut diviser les racines de la même équation $x^3 - p x^2 + q x - r = 0$ par a , il faudra en changeant l'inconnue mettre $a y$ pour x , ce qui donnera $a^3 y^3 - a^2 p y^2 + a q y - r = 0$; mais parce qu'il faut délivrer le premier terme d'un coefficient différent de l'unité , il faudra encore diviser tous les termes de la transformée par a^3 , ce qui donnera $y^3 - \frac{p y^2}{a} + \frac{q y}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$, ce qu'on auroit trouvé plus simplement en laissant la même inconnue , & divisant le second terme par a , le troisième par a^2 & le quatrième par a^3 , puisqu'on auroit eu $x^3 - \frac{p x^2}{a} + \frac{q x}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$, la même que la précédente.

On peut aussi demander de trouver les limites des racines d'une équation , c'est-à-dire , une quantité plus grande qu'aucune de ses racines positives , & une autre quantité plus petite qu'aucune de ses racines négatives.

Pour avoir les limites d'une équation , on fera

l'inconnue $x = z + p$, cette supposition fera trouver deux quantités, dont l'une sera plus grande qu'aucune de ses racines réelles, & l'autre plus petite. Pour le faire voir, soit l'équation $x^3 - x^2 - 57x + 105 = 0$. En faisant $x = z + p$ l'on aura

$$\left. \begin{array}{l} x^3 = z^3 + 3pz^2 + 3p^2z + p^3 \\ - x^2 = - z^2 \quad - 2pz - p^2 \\ - 57x = - 57z - 57p \\ + 105 = + 105 \end{array} \right\} = 0 (A).$$

Or il est visible que toutes les racines de la transformée A seront négatives & que tous ses termes auront le signe +, en faisant $p = 10$; mais, parce que $x = z + p$, on a $x - 10 = z$ quantité négative; donc $x < 10$; c'est-à-dire, que la plus grande racine positive est au-dessous de 10. Mais on peut reserrer davantage cette limite: car en faisant $p = 8$ on trouve encore que tous les termes restent positifs. Si nous voulons reserrer encore cette limite; en faisant $p = 7$, nous aurons $z^3 + 20z^2 + 76z = 0$ (car alors le dernier membre devient $343 - 49 - 399 + 105 = 0$), équation qui étant divisible par $z = 0$, ou par $z - 0 = 0$, fait voir qu'une de ces racines est $= 0$. C'est pourquoi dans la proposée la plus grande racine positive sera $= z + p = 0 + 7 = 7$. Les deux autres racines sont contenues dans l'équation du second degré $z^2 + 20z + 76 = 0$, qui est facile à résoudre.

Si l'on demandoit la limite des racines négatives de la même équation, on la trouveroit facilement, en supposant $p = -10$ dans la transformée A, parce que dans ce cas les termes auroient

alternativement les signes $+$ & $-$, & par conséquent toutes les racines seroient positives. Mais on peut encore reserrer davantage cette limite ; car en supposant $p = -8$, les mêmes signes auroient lieu. Donc $z = x - p = x + 8$ (dans la supposition que nous venons de faire) est une quantité positive, & $x = z + p$, est $> +8$, puisque pour avoir x il faudroit ajouter une quantité positive à -8 ; donc x ne peut pas être au-dessous de -8 qui est par conséquent la limite des racinés négatives ; de sorte que -8 est une quantité plus petite qu'aucune des racines réelles de l'équation. Il est visible que nous regardons ici la quantité négative -8 , non seulement comme plus petite que 0 , mais encore comme plus petite que -3 , -5 &c. & en général comme plus grande que toutes les autres quantités qui prises positivement seroient plus grandes que 8 .

Soit l'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$, qui par

$$z^2 + 2pz + p^2 = 0 \text{ (A)}$$

$$-4z \quad -4p$$

$$+4$$

la supposition de $x = z + p$, devient la transformée A. Si dans cette dernière équation nous faisons $p = 3$, il est visible que tous les termes seront positifs : ainsi 3 est la limite des racines positives. Si je fais $p = 2$, la transformée A devient $z^2 \pm 0 \cdot z \pm 0 = 0$. Car 0 peut toujours être supposé avoir le double signe \pm ; donc $z = 0$, ce qui me fait connoître que les deux racines de la proposée sont chacune $= 2$. Car de $z^2 \pm 0 \cdot z = 0$, on tire (en divisant par $z = 0$) $z \pm 0 = 0$, & $z = 0$.

Si

Si en resserrant ainsi les limites, une même valeur de p indiquoit en même tems une limite positive & une limite négative, ce seroit une marque que la proposée a toutes les racines imaginaires; car entre la limite b & la limite b il ne peut y avoir aucune racine réelle excepté 0. Mais dans ce cas la proposée seroit divisible par $x = 0$, & contiendrait x dans son dernier terme, ce que nous ne supposons pas. Soit l'équation $x^3 - 4x + 20 = 0$, si on fait $x = z + p$ & $z^3 + 2pz + p^3 = 0$ (A) $p = 2$, la transformée A $z^3 - 4z - 4p$ devient $z^3 \pm 0 \cdot z + 16 + 20 = 0$, & l'on obtient un ordre de signes qui indique la limite des racines négatives, & en même tems celle des positives. Il n'y a donc aucune racine réelle entre les limites $+2$ & $+2$. En effet la proposée contient deux racines imaginaires, désignées par l'équation $x = 2 \pm \sqrt{-16}$.

Si l'on proposoit de rendre toutes les racines d'une équation positives; voici une règle qu'on pourroit suivre.

RÈGLE I^o. Si toutes les racines étoient négatives, ce qu'on connoîtroit à ce que tous les termes seroient positifs, on changeroit les signes des termes pairs, suivant ce qu'on a dit ci-dessus.

II^o. S'il y a quelque racine positive, ce qu'on connoîttra à ce qu'il y aura quelque terme négatif, on prendra le plus grand des coefficients négatifs, y comprenant le dernier terme, & ayant rendu ce coefficient positif, & l'ayant augmenté de l'unité, on mettra à la place de l'inconnue ce coefficient ainsi changé moins une inconnue.

EXEMPLE. Soit l'équation proposée $x^3 + 3x - 24 = 0$, dont les racines sont $-2, +3,$
Tome I. P

— 4. On prendra son plus grand coefficient négatif — 24, & le rendant positif & lui ajoutant l'unité, on aura 25, dont on ôtera une inconnue, & & on mettra $25 - y$ à la place de la première inconnue, ce qui donnera après les opérations ordinaires $y^3 - 78y^2 + 2015y - 17226 = 0$, dont les racines sont 27, 22, 29,

DEMONSTRATION. Soit l'équation proposée $x^3 - px^2 - qx - r = 0$, dans laquelle — p soit le plus grand coefficient négatif, si on y met $p + 1 - y$ à la place de x , on aura

$$\begin{aligned} & (p+1)^3 - 3(p+1)^2 y + 3(p+1)y^2 - y^3 = 0 \\ & -p(p+1)^2 + 2p(p+1)y - py^2 \\ & -q(p+1) + qy \\ & -r \end{aligned}$$

Et en changeant tous les signes pour avoir le premier terme positif,

$$\begin{aligned} y^3 - 3(p+1)y^2 + 3(p+1)^2 y - (p+1)^3 &= 0 \\ +py^2 - 2p(p+1)y + p(p+1)^2 & \\ -qy + q(p+1) & \\ +r & \end{aligned}$$

Or si on considère chaque terme de cette transformée, on verra qu'en conséquence de ce que p est le plus grand coefficient, la première partie est plus grande que toutes les autres parties ensemble; ainsi dans le dernier terme, qui est le seul pour lequel on pourroit craindre le contraire, on verra que $(p+1)^3 = (p+1) \times (p+1)^2$ contient $(p+1)^2$ une fois de plus que $p \times (p+1)^2$; & que l'excès $(p+1) \times (p+1)$ surpasse la par-

tie suivante $q \times (p + 1)$, au moins de l'excès $p + 1$, lequel est plus grand que r par la supposition ; donc la première partie de ce dernier terme surpasse tout le reste & donne son signe à la somme de toutes ses parties ; & comme il en est de même des autres termes , tous les termes de la transformée auront les mêmes signes que les termes de la première ligne , lesquels sont alternativement positifs & négatifs , & par conséquent les racines seront toutes positives.

Il est facile de voir qu'il en feroit de même si $-q$ ou $-r$ étoit le plus grand coefficient négatif, ou encore s'il y avoit quelque coefficient positif plus grand que les autres ; car supposant que l'équation est $x^3 - px^2 + qx + r = 0$, d'abord $+r$ ne pourra déranger la succession alternative des signes de $(p + 1 - y)^3$, parce que r aura le même signe que $(p + 1)^3$, & $+q$ ne pourra pas non plus la déranger, parce que multipliant $p + 1 - y$, ou sa puissance quelconque, il n'en changera pas les signes.

Cette opération augmente toutes les racines négatives de la quantité $p + 1$, mais en même tems elle change les positives en négatives, & les négatives en positives ; car $p + 1 - y = x$ donne $y = p + 1 - x$, qui revient à $p + 1 + x$, lorsque x est négatif ; ainsi l'on voit dans l'exemple qu'on a pris que la racine -2 devient $27 = 25 + 2$, que la racine $+3$ devient $22 = 25 - 3$, & que la racine -4 devient $29 = 25 + 4$.

D'où suit que le plus grand coefficient négatif rendu positif & augmenté de l'unité surpasse chacune des racines positives , puisque diminué de chacune de ces racines , il a encore une valeur positive.

79. Passons maintenant à la recherche des racines réelles & commensurables des équations. Selon ce que nous avons dit ci-dessus (72), on trouve les racines d'une équation en substituant successivement avec le signe $+$ & $-$ chacun des diviseurs du dernier terme à la place de l'inconnue : ceux de ces diviseurs qui rendent toute l'équation $= 0$ sont racines de l'équation. Il n'est pas moins évident qu'on trouvera ces mêmes racines en divisant l'équation par l'inconnue \pm un des diviseurs du dernier terme, & le diviseur qui, joint à l'inconnue, divise exactement l'équation, est une des racines de l'équation, pourvu qu'on prenne ce diviseur avec un signe contraire. Soit l'équation $x^3 - 5x + 7x - 3 = 0$, les diviseurs du dernier terme 3, qu'on trouvera par la méthode ci-dessus (29), sont 1 & 3 qu'il faut joindre à x avec le signe $+$ & $-$: ainsi l'on peut tenter la division par les quatre facteurs $x + 1$, $x + 3$, $x - 1$, $x - 3$. Les deux premiers facteurs ne peuvent diviser exactement l'équation ; mais la division réussit par le facteur $x - 1 = 0$, & le quotient $x^2 - 4x + 3 = 0$ est encore divisible par $x - 1$, le dernier quotient donnant $x - 3 = 0$; donc les racines de l'équation sont $x = 1$, $x = 1$, $x = 3$.

On pourroit faire une objection contre la méthode précédente, qu'il est bon de résoudre : si les racines d'une équation étoient fractionnaires, comme le dernier terme peut avoir un nombre infini de diviseurs fractionnaires, comment pourroit-on s'y prendre pour trouver ceux qui doivent réussir ? Il est aisé de voir qu'une équation telle que $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + c = 0$, dont le premier terme est sans coefficient, & dont aucun

des autres termes n'est fractionnaire, ne sauroit avoir aucune racine fractionnaire. En effet, supposons $x = \frac{d}{p}$, fraction irréductible, c'est-à-dire, telle que d & p n'ayent aucun diviseur commun. Substituant cette valeur de x dans l'équation ci-dessus, on aura $\frac{d^m}{p^m} + a \frac{d^{m-1}}{p^{m-1}} + b \frac{d^{m-2}}{p^{m-2}} \dots + c = 0$. En multipliant toute l'équation par p^{m-1} & transposant, on aura $\frac{d^m}{p} = -(a d^{m-1} + b p d^{m-2} + \dots + c p^{m-1})$, nombre entier comme il est évident; donc $\frac{d^m}{p}$ seroit un nombre entier; donc d^m seroit exactement divisible par p ; mais d & p n'ayant aucun diviseur commun, sont premiers entr'eux. Donc en élevant d à une puissance quelconque, ce nombre sera composé d'un nombre premier avec p , pris un nombre de fois désigné par un nombre premier encore avec p ; donc d^m sera premier par rapport à p ; donc $\frac{d^m}{p}$ ne peut être un nombre entier; donc, &c. Soit $d = 3$, $p = 2$, $m = 3$, on aura $\frac{d}{p} = \frac{3}{2}$ & $\frac{d^m}{p} = \frac{27}{2}$. Or il est visible que 27 n'est pas exactement divisible par 2*.

80. La méthode précédente a cet inconvénient, que lorsque le dernier terme a beaucoup de diviseurs, la multiplicité des calculs qu'il faudroit faire pour trouver ceux qui doivent réussir, pourroit décourager le plus laborieux Analyste. Il est donc

* C'est aussi une conséquence de ce que nous avons dit ci-dessus (38).

à propos de chercher quelque méthode propre à diminuer le travail du Calculateur. On a remarqué qu'en faisant dans une équation dont l'inconnue est x & $x + a$ un diviseur, qu'en faisant, dis-je, x égal à un nombre donné, à 1, *par exemple*, la quantité dans laquelle l'équation se change par cette supposition de $x = 1$, est divisible par ce nombre $+a$, c'est-à-dire, ici par $1 + a$. En effet, soit l'équation $x^2 - x - 6 = 0$, dont un des diviseurs est $x + 2$. Si l'on fait $x = 5$, la quantité $25 - 5 - 6 = 14$, dans laquelle se change cette équation par la supposition de $x = 5$, est divisible par $5 + 2 = 7$. De cette observation il suit qu'en supposant $x = 0$, le dernier terme de l'équation sera divisible par a . Si l'on fait successivement $x = 1, 2, 3, \&c. - 1, - 2, - 3, \&c.$ Le nombre dans lequel se changera l'équation dans ces différentes suppositions, sera divisible par $1 + a, 2 + a, 3 + a, \&c. - 1 + a, - 2 + a, - 3 + a, \&c.$ Mais les nombres $3 + a, 2 + a, 1 + a, a, - 1 + a, - 2 + a, - 3 + a$ sont en progression arithmétique, & celui qui résulte de la supposition de $x = 1$ surpasse d'une unité celui qui vient de la supposition de $x = 0$, tandis que celui-ci surpasse d'une unité celui que donne la supposition de $x = - 1$. Donc on peut rejeter les diviseurs qui n'ont pas cette condition, ce qui épargne beaucoup de tentatives inutiles.

EXEMPLE. Soit l'équation $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$.

A	B	C	D	E
$x = 2$	20	1, 2, 5, 4, 10, 20	5	-1
$x = 1$	8	1, 2, 4, 8	4	-2
$x = 0$	6	1, 2, 3, 6	3	-3
$x = -1$	16			-4
$x = -2$	16	1, 2, 4, 8, 16	2	

Ayant écrit dans la colonne A les valeurs que je veux donner à x , j'écris dans la colonne B les nombres dans lesquels se change successivement l'équation par les suppositions correspondantes de x (ici on néglige les signes de ces nombres *); J'écris aussi en C les diviseurs de la colonne B. Parmi les diviseurs de 6 qui vient par la supposition de $x=0$, je cherche s'il y en a quelqu'un qui soit surpassé de l'unité par ceux qui viennent de la supposition de $x=1$, & qui surpasse en même tems de l'unité quelqu'un de ceux que donne la supposition de $x=-1$. En prenant ces diviseurs soit en $+$ soit en $-$, je trouve que $+3$ & -3 ont cette condition; car on trouve 4 dans les diviseurs de 8, & 2 parmi les diviseurs de 16. De même en prenant ces diviseurs avec le signe $-$, je trouve -2 dans les diviseurs de 8, & -4 parmi ceux de 16; donc $+3$ & -3 ont les conditions requises. Si vous voulez vous assurer si l'un des deux ne doit pas être rejeté, il n'y a qu'à remarquer qu'en supposant $x=2$, il faut trouver parmi les diviseurs de 20 que donne cette supposition, le nombre 5, qui surpasse de 1 le nombre 4 que donne la supposition de $x=1$, & le nombre -1 qui surpasse aussi de 1 le diviseur -2 venu de la même supposition de $x=1$. Or 1 & 5 sont des diviseurs de 20, donc jusqu'ici on n'a pas de raison de rejeter $+3$ ni -3 ; de sorte que nous avons les progressions arithmétiques D & E, dont les termes correspondans à $x=0$ sont des diviseurs à essayer. Mais en supposant $x=$

* Parce que si $+a$ peut diviser exactement $+ad$, $+a$ divisera $-ad$, de même $-a$ divisera $+ad$ & $-ad$.

— 2, il faudra trouver parmi les diviseurs de 16 que donne cette supposition, à l'égard de $+3$, le diviseur 1 plus petit d'une unité que 2, provenant de la supposition de $x = -1$, & — 5 pour le second diviseur — 3; mais 5 n'est pas un diviseur de 16; donc — 3 doit être rejeté. On ne peut donc tenter la division que par le facteur $x + 3$, elle réussit & donne pour quotient $x^2 - 5x + 2 = 0$; donc $x + 3 = 0$, ou $x = -3$; donc — 3 est une des racines de l'équation. Si l'on trouvoit un trop grand nombre de diviseurs, l'on pourroit essayer de le diminuer par des nouvelles suppositions de $x = 3$, $x = 4$, $x = -3$, $x = -4$, &c. sur quoi l'on peut remarquer que cette méthode fait véritablement connoître les diviseurs qui peuvent réussir, mais qu'il ne s'en fait pas que les diviseurs que la méthode fait trouver doivent réussir, parce qu'il peut se faire que l'équation n'ait que des racines imaginaires, ou incommensurables.

Soit maintenant l'équation $x^4 + 2x^3 + 13x^2 - 14x + 24 = 0$, on trouvera par la méthode précédente que les diviseurs de cette équation sont $x - 1$, $x - 3$, $x + 2$, $x + 4$; ainsi les quatre racines de l'équation sont $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$, $x = -4$. Toutes les fois que l'équation se réduit à 0 par la supposition d'une valeur de x , comme cela arrive ici par la supposition de $x = 1$, de $x = 3$, de $x = -2$, de $x = -4$, on est sûr que ces valeurs de x sont des racines de l'équation (72); on peut donc substituer successivement à la place de x tous les diviseurs du dernier terme pris en $+$ & en $-$, ceux de ces diviseurs qui rendront l'équation $= 0$, seront des racines de l'équation.

PROBLEME. *Le nombre de louis d'or de Titius surpasse de 18 le nombre des louis d'or d'Alexandre, mais en multipliant la somme de ces nombres par la différence de leurs cubes, le produit est 275184 : on demande le nombre des louis de Titius & d'Alexandre.* Soit x le nombre des louis d'Alexandre, celui de Titius sera $x + 18$. La différence des cubes de ces nombres est $54xx + 972x + 5832 = 54(xx + 18x + 108)$. Si l'on multiplie cette quantité par la somme $2x + 18 = 2(x + 9)$, le produit $108(x^3 + 27xx + 270x + 972)$ doit être $= 275184$. Donc, en divisant par 108, on aura $x^3 + 27xx + 270x + 972 = 2548$, ou $x^3 + 27xx + 270x - 1576 = 0$. Les diviseurs de 1576 sont 1, 2, 4, 8, &c. Si on essaye le diviseur $x - 4$, on trouvera pour quotient $xx + 31x + 394 = 0$, dont les racines sont imaginaires; ainsi Alexandre avoit 4 louis, & Titius 22.

PROBLEME. *Quelques Négocians établissent un fonds, pour lequel chacun fournit dix fois autant de louis d'or qu'ils sont d'Associés, ils gagnent sur chaque centaine de louis d'or autant de louis & 6 de plus qu'ils sont d'Associés, le profit total est de 392 louis; on demande le nombre des Associés.* Soit x le nombre cherché; chaque Associé aura donc fourni $10x$ louis & tous ensemble $10xx$ louis. Par la nature du problème, ils gagnent $x + 6$ louis sur chaque centaine de louis; ainsi en faisant $100 : x + 6 ::$

$$10xx : \frac{10x^3 + 60xx}{100} = \frac{x^3 + 6xx}{100}, \text{ on aura le gain to-}$$

tal. Mais ce gain est $= 392$ louis; donc $\frac{x^3 + 6xx}{100} = 392,$

$x^3 + 6xx = 3920$. En faisant $x = 27$, divisant par 8 & transposant, il vient $x^3 + 3xx - 490 = 0$. Les diviseurs de 490 sont 1, 2, 5, 7, 10, &c. Si l'on divise la dernière équation par $x - 7$, la division réussit & donne $xx + 10x + 70 = 0$, équation dont les racines sont imaginaires. Donc $x = 7$, & $x = 27 = 14$. Ainsi il y avoit quatorze Associés.

Si le premier terme de l'équation a un coefficient, & qu'on ne veuille pas s'en délivrer, on prendra les diviseurs du dernier terme, & encore tous ceux du premier coefficient, & on formera des fractions de chacun des diviseurs du dernier terme divisé par chacun des diviseurs du premier coefficient, auxquelles on donnera successivement les signes $+$ & $-$, & celles de ces fractions, qui, substituées à l'inconnue, donneront un

résultat égal à zero, seront autant de racines de l'équation.

EXEMPLE. Soit l'équation $24x^3 - 46x^2 + 29x - 6 = 0$. Les diviseurs du dernier terme sont 1, 2, 3, 6, ceux du premier coefficient sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. divisant chacun des diviseurs de 6 par ceux de 24, on a les fractions suivantes.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \quad \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}, \frac{2}{12}, \frac{2}{24};$$

& les substituant successivement à l'inconnue avec le signe + & —, on trouvera que $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ réduisent tout à zero; ainsi ces fractions seront les trois racines de l'équation proposée.

Il est clair que le premier terme d'une équation ne peut avoir de coefficient différent de l'unité, si aucune des valeurs de l'inconnue n'est une fraction, parce que cette inconnue n'aurait que l'unité pour coefficient dans les équations composantes; mais si quelque une de ces valeurs est une fraction, l'équation composante qui contient cette valeur, étant délivrée de son dénominateur, l'inconnue de cette équation sera multipliée par un coefficient différent de l'unité, & ce coefficient en donnera un au premier terme de l'équation composée; ainsi les équations

$$\text{composantes étant } x - a = 0, x - \frac{m}{n} = 0, \text{ cette dernière}$$

étant délivrée de son dénominateur, devient $nx - m = 0$; & le produit des deux équations est $nxx - anx - mx + am = 0$. On est donc assuré que lorsque le premier terme d'une équation a un coefficient autre que l'unité quelque une des valeurs de l'inconnue est une fraction dont le numérateur est un diviseur du dernier terme, & le dénominateur est un diviseur du premier coefficient; ainsi ayant formé toutes les fractions qu'on peut faire de cette manière avec les diviseurs du dernier terme & du premier coefficient, on n'a plus qu'à chercher celles qui, mises à la place de l'inconnue, réduisent tout à zero.

AUTRE MANIÈRE. On supposera l'inconnue successivement égale à 1, 0, — 1, ou si l'on veut, à 2, 1, 0, — 1, — 2; & l'on prendra les résultats & leurs diviseurs, qu'on écrira comme on a dit ci-dessus. Ensuite prenant un terme dans chaque suite, & leur donnant l'un ou l'autre signe, on y cherchera des progressions arithmétiques dont la différence soit un diviseur du premier coefficient, & on essayera si, en multipliant l'inconnue par cette différence, & ajoutant au produit le terme de la progression qui vient de la supposition

de $x = 0$, avec l'un ou l'autre signe, la somme divisée exactement l'équation proposée; parce qu'alors le dernier terme de cette somme pris avec un signe contraire, & divisé par le coefficient de l'inconnue, sera une racine commensurable de l'équation proposée.

Par exemple. L'équation étant la même que dessus, si on fait successivement l'inconnue égale à 1, 0, —1, les résultats seront +1, —6, —105; dont les diviseurs sont ceux qu'on voit dans la table ci-dessous. Et si on prend un de ces diviseurs dans chaque suite, leur donnant successivement l'un & l'autre signe, on trouvera bien-tôt les progressions —1, +1, +3; —1, +2, +5; —1, +3, +7, dont les différences sont 2, 3, 4, diviseurs du premier coefficient. On multipliera donc l'inconnue par chacune de ces différences, on ajoutera au produit le terme de la même progression, qui répond à la supposition de $x = 0$, mais avec un signe contraire, ce qui donnera les trois binômes $2x - 1$, $3x - 2$, $4x - 3$, & on essayera si ces quantités divisent également l'équation proposée; & comme on trouvera qu'elles la divisent, on conclura que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ sont les racines de cette équation.

E X E M P L E.

Equation proposée $24x^3 - 46x^2 + 29x - 6 = 0$.

<i>Suppositions. Résultats.</i>		<i>Diviseurs des Résultats.</i>	
$x = 1$	+ 1	± 1	
$x = 0$	— 6	$\pm 1 \cdot \pm 2 \cdot \pm 3 \cdot \pm 6$	
$x = -1$	— 105	$\left\{ \begin{array}{l} \pm 1 \cdot \pm 3 \cdot \pm 5 \cdot \pm 7 \\ \pm 15 \cdot \pm 21 \cdot \pm 35 \cdot \pm 105 \end{array} \right.$	

Diviseurs du premier Coefficient.

1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 8 · 12 · 24.

La raison de cette opération est facile à concevoir. Soit $\frac{a}{n}$ une racine commensurable d'une équation dont n divise le

premier coefficient, on aura $x = \frac{a}{n}$, & $nx - a = 0$ sera

une équation composante de la proposée. Si donc on fait $x = 1$, tant dans la proposée que dans $nx - a$, le résultat sera divisible par $n - a$, ou par $a - n$; si on fait $x = 0$, le résultat qui est le dernier terme de la proposée, sera divisible par a , suivant ce qu'on a dit plus haut, & si on fait $x = -1$, le ré-

sultat sera divisible par $-n - a$, ou par $a + n$: or les trois diviseurs $a - n, a, a + n$ font une progression arithmétique dont la différence est n diviseur du premier coefficient. Donc si l'équation proposée a une racine commensurable, on est assuré que cette racine a pour numérateur un diviseur du résultat qui vient de la supposition de $x = 0$, & qui fait avec un diviseur de chacun des autres résultats une progression arithmétique, dont la différence est un diviseur du premier coefficient, & que cette différence en est le dénominateur ; ainsi on ne doit essayer que les diviseurs du dernier terme qui ont ces conditions. Il en seroit de même si on avoit encore fait $x = 1, x = -1$, parce que l'équation composante se réduiroit par ces suppositions à $2n - a, -2n - a$ qui donneroient les diviseurs $a - 2n, a + 2n$, lesquels feroient avec les autres une progression de cinq termes, dont la différence seroit toujours n . En suivant la même méthode, on trouveroit un moindre nombre de ces progressions, & le choix des diviseurs seroit plus facile.

AUTRE MANIÈRE. Soit l'équation $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$, qu'on suppose contenir une racine rationnelle représentée par le diviseur $fx + g = 0$ ou par l'équation $x + \frac{g}{f} = 0$, qui divisera la proposée en délivrant son premier

terme du coefficient m ; l'on aura $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$. Il est visible que $x + \frac{g}{f}$ ne sauroit être un diviseur de cette équation, à moins que g ne soit un diviseur de c & f un diviseur de m .

Si le premier terme de la proposée étoit sans coefficient, on auroit $m = 1$ & $f = 1$, c'est-à-dire, que le diviseur $x + \frac{g}{f}$ seroit $x + g$. Cela posé, soit l'équation $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$. En cherchant les limites des racines de l'équation $x^3 - \frac{29}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{60}{3} = 0$, je trouve -1 & 10 ; je cherche ensuite les diviseurs du dernier terme 60 de la proposée contenus entre ces limites, & je trouve $1, 2, 3, 4, 5, 6$, pour les diviseurs positifs, & -1 pour les négatifs ; car $-2, -3$ &c. sont exclus par les limites trouvées. Je cherche de même les diviseurs 1 & 3 de 3 , & divisant ceux de 60 par ceux de 3 , j'ai $-1, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, 4, \frac{4}{3}, 5, \frac{5}{3}, 6$. Si donc la proposée a quelque racine réelle, elle doit se trouver parmi ces

nombres. En tentant la division par $x - \frac{1}{3} = 0$, ou par $3x - 1 = 0$, je trouve pour quotient $x^2 - 8x - 12 = 0$; ainsi l'une des racines de l'équation est représentée par $x = \frac{1}{3}$, & les deux autres se trouvent, en résolvant l'équation du second degré $x^2 - 8x - 12 = 0$. Si on veut encore diminuer le nombre des diviseurs, on supposera $x = y - p$, il est visible que chaque racine de la transformée sera plus grande que x de la quantité p , puisque $x + p = y$. Ainsi si a & b sont des limites de la proposée, $a + p$ & $b + p$ seront des limites de la transformée. Si dans l'équation ci-dessus nous supposons $x = y - 1$, 1 représentant l'indéterminée p , ce qui donnera $a + p = -1 + 1 = 0$, & $b + p = 10 + 1 = 11$, nous trouverons

$$\begin{array}{rcl} 3x^3 & = & 3y^3 - 9y^2 + 9y - 3 \\ - 29x^2 & = & - 29y^2 + 58y - 29 \\ + 4x & = & 4y - 4 \\ + 60 & = & + 60 \end{array}$$

La transformée sera donc $3y^3 - 38y^2 + 71y + 24 = 0$ A. De laquelle si nous voulons chercher les racines par la méthode présente, en nous contentant de prendre les diviseurs de 24 qui sont contenus entre 0 & 11, savoir, 1, 2, 3, 4, 6, 8, & les divisant par 1 & 3 (facteurs de 3), nous aurons les nombres $1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 3, \frac{4}{3}, 4, 6, 8, \frac{8}{3}$, parmi lesquels doivent se trouver les racines réelles de l'équation A. Mais si dans la proposée on suppose $x = y + 1$, la transformée deviendra $3y^3 - 20y^2 - 45y + 38 = 0$, dans laquelle les limites sont 9 & -2. Prenant donc les diviseurs de 38 qui tombent entre ces limites, savoir, -1, 1, 2, & les divisant par 1 & par 3, les racines rationnelles de la dernière réduite se trouveront parmi les nombres $-\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, 2$. Maintenant j'écris par ordre les nombres que je viens de trouver, & mettant dans la première série horizontale ceux parmi lesquels doit se trouver une racine réelle de l'équation dans laquelle $x = y + 1$, dans la seconde ceux qui ont rapport à l'équation proposée, & dans la troisième ceux qu'a donnés la supposition de $x = y - 1$; il est visible qu'aucun des nombres de la seconde suite ne peut être une racine de la proposée, à moins que parmi ceux de la première série, il ne s'en trouve quelqu'un qui résulte de

celui-ci en lui ajoutant $-\frac{1}{3} - 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, 2$
 -1 , & que parmi ceux $-\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, 4, \frac{4}{3}, 5, \frac{1}{3}, 6$
 de la troisième il ne s'en $2, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, 4, \frac{4}{3}, 6, 8, \frac{8}{3}$

trouve aussi quelqu'un qui en résulte de la même manière en lui ajoutant $+1$, parce que si cette racine est x dans la seconde, elle doit être $x - 1$ dans la première, & $x + 1$ dans la troisième série. Or en examinant avec un peu d'attention ces trois séries, il est visible que les seuls nombres qui ont la condition requise sont compris dans les trois séries, dont la première a été prise parmi les nombres de la première série ci-dessus, la seconde parmi ceux de la seconde, & la troisième parmi ceux de la troisième. Si donc la proposée $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$ a quelque racine rationnelle, elle ne peut être que 2, ou $3\frac{1}{3}$; & alors cette équation sera divisible ou par $x - 2 = 0$, ou par $x - 3 = 0$, ou enfin par $3x - 5 = 0$. Ainsi les diviseurs qu'on peut essayer ont été réduits par cette méthode à trois seulement, au lieu de douze qu'on avoit d'abord trouvés.

81. Venons maintenant aux diviseurs du second degré. Supposons que $x^2 + bx + a$ est un diviseur du second degré dans une équation; en faisant $x = 2$, $4 + 2b + a$, ce diviseur deviendra successivement

1	1 + b + a	dra successivement
0	+ a	égal aux quantités
1	1 - b + a	que l'on voit vis-
4	4 - 2b + a	à-vis des supposi-
&c.	&c.	

tions des valeurs de x , & la quantité dans laquelle se changera l'équation par ces suppositions, sera divisible par les diviseurs correspondants. Donc si de ces diviseurs on ôte les carrés des valeurs correspondants de x , il en résultera des quantités $2b + a$ qui sont évidemment en progression $b + a$ arithmétique; donc il faudra rejeter les $+ a$ diviseurs qui n'auront pas cette condi- $- b + a$ tion. Si l'on trouvoit un trop grand $- 2b + a$ nombre de progressions, on tâcheroit de le diminuer, en faisant de nouvelles suppositions de

$x = -3$, $x = -4$ &c., $x = +3$ &c. ; & celles qui ne seroient pas détruites par ces nouvelles suppositions, donneroient des diviseurs qu'on pourroit essayer. Quand on aura trouvé une de ces progressions, on ôtera du terme qui répond à la supposition de $x = 1$, celui qui répond à la supposition de $x = 0$, & l'on aura b , & par conséquent le diviseur $x^2 + bx + a$ par lequel on tentera la division. Si l'on a trouvé plusieurs progressions différentes, on aura plusieurs diviseurs de la même forme, quoique b ne soit pas la même quantité dans ces diviseurs. Soit, *par exemple*, l'équation $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5 = 0$. J'écris dans la colonne A les suppositions différentes de x , j'écris en B les nombres dans lesquels

A	B	C
$x = 2$	133	1, 7, 19, 133
1	33	1, 3, 11, 33
0	5	1, 5
-1	1	1
-2	3	1, 3

D.

E

4	-137, -23, -11, -5, -3, +3, +15, +129
1	-34, -12, -4, -2, 0, +2, +10, +32
0	5, -1, +1, +5
1	2, 0
4	7, -5, -3, -1

se change l'équation par ces suppositions de x , je mets en C les diviseurs de ces nombres, en D les quarrés des valeurs correspondantes de x , en E les diviseurs qui sont en C, mais pris avec les signes + & -, & desquels on a ôté les nombres correspondants de la colonne D. Après quoi je cherche

les progressions arithmétiques que peuvent donner les nombres des colonnes E; j'en trouve deux que j'écris, l'une en F & l'autre en G. Je

	F	·	G
ne fais pas de nouvelles suppositions	15	·	3
pour tâcher d'exclure l'une des deux,	10	·	2
parce que l'équation proposée étant	5	·	1
du quatrième degré, elle doit avoir	8	·	0
deux diviseurs rationels du second	— 5	·	— 1

degré, ou n'en avoir aucun. Les nombres qui répondent à la supposition de $x = 0$, sont 5 & 1. Si l'on ôte ces nombres de ceux qui dans leur colonne répondent à la supposition de $x = 1$, l'on aura $b = 5$ & $b = 1$; donc les diviseurs par lesquels on peut tenter la division, sont $x^2 + 5x + 5$, $x^2 + x + 1$. Si l'on tente la division par le premier, on trouvera le second au quotient. Résolvant maintenant les équations $x^2 + 5x + 5 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ par la méthode du second degré, on aura les quatre racines de l'équation proposée.

Soit maintenant l'équation $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21 = 0$. En supposant successivement $x = 1$, on trouvera qu'il n'y a qu'un seul

0	diviseur $x^2 + 3x - 3$, par lequel
— 1	on puisse tenter la division; elle
— 2	réussit & donne pour quotient $x^3 +$
— 3	$5x - 7$. Il suffit donc de trouver

les racines des deux équations $x^2 + 3x - 3 = 0$, $x^3 + 5x - 7 = 0$, pour avoir celles de l'équation proposée.

82. Si l'équation étoit affectée de fractions, comme l'équation $x^2 + \frac{x}{6} - \frac{1}{2} = 0$, on l'en délivreroit en faisant l'inconnue x égale à une autre inconnue

inconnue y , divisée par un nombre divisible par tous les dénominateurs de l'équation, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus. Supposant donc $x = \frac{y}{6}$,

j'aurai en substituant, multipliant & réduisant, $y^2 + y - 12 = 0$. Les diviseurs de cette équation sont, par la méthode ci-dessus (79), $y - 3$, $y + 4$, & partant les racines sont 3 & -4 . Mais $x = \frac{y}{6}$; donc les racines de la première équation se trouveront en divisant celles de la seconde

par le diviseur 6 de y , ce qui donnera $x = \frac{1}{2}$ & $x = -\frac{2}{3}$, ou $x = \frac{1}{2}$ & $x = -\frac{2}{3}$. Si l'équation proposée avoit un coefficient au premier terme, on supposeroit x égal à une nouvelle inconnue divisée par ce coefficient, & l'équation qui en résulteroit n'ayant pas de coefficient au premier terme, on en chercheroit les racines, & divisant ces racines par le coefficient du premier terme de l'équation proposée, on auroit les racines cherchées. Ainsi si j'avois l'équation $6x^2 + x - 12 = 0$.

Faisant $x = \frac{y}{6}$, on trouveroit l'équation $y^2 + y - 12 = 0$, & divisant les racines de cette dernière par 6, l'on auroit toutes les racines cherchées. Mais si l'équation que l'on trouve en faisant disparaître le coefficient du premier terme, ou les dénominateurs des équations qui contiennent des coefficients fractionnaires, n'avoit point de racines commensurables, on seroit sûr que l'équation proposée n'en a pas non plus, puisqu'une racine commensurable étant divisée ou multipliée par une quantité commensurable, ne sauroit devenir incommensurable. Si les coeffi-

cients de l'équation proposée étoient algébriques, tels que ceux de l'équation $x^2 + ax - b = 0$ *, il faudroit, puisque a & b sont censés connus, exprimer ces coefficients en nombres; ainsi supposant $a = 1$ & $b = 12$, on auroit l'équation $x^2 + x - 12 = 0$, dont les racines sont $x = 3$, $x = -4$.

De la résolution des Equations par le moyen des diviseurs d'un ordre quelconque.

83, Soit l'équation $x^4 + ax^3 + (aa - ab)x^2 - aabx - a^3b = 0$, qu'on veut diviser en deux facteurs du second degré. Je prends deux équations quarrées $xx + yx + u = 0$, $xx + fx + z = 0$, de la multiplication desquelles je suppose que résulte la proposée; y, u, f, z étant des quantités indéterminées qu'on déterminera dans la suite du calcul. Les ayant multipliées l'une par l'autre, il vient

$$\begin{aligned} x^4 + yx^3 + ux^2 + ufx + zu &= 0 \\ + fx^3 + fyx^2 + zyx & \\ + zx^2 & \end{aligned} \quad (A).$$

On comparera l'équation A avec la proposée en égalant tous les termes de celle-ci avec leurs correspondans dans la proposée; la comparaison des deux seconds termes donne $f + y = a$, ou $f = a - y$; la comparaison des derniers termes fait voir que $z = -\frac{a^3b}{u}$; celle des quatriemes termes fournit l'équation $yz + fu = -a^3b$. Substituez dans celle-ci les valeurs trouvées de f & de z , & vous aurez $y = \frac{au^2 + a^3bu}{uu + a^3b}$; mais l'équation $z = -\frac{a^3b}{u}$ fait connoître que u est un diviseur du dernier terme $-a^3b$. Comme les équations supposées sont du second degré, je cherche tous

* A cause de $b = x^0 b$, b est le coefficient de x^0 .

les diviseurs du second ordre de a^3b , savoir $\pm ab$, $\pm aa$, $\pm a\sqrt{ab}$, & commençant par le premier, je suppose $u = ab$, ce qui donne $y = \frac{2ab}{a+b}$. Ainsi l'une des équations supposées de-

viendra $xx + \frac{2abx}{a+b} + ab = 0$; mais parce qu'elle ne peut

pas diviser exactement la proposée, je conclus que le diviseur ab est inutile. C'est pourquoi prenant le diviseur $-ab$, & supposant $u = -ab$, ce qui donne $y = 0$, la première équation supposée devient $xx - ab = 0$, qui divise exactement la proposée, & donne pour quotient $x^2 + ax + aa = 0$. Si aucun des diviseurs ne pouvoit réussir, la proposée seroit irréductible du moins par cette méthode.

Si on veut éviter les divisions, on substituera une des valeurs de u (prise parmi les diviseurs du dernier terme) dans y, f, z , & ces valeurs étant mises dans les trinomes quadratiques, si leur produit rend la proposée, le problème sera résolu; si cela n'arrive pas, il faut employer une autre valeur de u . Soit, par exemple, l'équation $x^4 + 2bx^3 + bbx^2 - a^3b = 0$. Comparant cette équation avec la transformée A, on trouve $f + y = 2b$, $u + fy + z = bb$, $zy + fu = 0$ (parce que le quatrième terme manque dans la proposée), $zu = -a^3b$. La première donne $f = 2b - y$, la dernière fait voir que $z = -\frac{a^3b}{u}$. Ces valeurs substituées dans la troisième donnent

$$\frac{a^3by}{u} + 2bu - uy = 0, \text{ ou } y = \frac{2bu^2}{a^3b + uu}.$$

Comme u doit être un diviseur de $-a^3b$, si on prend les diviseurs du second degré $\pm a^2$, $\pm ab$, $\pm a\sqrt{ab}$, on voit facilement que les deux premiers sont inutiles, parce qu'étant substitués dans la seconde équation $u + fy + z = bb$, elle ne devient pas identique. Mais en examinant $a\sqrt{ab}$ que je fais $= h$, je trouve $y = b$, $z = -a\sqrt{ab}$, $f = b$. Ces valeurs étant substituées dans la seconde équation la rendent identique, puisqu'elle devient $a\sqrt{ab} + bb - a\sqrt{ab} = bb$, ou $bb = bb$. Ainsi les trinomes $xx + bx + a\sqrt{ab} = 0$, $xx + bx - a\sqrt{ab} = 0$, sont les diviseurs cherchés (on auroit trouvé les mêmes trinomes en supposant $u = -a\sqrt{ab}$), qui multipliés l'un par l'autre rendront la proposée.

Soit maintenant l'équation du cinquième degré $x^5 + 4a \cdot x^4 + 6a^2 x^3 - 8a^3 x^2 + 5a^4 x - a^5 = 0$, qu'on propose de diviser en deux facteurs l'un du second, l'autre du troisième degré. Je prends les deux équations auxiliaires $xx + yx + u = 0$, $x^3 + \iota xx + fx + z = 0$, dont le produit

$$\begin{aligned} x^5 + yx^4 + ux^3 + \iota ux^2 + fux + za &= 0 \\ + \iota x^4 + \iota yx^3 + fyx^2 + zyx & \\ + fx^3 + zx^2 & \end{aligned}$$

doit rendre la proposée. La comparaison des termes donne les cinq équations suivantes $y + \iota = -4a$, $u + \iota y + f = 6a^2$, $\iota u + fy + z = -8a^3$, $fu + zy = 5a^4$, $zu = -a^5$. Par la première on a $\iota = -4a - y$; par la dernière $z = -\frac{a^5}{u}$; par la quatrième $f = \frac{5a^4 - zy}{u} = \frac{5a^4}{u} +$

$\frac{a^5 y}{uu}$. Substituant ces valeurs dans la seconde il vient $u = 4ay$

$$-yy + \frac{5a}{u} + \frac{a^5 y}{u \cdot u} = 6a^2, \text{ ou } yy + 4ay - \frac{a^5 y}{uu} =$$

$$6aa + u + \frac{5a^4}{u}. \text{ Parce que } u \text{ doit être un diviseur du second}$$

ordre de a^5 , prenons pour u le diviseur $\pm aa$. Si nous supposons $u = aa$, la dernière équation devient $yy + 3ay = 0$, d'où l'on tire $y = 0$, & $y = -3a$. Si nous supposons $y = 0$, nous aurons $\iota = -4a$, $f = 5aa$, $z = -a^3$. Ces valeurs étant substituées dans la troisième équation dont on n'a fait aucun usage, il vient $-4a^3 - a^3 = -8a^3$, équation qui n'est pas identique; donc on ne peut pas faire $y = 0$. Mais en faisant $y = -3a$, on trouve $\iota = -a$, $f = 2aa$, $z = -a^3$. Ces valeurs substituées dans la troisième donnent $-8a^3 = -8a^3$, équation identique. C'est pourquoi substituant ces valeurs dans les équations auxiliaires, on trouvera $xx - 3ax + aa = 0$, $x^3 - ax^2 + 2aax - a^3 = 0$, qui multipliées l'une par l'autre rendent la proposée.

Soit encore l'équation $x^6 - 13ax^5 + 45a^2 x^4 - 71a^3 x^3 + 57a^4 x^2 - 16a^5 x + 2a^6 = 0$, qu'on propose de résoudre en deux, l'une du second, l'autre du quatrième degré.

Je prends les deux équations auxiliaires $xx + yx + u = 0$, $x^4 + px^3 + tx^2 + fx + z = 0$, qui étant multipliées l'une par l'autre donnent

$$\begin{aligned} x^6 + px^5 + tx^4 + fx^3 + zx^2 + zyx + zu &= 0 \\ + yx^5 + pyx^4 + t yx^3 + f yx^2 + f u x \\ + u x^4 + p u x^3 + t u x^2. \end{aligned}$$

Comparant celle-ci avec la proposée, j'ai les six équations $p + y = -13a$, $t + py + u = 45a^2$, $f + ty + pu = -71a^3$, $z + fy + tu = 57a^4$, $zy + fu = -16a^5$, $zu = 2a^6$. Par la première on a $p = -13a - y$, par la dernière $z = \frac{2a^6}{u}$. La valeur de p étant substituée dans la

seconde, il vient $t = 45aa + 13ay + yy - u$. Mettant

la valeur de z dans la cinquième, on trouve $f = -\frac{2a^6y}{uu}$

$-\frac{16a^5}{u}$. En substituant ces valeurs trouvées dans la quatrième, on aura

$$y^2 = \frac{-16a^5uy + 13au^3y + 2a^6u - 57a^4u^2 + 45a^2u^3 - u^4}{u^3 - 2a^6}$$

$= 0$ (B). Puisque u doit diviser $2a^6$, & que les diviseurs quarrés les plus simples de cette quantité sont $\pm aa$, $\pm 2aa$, $\pm aa\sqrt{2}$, on peut supposer u égal à quelqu'une de ces quantités. Or en prenant aa ou $-aa$ pour u , on ne réussit pas; mais en faisant $u = 2aa$, l'équation B devient $y^2 + 15ay + 22aa = 0$; d'où l'on tire $y = -10a$ & $y = -2a$: la première racine est inutile, mais la seconde donne $p = -11a$, $t = 21a^2$, $f = -7a^3$, $z = a^4$. Ces valeurs étant substituées dans la troisième équation, dont nous n'avons pas encore fait usage, la rendent identique, & donnent $-71a^3 = -71a^3$. Ainsi les équations auxiliaires dans lesquelles la proposée peut se réduire, sont $xx - 2ax + 2aa = 0$, & $x^4 - 11ax^3 + 21a^2x^2 - 7a^3x + a^4 = 0$.

On peut remarquer que si l'on se fût servi de la troisième équation, au lieu d'employer la quatrième, on auroit trouvé l'équation cubique $2y^3 + 16ay^2 + 81a^2y + 74a^3 = 0$, au lieu d'une équation du second degré qui est bien plus aisée à

résoudre; ainsi le choix des équations qu'on emploie, peut diminuer la difficulté du calcul. Les racines de cette équation cu-

bique sont $y = -2a$, $y = -\frac{11a}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{47}$, dont la première réussiroit; car elle donneroit des valeurs de p , r , &c. qui tendroient la quatrième équation identique.

Si on avoit à résoudre une équation du septième degré en deux autres, l'une du troisième, l'autre du quatrième degré, il est visible qu'il faudroit employer deux équations auxiliaires, l'une du troisième, l'autre du quatrième degré, & en général pour réduire une équation de l'ordre m en deux autres, l'une de l'ordre $m - n$, & l'autre de l'ordre n , il faut se servir de deux équations auxiliaires, dont l'une soit du degré $m - n$, & l'autre du degré n ; mais il est aisé de sentir que la difficulté augmente à proportion que m est plus grand, puisqu'on a toujours un nombre m d'indéterminées, dont on ne peut souvent trouver la valeur que par le moyen de plusieurs équations très-complicées.

Mais quoiqu'il y ait plusieurs équations irréductibles par les méthodes connues, néanmoins toutes les fois que la proposée est convertible, elle peut se décomposer en plusieurs du second degré. J'appelle équation convertible une équation de degré pair, dont l'exposant soit m (nombre pair) dans le premier terme qui doit être x^m sans autre coefficient que l'unité, le dernier terme étant une constante que je nomme a^m . Chaque terme placé entre le dernier & celui du milieu, & divisé par un facteur convenable de a^m , doit avoir le même signe & le même coefficient que le terme correspondant placé entre celui du milieu & le premier. Ainsi les équations $x^4 + bx^3 + ccx^2 + a^2bx + a^4 = 0$, $x^6 - bx^5 + c^3x^3 - a^4bx + a^6 = 0$ sont convertibles. Car en divisant l'avant-dernier terme de la première par le facteur a^2 de a^4 , il vient $+bx$ qui a le même signe & le même coefficient que le second terme, & en divisant (dans la seconde équation) le terme $-a^4bx$ par a^4 , facteur de a^6 , il vient $-bx$, qui a le même signe & le même coefficient que le terme correspondant $+bx^5$.

Pour résoudre ces sortes d'équations, on prendra une formule du second degré $xx + nx + a^2 = 0$, dans laquelle n est une quantité qu'on doit déterminer; on formera ensuite une équation convertible d'un degré inférieur de deux unités; de ma-

niere que son premier terme soit x^{m-1} & son dernier terme $= a^{m-1}$, & dont les coefficients des autres termes soient indéterminés. Après avoir multiplié ces deux équations l'une par l'autre, on comparera les termes du produit avec ceux de la proposée jusqu'au terme du milieu inclusivement; car la comparaison des autres donne les mêmes équations que les premiers. Ayant chassé toutes les indéterminées, excepté m , il en résultera une équation entre m & des constantes; & les valeurs de m qu'on en tirera, étant substituées dans le trinome $xx + mx + aa = 0$, donneront les équations du second degré, dans lesquelles la proposée pourra se résoudre.

EXEMPLE I. Soit l'équation convertible $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4 = 0$, je forme l'équation convertible inférieure de deux degrés, c'est-à-dire, $xx + hx + aa = 0$, que je multiplie par le trinome $xx + mx + aa = 0$, afin d'avoir l'équation convertible

$$x^4 + hx^3 + 2a^2x^2 + a^2mx + a^4 = 0, \\ + mx^3 + mh x^2 + a^2hx$$

La comparaison des termes donne les deux équations $m + h = 2b$, $2aa + mh = 0$. Substituant dans la seconde la valeur de h prise dans la première; il vient $2aa + 2bm - mm = 0$, ou $mm - 2bm = 2aa$, dont les racines sont $m = b \pm \sqrt{2aa + bb}$. Substituant ces valeurs dans le trinome, on trouve les équations $xx + bx + x\sqrt{2aa + bb} + aa = 0$, $xx + bx - x\sqrt{2aa + bb} + aa = 0$, qui sont les facteurs de la proposée.

EXEMPLE II. Soit l'équation $x^6 + a^6 = 0$. Je forme l'équation convertible du quatrième degré $x^4 + px^3 + tx^2 + a^2px + a^4 = 0$, qui étant multipliée par le trinome $xx + mx + aa = 0$, donne

$$x^6 + px^5 + tx^4 + a^2px^3 + m^4x^2 + a^4mx + a^6 = 0 \\ + mx^5 + mpx^4 + mt x^3 + a^2m p x^2 + a^4 p x \\ + a^2x^4 + a^2 p x^3 + a^2 t x^2$$

Ayant comparé le second, le troisième & le quatrième termes de celle-ci avec les correspondans de la proposée, je trouve les trois équations $m + p = 0$, $t + mp + a^2 = 0$, $2a^2p$

$+ mp = 0$. Par la première $p = -m$, cette valeur étant substituée dans les deux autres, il vient $t - mm + aa = 0$, $-2am + mt = 0$. Par la première de celles-ci, $t = mm - aa$; donc, en substituant dans la dernière $m^2 - 3a^2m = 0$ qui donne trois valeurs de m , savoir, $m = 0$, $m = a\sqrt{3}$, $m = -a\sqrt{3}$. Ces valeurs mises dans le trinôme général $xx + mx + aa = 0$, donnent les équations du second degré dans lesquelles on peut résoudre la proposée, c'est-à-dire, $xx + aa = 0$, $xx + ax\sqrt{3} + aa = 0$, $xx - ax\sqrt{3} + aa = 0$.

84. Lorsque les racines de l'équation ne sont pas commensurables, on ne peut pas les trouver par la méthode des diviseurs; mais on peut au moins les avoir par approximation. Pour cela nous supposons qu'on ait déjà une valeur de la racine approchée seulement jusqu'à sa dixième partie près. Voyons donc comment on peut parvenir à cette première approximation. Soit l'équation $x^2 - 10x + 22 = 0$; je substitue dans cette équation à la place de x plusieurs nombres tant positifs que négatifs, jusqu'à ce que deux substitutions consécutives me donnent deux résultats de signe contraire. Lorsque j'en ai rencontré deux de cette nature, j'en conclus que la valeur de x est entre les deux nombres qui ont donné ces résultats. Si dans l'équation proposée je substitue -1 , -2 , -3 , &c. à la place de x , je trouve toujours des résultats positifs. De même les résultats que donnent les nombres 1 , 2 , 3 , sont encore positifs; mais en substituant 4 à la place de x , j'ai un résultat négatif. Ainsi une des racines est entre les nombres 3 & 4 , qui diffèrent de plus de la dixième partie de l'un d'entre eux. Je prends la moitié de leur somme, & supposant $x = 3 + \frac{1}{2}$, je trouve pour résultat une quantité négative; donc la racine est entre 3 & $3 + \frac{1}{2}$. Prenant la moitié de leur somme $3 + \frac{1}{4}$ pour x ,

l'équation se réduit à $\frac{1}{16}$, quantité positive ; donc cette racine est entre $3 + \frac{1}{4}$ & $3 + \frac{1}{2}$, & ces deux nombres différant de $\frac{1}{4}$, quantité plus petite que la dixième partie de l'un d'entre eux, je prends la moitié de leur somme $3 + \frac{3}{4}$, & je suppose $x = 3 + \frac{3}{4} + d$, ou $x = 3.3 + d$ (en prenant en décimales approchées la valeur de la fraction). Substituant cette valeur de x dans l'équation, & négligeant le quarré de d (parce que d étant fort petit, son quarré doit l'être davantage), j'ai — $0.11 — 3.4d = 0$, ou $d = 0. \frac{11}{3.4} = 0.032$, en ne poussant la division que jusqu'à deux chiffres significatifs seulement. En général on ne la pousse que jusqu'à autant de chiffres significatifs, y compris le premier qu'on trouve, qu'il y a de places entre celui-ci & le premier chiffre de la valeur approchée de x . Ici il y a deux places entre 3 , qui est le premier chiffre significatif du quotient, & 3 , premier chiffre de la valeur approchée de x ; donc on a la valeur approchée de x en faisant $x = 3.3 — 0.032 = 3.268$. Si l'on vouloit approcher davantage de la véritable valeur de x , on supposeroit $x = 3.268 + d$, & en s'y prenant comme nous venons de le faire, on auroit une valeur bien plus approchée de x , & ainsi de suite. Si l'on veut avoir l'autre racine de l'équation, on divisera cette équation par $x — 3.268$, le quotient fera connoître l'autre racine. Si le quotient étoit du second degré, on pourroit trouver les racines résultantes par la méthode du second degré. Mais on s'y prendroit comme nous venons de le faire, si le quotient étoit d'un degré plus élevé, en négligeant toujours les puissances de d au-dessus du premier degré.

Si l'on avoit l'équation $x^3 — 12x — 14 = 0$,

dont une des racines approchées est 3.925 , on la diviserait par $x - 3.925 = 0$, le quotient $x^2 + 3.925x + 3.4056 = 0$ (il y a un reste 0.633 qu'on peut négliger), contiendrait les autres racines qui sont, l'une -2.6225 , & l'autre -1.3025 . On les auroit aussi trouvées en cherchant dans la proposée les limites entre lesquelles ces racines étoient contenues, comme on a fait pour la première racine.

REMARQUE. La méthode que nous venons d'exposer, suppose qu'on puisse trouver deux nombres qui, substitués à la place de x , donnent deux résultats de signe contraire, & que la racine se trouve entre ces deux résultats. Or il est facile de voir que cela est possible. Car soit la plus petite valeur de $x = a$, celle qui est immédiatement plus grande $= d$. Dans ce cas $x - a$ & $x - d$ sont des facteurs de l'équation proposée. Si au lieu de x on substitue un nombre plus petit que a , le facteur $x - a$ deviendra négatif, & positif, si on substitue un nombre plus grand que a (en supposant ce nombre plus petit cependant que d). Le produit des autres facteurs ne changeant point de signe, il est clair que le changement de signe du facteur $x - a$, occasionnera un changement de signe dans le produit total. On démontreroit la même chose si le plus petit facteur étoit $x + a$, en substituant des nombres négatifs à la place de x .

AUTRE METHODE. Ayant trouvé par la méthode précédente, ou de quelqu'autre manière, deux limites qui ne diffèrent entr'elles que de l'unité, on supposera que la racine cherchée est égale à la plus grande limite moins une quantité indéterminée, ou à la moindre limite plus une quantité indéterminée. On substituera cette valeur dans l'équation donnée, & négligeant les termes du résultat, où l'indéterminée est au-

dessus du premier degré, on tirera de la comparaison des autres termes la valeur de l'indéterminée, ce qu'on réitérera, jusqu'à ce qu'on ait trouvé une racine assez approchée.

Soit, *par exemple*, l'équation $x^3 - 15x + 10 = 0$. Supposant x successivement égal à 1, 2, 3, on trouve des résultats négatifs dont le dernier est -8 ; mais en supposant $x = 4$, on trouve le résultat positif $+14$. Ainsi il est évident qu'une des racines de la proposée est entre 3 & 4. Je suppose donc $x = 3 + d$, pour avoir

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 + 27d + 9d^2 + d^3 \\ -15x &= -45 - 15d \\ +10 &= +10 \end{aligned}$$

C'est pourquoi en écrivant l'équation dans un ordre renversé, il viendra $0 = -8 + 12d + 9d^2 + d^3$ (A); mais d étant moindre que l'unité, d^2 & d^3 sont encore beaucoup moindres; négligeant donc les deux derniers termes de cette équation, il vient $0 = -8 + 12d$, ou $12d = 8$, & $d = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0.6$ à-peu-près, & par conséquent $x = 3.6$. Pour avoir une valeur plus exacte, on supposera $x = 3.6 + p$, ce qui donnera la transformée $0 = 2.656 + 23.88p + 10.8p^2 + p^3$. D'où en négligeant les deux derniers termes pour la même raison que ci-dessus, on tirera $23.88p = -2.656$, ou $p = \frac{-2.656}{23.88} = -0.111$; & ajoutant cette fraction à la première valeur trouvée, on aura $x = 3.6 - 0.111 = 3.489$, racine plus approchée que la première.

On peut encore faire ces approximations d'une autre manière, en se contentant de corriger la valeur de la première indéterminée, sans remonter à la proposée. *Par exemple*, dans l'équation ci-dessus, après avoir trouvé $d = 0.6$, je corrige cette valeur de d en supposant $d = 0.6 + p$, & je substitue $0.6 + p$ à la place de d dans l'équation A, d'où j'ai tiré cette valeur de d , pour avoir $0 = +2.656 + 23.88p + 10.8p^2 + p^3$ (B); d'où en négligeant les deux derniers termes, & opérant comme ci-devant, on tire $p = -0.111$, & par conséquent $x = 3.489$. Pour approcher davantage, on supposeroit $p = -0.111 + r$; & substituant cette valeur dans l'équation B, on auroit la valeur de r , & ainsi de suite.

Si l'équation étoit littérale, on en trouveroit les racines approchées par la même méthode, pourvu qu'on pût substituer des nombres exacts, ou approchés à la place des lettres. Si, *par exemple*, dans l'équation $x^3 - a f x + a b = 0$, on fait que les trois quantités a, f, b sont entr'elles comme les nombres 5, 3, 2, on pourra leur substituer ces nombres, & changer la proposée en $x^3 - 15 x + 10 = 0$; & ayant trouvé, comme on vient de le faire, qu'une des valeurs approchées de x est 3.489, on diroit qu'une racine approchée de la proposée est égale à cette quantité, l'unité étant la cinquième partie de a , ou le tiers de f , ou la moitié de b .

AUTRE METHODE. Pour faire comprendre cette autre méthode très-élégante, soit l'équation $0 = A + B y + C y^2 + D y^3 + E y^4$ &c. Il est visible que si y est une fraction fort petite, & que D & E ne surpassent pas de beaucoup les quantités A, B, C , les deux derniers termes seront extrêmement petits par rapport aux premiers, & l'on pourra changer l'équation en quelqueune des suivantes

$$0 = A + B y$$

$$0 = A + B y + C y^2$$

$$0 = A + B y + C y^2 + D y^3$$

Dans lesquelles la valeur de y différera fort peu de la véritable. La première équation donne $y = -\frac{A}{B}$, la seconde peut se résoudre facilement par la méthode du second degré. Mais elle peut sans erreur sensible être abaissée au premier degré, en substituant dans son dernier terme la valeur de y (& non pas de y^2) prise de l'équation $y = -\frac{A}{B}$, ce qui

$$\text{donnera } 0 = A + B y - \frac{A}{B} C y, \text{ ou } 0 = A \cdot B + B B y - A C y, \text{ d'où l'on tire } y = \frac{A B}{A C - B B}$$

Pour faire connoître l'utilité & l'usage de cette formule, soit l'équation $x^4 - 10 x^3 - 130 x^2 + 850 = 0$, dont on trouvera facilement qu'une des racines approchées est 5.5. Supposons que la véritable racine est $5.5 + y$, & substi-

tuons cette valeur au lieu de x dans la proposée, elle deviendra, en négligeant les termes dans lesquels y est au-dessus du second degré, $0 = -1.125 - 150.75y + 6.5y^2$. Comparant cette équation avec l'équation $0 = A + By + Cy^2$, il vient $A = -1.125$, $B = -150.75$, $C =$

$$6.5; \text{ \& } y = \frac{AB}{AC - BB} = \frac{159.59275}{-12732.875} = -0.000713.$$

Ainsi $x = 5.5 + y$ sera $= 5.5 - 0.000713 = 5.499287$ à très-peu près. Si on vouloit une racine plus exacte, on la trouveroit facilement, en supposant $x = 5.499287 + y$, & répétant le même calcul.

Cette méthode est très-utile pour trouver la racine 3^e, 4^e, 5^e, &c. d'un nombre qui n'en a pas d'exacte. Soit, *par exemple*, le nombre 30 dont on demande la racine cubique. La plus grande racine cubique de 30 en nombres entiers étant $= 3$, je suppose la véritable racine $= 3 + y$. Donc $30 = 27 + 27y + 9y^2$, en négligeant le dernier terme y^2 ; donc $0 = -3 + 27y + 9y^2$, ce qui donne $A = -3$,

$$B = 27, C = 9, \text{ \& } y = \frac{AB}{AC - BB} = \frac{27}{714} = 0.0378, \text{ \& la racine approchée de 30 sera } = 3.0378.$$

Si on vouloit avoir la racine quarrée de 2, il seroit bon de chercher une racine approchée, en prenant, *par exemple*, $\frac{7}{5}$ pour cette racine; supposant ensuite que la véritable racine est $\frac{7}{5} + y$, l'on aura 2 ou $\frac{10}{5} = \frac{49}{25} + \frac{14}{5}y + y^2$, ou $0 = -1 + 70y + 25y^2$; d'où l'on tire $A = -1$, $B = 70$, $C = 25$, $y =$

$$\frac{AB}{AC - BB} = \frac{-70}{-4925} = \frac{70}{4925} = 0.014213 \text{ à-peu-près;}$$

donc (à cause de $\frac{7}{5} = 1.4$) $\sqrt{2} = 1.414213$ à très-peu près.

85. Si l'équation avoit toutes les racines égales deux à deux, comme si les facteurs d'une équation étoient $x - d, x - d, x - p, x - p$; de manière qu'on eût $(x - d)^2 \times (x - p)^2 = 0$, elle ne pourroit changer de signe quelque valeur qu'on mît pour x : car que $x - a$ soit positif ou négatif, son quarré sera nécessairement positif. De même si les racines d'une équation sont imaginaires deux à deux, quel-

ques nombres qu'on substitue à la place de x , on ne trouvera jamais deux résultats de signe contraire, autrement la valeur de x se trouveroit entre ces deux nombres, & par conséquent ne seroit pas imaginaire. Il en seroit de même si les racines étoient en partie égales deux à deux & en partie imaginaires.

Il nous reste donc à donner la méthode d'avoir les racines imaginaires & les racines égales d'une équation. A l'égard des premières nous avons déjà dit (72) qu'elles se trouvent toujours en nombre pair, & que si l'une est représentée par $a + b\sqrt{-1}$, l'autre sera $= a - b\sqrt{-1}$, & par conséquent les deux facteurs correspondants seront $x - a - b\sqrt{-1}$, $x - a + b\sqrt{-1}$, dont le produit $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ sera un facteur rationnel du second degré, qu'on trouvera par la méthode déjà expliquée (81); après quoi, par la méthode du second degré, on trouvera les racines de ce facteur ou de ces facteurs s'il y en a plusieurs. *Par exemple*, étant donnée l'équation $x^3 + x^2 + 8x - 10 = 0$, je trouve qu'elle a un facteur $x^2 + 2x + 10$ du second degré & un facteur $x - 1$ du premier, lequel donne une des racines $= 1$. Résolvant l'équation $x^2 + 2x + 10 = 0$, on trouve $x = -1 \pm \sqrt{-9}$; donc les deux racines que donnent le facteur du second degré sont imaginaires.

Pour avoir les racines égales d'une équation, multipliez chaque terme par l'exposant de x dans ce même terme & diminuez cet exposant d'une unité, vous aurez une nouvelle équation, dont le plus grand commun diviseur, avec la proposée, contiendra les racines égales de celle-ci, mais élevées à une puissance moindre d'une unité: c'est-à-dire,

par exemple, que s'il y avoit trois racines égales dans la proposée, il n'y en aura que deux dans le commun diviseur. En effet $(x+a)^m = x^m + m x^{m-1} a + \&c. \dots + a^m$. Donc multipliant chaque terme du second membre de cette équation par l'exposant correspondant de x (en faisant attention que le dernier terme est censé multiplié par $x^0 = 1$, & qu'ainsi on doit multiplier ce terme par 0), & diminuant l'exposant de x d'une unité, on aura $m x^{m-1} + m \times (m-1) x^{m-2} a, \&c.$ c'est-à-dire, $m (x^{m-1} + (m-1) x^{m-2} a + (m-1) \times \frac{m-2}{2} x^{m-3} a^2)$, ou $m (x+a)^{m-1}$. Mais le plus grand commun diviseur de cette quantité & de $(x+a)^m$, est $(x+a)^{m-1}$ qui contient une des racines égales de moins que $(x+a)^m = 0$. Si l'on avoit l'équation $(x+a)^m \times (x+d)^p = 0$, en développant les deux facteurs $(x+a)^m$, $(x+d)^p$ & multipliant les deux résultats l'un par l'autre; on trouveroit qu'en multipliant chaque terme du résultat par l'exposant de x , & diminuant cet exposant d'une unité, on trouveroit, dis-je, la quantité $m (x+a)^{m-1} \times (x+d)^p + p (x+a)^m \times (x+d)^{p-1}$, dont le commun diviseur, avec le premier membre de l'équation proposée, est $(x+a)^{m-1} \times (x+d)^{p-1}$, & ainsi de suite quel que soit le nombre des facteurs.

Soit, *par exemple*, l'équation $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$; pour en trouver les racines égales, je multiplie le premier terme par 3, le second par 2, le troisième par 1 & le dernier par 0, parce que celui-ci est censé multiplié par $x^0 = 1$, & j'ai en diminuant l'exposant de x d'une unité, $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Le plus grand commun diviseur de

ces deux quantités est, par la méthode ci-dessus (31), $x^2 - 4x + 4 = 0$, qui doit contenir une des racines égales de moins que la proposée. Pour trouver cette racine égale, je multiplie les termes de cette dernière équation par les exposants correspondants de x , ayant soin de diminuer d'une unité les mêmes exposants; ce qui me donne $2x - 4 = 0$, dont le diviseur commun avec $x^2 - 4x + 4$ est $x - 2$, qui contient encore une des racines égales de moins; donc divisant le quotient par $x - 2$, le résultat $x - 2$ fait voir que l'équation a deux racines chacune $= 2$. Divisant l'équation par $(x - 2)^2$, le quotient $x - 2$ indique que les trois racines de l'équation sont chacune $= 2$. On auroit trouvé de même ces racines en cherchant les diviseurs rationnels du premier degré de l'équation proposée.

AUTRE METHODE. Soit l'équation $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$. Pour savoir si elle a deux racines égales, & quelles sont ces racines, je suppose un diviseur du second degré $x^2 - 2fx + f^2 = 0$ qui contienne ces racines. Multipliant cette équation générale du second degré par une autre $x - g = 0$ qui puisse donner un produit du même degré que la proposée, je trouve

$$\begin{aligned} x^3 - 2fx^2 + f^2x - ffg &= 0 \\ -gx^2 + 2fgx & \end{aligned}$$

Comparant celle-ci avec la proposée, je vois que ces équations ne peuvent être égales comme elles doivent l'être, à moins que les mêmes puissances de l'inconnue n'aient les mêmes coefficients, & que le dernier terme ne soit le même dans les deux équations. Donc je dois avoir $-2f - g = 3$. Maintenant, si par le moyen de ces $f^2 + 2fg = -9$, équations je puis trouver la valeur de f , $-f^2g = 5$, elle sera une des racines égales de la proposée, si je ne trouve aucune valeur pour f , la proposée ne peut avoir des racines égales.

La première de ces équations donne $g = -2f - 3$. Substituant cette valeur dans la seconde, j'ai $f^2 - 4f^2 - 6f$

$= -9$, ou $3f^2 + 6f = 9$, ou $f^2 + 2f = 3$. Mais la troisième équation devient (par la substitution de la valeur de g) $2f^3 + 3f^2 = 5$ (B.) Si on multiplie l'équation $f^2 + 2f = 3$ par $2f$, pour avoir $2f^3 + 4f^2 = 6f$, & qu'on en retranche l'équation B le premier membre du premier membre, le second du second, il viendra $f^2 = 6f - 5$. Retranchant celle-ci de $f^2 + 2f = 3$, on trouvera $2f = -6f + 8$, ou $8f = 8$, ou $f = 1$. Il y a donc dans la proposée deux racines égales à l'unité, & désignées par les équations simples $x - 1 = 0$, $x - 1 = 0$. La troisième racine est $x = -5$, elle résulte de l'équation simple $x + 5 = 0$.

Soit encore l'équation $x^4 - 4x + 3 = 0$, dont on demande les racines égales, en supposant qu'elle en ait de telles. Je prends l'équation $xx - 2fx + ff = 0$, qui doit renfermer les racines cherchées. Je la multiplie par une autre équation générale du second degré $xx - px + q = 0$, afin d'avoir l'équation A, du même degré que la proposée

$$x^4 - 2fx^3 + f^2x^2 - f^2px + f^2q = 0 \text{ (A).}$$

$$- px^3 + 2fp x^2$$

$$+ qx^2 - 2fqx$$

Si l'on suppose maintenant que l'équation A est la même que la proposée dans laquelle le second & le troisième termes manquent, nous aurons les équations qu'on voit ici.

$$\text{I. } 2f + p = 0$$

$$\text{III. } f^2p + 2fq = 4$$

$$\text{II. } f^2 + 2fp + q = 0$$

$$\text{IV. } f^2q = 3.$$

La première de ces équations donne $p = -2f$. Cette valeur de p étant substituée dans la seconde, on trouve $q = 3f^2$. De ces valeurs de p & de q substituées dans la troisième, on tire $-2f^3 + 6f^3 = 4$, ou $4f^3 = 4$, ou $f^3 = 1$. Si la quatrième équation ne s'accordoit pas avec celle-ci, on concluroit que la proposée n'a pas des racines égales; mais en substituant la valeur de q , la quatrième devient $3f^2 = 3$, ou $f^2 = 1$, qui donne $f = 1$, tandis que l'équation $f^3 = 1$ donne aussi $f = 1$. La proposée a donc deux racines égales à l'unité.

86. Avant de passer plus loin, nous allons donner la méthode de trouver les racines des quantités de cette forme $A + \sqrt{B}$, A désignant une quantité rationnelle. Soit $p + q$ la racine quar-

rée de la quantité proposée ; donc le quarré de cette quantité sera $p^2 + 2pq + q^2 = A + \sqrt{B}$. Il est évident que soit qu'on suppose p un radical , aussi-bien que q , soit qu'on suppose que q est seulement radical , il est , dis-je , évident que $p^2 + q^2$ sera une quantité rationnelle $= A$, & que $2pq$ sera un radical quarré $= \sqrt{B}$, quantité que nous ferons $= b$, pour plus de simplicité ; donc $p = \frac{b}{2q}$; mais à cause de $p^2 + q^2 = A$, on a en substituant dans cette dernière équation la valeur de p , $\frac{b^2}{4q^2} + q^2 = A$, ou en multipliant par q^2 & transposant , $q^4 - Aq^2 = -\frac{b^2}{4}$. Enfin résolvant cette dernière équation par la méthode du second degré , il vient $q^2 = \frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}$; donc $q = \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}}$. Substituant cette valeur de q dans l'équation $p^2 + q^2 = A$ ou $p^2 = A - q^2$, on a $p = \pm \sqrt{(A - q^2)}$, ou $p = \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}}$. Donc la racine cherchée $p + q = \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}}$, ou $\pm \sqrt{\frac{1}{2}A + \sqrt{(A^2 - b^2)}}$ $\pm \sqrt{\frac{1}{2}A - \sqrt{(A^2 - b^2)}}$: car cette expression revient au même que celle qu'on trouveroit en prenant le signe supérieur de l'un & de l'autre radical $\sqrt{(A^2 - b^2)}$, seulement alors p se changeroit en q & réciproquement. Quant aux signes de q & de p , il est aisé de voir que si A & b ont le signe $+$, p & q doivent être ou tous les deux positifs ou tous les deux négatifs *. Mais ils doivent avoir

* A & b ne peuvent être à la fois négatifs , parce que la racine cherchée seroit imaginaire.

des signes contraires si b est négatif ; car $p + q$, ou $-p - q$ font les racines de $p^2 + 2pq + q^2$, tandis que $p - q$, ou $q - p$ font celles de $A - b = p^2 - 2pq + q^2$. Et de-là il suit que toutes les fois que la quantité $A + b$ aura une racine quarrée, $\sqrt{(A - b)} \times \sqrt{(A + b)} = \sqrt{(A^2 - b^2)} = p^2 - q^2$ sera une quantité commensurable, & qu'ainsi p & q seront tout au plus des radicaux simples.

Soit la quantité $d^2 + c - 2d\sqrt{c}$ dont on demande la racine. Faisant $A = d^2 + c$, $b = -2d\sqrt{c}$, on a $\sqrt{(A^2 - b^2)} = d^2 - c$. $\sqrt{[\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}]} = d$ & $\sqrt{[\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}]} = \sqrt{c}$. Donc $p - q = d - \sqrt{c}$, racine cherchée. On donne le signe $-$ à la quantité q , à cause du signe $-$ du radical de la quantité proposée.

Soit maintenant proposé de trouver la racine de la quantité $5 + 2\sqrt{6}$. Puisque $A = 5$, $b = 2\sqrt{6}$, l'on aura $\sqrt{(A^2 - b^2)} = 1$, & la première partie de la formule deviendra $\sqrt{3}$, & la seconde $\sqrt{2}$; donc la racine cherchée est $\pm \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$. On trouvera par la même méthode que la racine de $11 - 6\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$. Mais si l'on vouloit avoir la racine de $1 + \sqrt{3}$, on trouveroit $\sqrt{(A^2 - b^2)} = \sqrt{-2}$, quantité imaginaire. Alors prenant la racine approchée de 3, & lui ajoutant 1, je prendrois ensuite la racine de cette somme, que j'aurois du moins par approximation.

Cherchons maintenant la racine cubique de la quantité $a + \sqrt{d}$, ou de $a + b$, b étant un radical quarré & a une quantité rationnelle ; mais auparavant établissons le Lemme suivant.

LEMME. Dans un Binôme quelconque $a + b$ élevé à la puissance m , la différence du quarré de

la somme des termes qui occupent des rangs impairs au quarré de la somme des termes des rangs pairs est $\equiv (a^2 - b^2)^3$. On peut le vérifier aisément.

Soit maintenant la racine cherchée $\equiv (p + q) \times \sqrt[3]{x}$, p étant rationnel, q un radical quarré, & x un radical cube; car il est aisé de voir que p ne peut être un radical, parce que le cube de cette racine contiendrait plus d'un radical. Mais aussi on voit que la racine peut contenir un radical cube qui affecteroit ses deux termes. En élevant au cube la racine proposée, on trouvera que la somme des termes de rang impair est rationnelle, & par conséquent $\equiv a$, & celle des termes de rang pair irrationnelle, & par conséquent $\equiv b$; donc retranchant le quarré de la seconde somme de celui de la première, on aura $a^2 - b^2 \equiv p^6 x^2 - 3 p^4 x^2 q^2 + 3 p^3 x^2 q^4 - x^2 q^6$, ou en multipliant le tout par x prenant la racine cube des deux membres, & divisant ensuite

par x , $p^2 - q^2 \equiv \frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2) x}}{x}$; donc pour que $p^2 - q^2$ soit rationnel, & par conséquent pour que $a + \sqrt{d}$ ait une racine cubique, il faut que $\sqrt[3]{(a^2 - b^2) x}$ soit un cube exact, ce que l'on peut obtenir en prenant pour x une quantité convenable; mais si $a^2 - b^2$ se trouve un cube parfait,

on fera $x \equiv 1$. Supposons $\frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2) x}}{x} \equiv f$, nous aurons $p^2 - q^2 \equiv f$, & $q^2 \equiv p^2 - f$. Substituant cette valeur dans l'équation $a \equiv p^3 x + 3 p q^2 x$ (qu'on trouve en égalant la somme des termes impairs du cube de la racine cherchée à la quantité rationnelle a), il viendra en réduisant

& transposant, $4p^3x - 3fp^2x - a = 0$. Afin donc que p & q^2 soient rationels, il faut que la valeur de p tirée de cette équation (en regardant p comme l'inconnue), soit rationnelle; on cherchera donc les diviseurs commensurables de cette équation, qui ne peut manquer d'en avoir si p & q^2 peuvent être rationels, c'est-à-dire, si la quantité proposée a une racine cubique.

Soit la quantité $20 + 12\sqrt{3}$, dont on demande la racine cubique. Egalant 20 à a , & $12\sqrt{3}$ à b , nous aurons $a^2 = 400$, $b^2 = 432$, $a^2 - b^2 = -32$ qui n'est pas un cube; mais si je multiplie cette quantité par $2 = x$, il viendra -64 , cube de

-4 . J'aurai donc $\frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2)x}}{x} = \frac{\sqrt[3]{(-64)}}{2} =$

$-\frac{2}{x} = -2 = f$, & l'équation $4p^3x - 3fp^2x - a = 0$ devient $8p^3 + 12p - 20 = 0$, ou en divisant par 8 & réduisant, $p^3 + \frac{3}{2}p - \frac{5}{2} = 0$. Orant

les fractions en supposant $p = \frac{y}{2}$ & réduisant, l'on a $y^3 + 6y - 20 = 0$, dont le seul diviseur rationel est $y - 2$ & le quotient $y^2 + 2y + 10 = 0$, dont les racines sont imaginaires. Le diviseur rationel donne $y = 2$ & par conséquent

$p = \frac{y}{2} = 1$, & parce que $f = -2$, l'équation $q^2 = p^2 - f$, devient $q^2 = 1 + 2 = 3$ & $q = \sqrt{3}$; & puisque $x = 2$, $(p + q)\sqrt[3]{x}$ fera $= (1 + \sqrt{3}) \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt{3}$.

Soit proposée maintenant la quantité $2 + \sqrt{5}$, dont on demande la racine cube. Nous aurons $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $a^2 - b^2 = 4 - 5 = -1$, cube

R 3

de -1 ; donc $x = 1$ & $f = -1$; donc notre équation devient $4p^3 + 3p - 2 = 0$, & en supposant $p = \frac{y}{4}$, on trouve cette autre équation $y^3 + 12y - 32 = 0$, qui n'a qu'un seul diviseur rationnel $y - 2 = 0$, les racines du quotient $y^2 + 2y + 16 = 0$ étant imaginaires ; donc $y = 2$ & $p = \frac{y}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; donc $q^2 = p^2 - f = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$; donc $q = \frac{1}{2} \sqrt{5}$; donc $(p + q) \times \sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$. On trouvera de même que la racine cube de $20 + 14\sqrt{2}$ est $2 + \sqrt{2}$.

Si l'on demandoit la racine cinquième de la quantité $a + \sqrt{d} = a + b$, je supposerois $\sqrt[5]{(a + b)} = (p + q) \sqrt[5]{x}$, p étant rationnel & q un radical du second degré ; car il est évident que p ne peut être un radical, autrement la cinquième puissance de $(p + q) \sqrt[5]{x}$, contiendrait plus d'un radical ; mais on voit aussi que les deux parties de la racine peuvent être multipliées par un radical du cinquième degré qui ne doit plus se trouver dans $a + b$. Élevant à la puissance cinquième la racine supposée ; la somme des termes de rang impair sera $= a$, celle des termes de rang pair étant $= b$, la différence des quarrés de la première & de la seconde somme sera $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b) = (p^2 - q^2)^5 \times x^2$. Multipliant par x^3 l'on a $(p^2 - q^2)^5 \times x^5 = x^5 (a^2 - b^2)$, ou en prenant la racine cinquième, $(p^2 - q^2) x = \sqrt[5]{(x^5 a^2 - x^5 b^2)}$, & enfin $p^2 - q^2 = \frac{\sqrt[5]{(a^2 - b^2) x^5}}{x} = f$. Lorsque $a^2 - b^2$ sera

une cinquième puissance parfaite , l'on supposera $x = 1$. Dans le cas contraire on multipliera $a^2 - b^2$ par un multiplicateur propre à rendre cette quantité une cinquième puissance parfaite , & l'on aura

f en divisant $\sqrt[5]{(a^2 - b^2)x^3}$ par la racine cube du multiplicateur x^3 . De l'équation $p^2 - q^2 = f$, on tire $q^2 = p^2 - f$ & $q = \sqrt{p^2 - f}$. On connoîtra donc q , aussi-tôt qu'on connoîtra f & p . A l'égard de cette dernière quantité , on la trouvera en égalant à a la somme des termes rationels de la cinquième puissance de la racine supposée. De cette égalité , en substituant la valeur de q^2 prise dans l'équation , $q^2 = p^2 - f$, on déduira l'équation $16p^5x - 20p^3fx + 5pf^2x - a = 0$. Cette équation , après les substitutions des valeurs de x & de f , étant changée en une autre , dont le coefficient du premier terme soit 1 , fera connoître p en s'y prenant à-peu-près de la même manière que nous venons de le voir pour les racines cubiques.

Pour avoir la racine septième de la quantité $a + \sqrt{d} = a + b$; supposant cette racine $= (p + q)$

$\times \sqrt[7]{x}$, élevant cette racine à la septième puissance , égalant la somme des termes de rang impair à la quantité a , & celle des termes de rang pair à la quantité b , ôtant le quarré de la dernière somme de celui de la première , nous aurons $(p^2 - q^2)^7 \times x^2 = a^2 - b^2$, multipliant par x^5 prenant les racines septièmes & divisant ensuite

par x , l'on a $p^2 - q^2 = \frac{\sqrt[7]{x^5(a^2 - b^2)}}{x} = f$;

donc $p^2 - q^2 = f$, ou $q^2 = p^2 - f$. Il est évident que cette équation fera connoître q , aussi

tôt qu'on connoitra f & p . On connoitra f en cherchant la valeur de x , ce qu'on fera à-peu-près comme nous l'avons expliqué pour les racines troisième & cinquième. A l'égard de p , si l'on égale la somme des termes de rang impair de la

puissance septième de $(p + q) \sqrt[7]{x}$ à la quantité a , en se souvenant de substituer $p^2 - f$ à la place de q^2 , on en déduira l'équation $63 p^7 x - 112 p^5 f x + 56 p^3 f^2 x - 7 p f^3 x - a = 0$, qui fera connoître la valeur de p en cherchant les diviseurs rationels de l'équation qu'on trouvera en transformant celle-ci en une autre, dont le premier terme soit sans coefficient. On trouvera de même pour la racine onzième de $a + \sqrt{d} = a + b$,

l'équation $\frac{\sqrt[11]{x^9(a^2 - b^2)}}{x} = p^2 - q^2 = f$, & l'on

connoitra p par le moyen de l'équation $1024 p^{11} x - 2816 p^9 f x + 2816 p^7 f^2 x - 1232 p^5 f^3 x + 220 p^3 f^4 x - 11 p f^5 x - a = 0$. On peut voir maintenant comment il faut s'y prendre pour avoir les racines 13^e , 17^e &c. dont les exposants sont des nombres premiers. Mais si l'exposant de la racine n'étoit pas un nombre premier, qu'il fût 15 , *par exemple*, ou 9 , on prendroit d'abord la racine cube, & ensuite la racine cinquième, s'il s'agissoit de la racine 15^e , ou seulement la racine cube du résultat, s'il n'étoit question que de la racine 9^e . Si le premier résultat n'avoit point de racine 5^e , on seroit sûr que la quantité proposée n'a point de racine 15^e . De même si le second résultat n'avoit point de racine cubique, la quantité proposée ne peut avoir de racine 9^e .

Si la quantité proposée est de cette forme $\sqrt[11]{a + b}$

\sqrt{d} , on la multipliera par \sqrt{a} , le produit fera de la forme ci-dessus; mais il faudra diviser la racine du produit par la racine du multiplicateur.

Pour avoir la racine m de $(\sqrt{a} + \sqrt{d}) \sqrt[n]{c}$, on multipliera cette quantité par \sqrt{a} , & on la divisera par $\sqrt[n]{c}$, & l'on aura la quantité $a + b$ dont on prendra la racine m ; mais on divisera le résultat par $\sqrt[n]{a}$ & on le multipliera par $\sqrt[n]{c}$. A l'égard de p , il doit avoir le signe de a , & q celui de b .

87. Qu'il s'agisse d'extraire la racine quarrée de la quantité $A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}$ qui renferme une partie rationnelle & trois radicaux du second degré. Je suppose que la racine cherchée est $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$. Elevant cette quantité au quarré, on aura $p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$; ainsi en égalant la partie rationnelle à A , & les parties radicales aux parties radicales de la quantité proposée, nous pourrons former les quatre équations suivantes: $p + q + r = A$, $2\sqrt{pq} = \sqrt{B}$, $2\sqrt{pr} = \sqrt{C}$, $2\sqrt{qr} = \sqrt{D}$. Par la seconde $q = \frac{B}{4p}$, par la troisieme $r = \frac{C}{4p}$, & par la quatrième $r = \frac{D}{4q}$. Substituant dans la premiere les valeurs de q & de r

données par la seconde & la troisieme, il viendra $p + \frac{B}{4p} + \frac{C}{4p} = A$, ou $p^2 + \frac{B}{4} + \frac{C}{4} = pA$, ou $pp - pA = \frac{-B-C}{4}$, ou $pp - pA + \frac{AA}{4} = \frac{AA - B - C}{4}$, $p - \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{AA - B - C}}{2}$; & enfin $p = \frac{A + \sqrt{AA - B - C}}{2}$. Si A

$+ \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}$ est un quarré parfait, la quantité $\sqrt{AA - B - C}$ deviendra rationnelle, parce que $AA - B - C = (p + q + r)^2 - 4pq - 4pr = (p - q - r)^2$, ce qui donne $\sqrt{AA - B - C} = p - q - r$. Dès qu'on aura trouvé p , on aura q par l'équation $q = \frac{B}{4p}$, & r par

l'équation $r = \frac{C}{4p}$; mais, parce que r est aussi $= \frac{D}{4q}$, il est nécessaire qu'après avoir déterminé p, q, r , on ait l'équation de condition $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$, afin que l'extraction de la racine soit possible.

Qu'on se propose d'extraire s'il est possible la racine quarrée de la quantité $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$. Faisant $A = 10, B = 24, C = 40, D = 60$, nous trouverons $AA - B - C = 36$, & $p = \frac{A + \sqrt{(AA - B - C)}}{2} =$

$8, q = \frac{B}{4p} = \frac{1}{4}, r = \frac{C}{4p} = \frac{1}{4}$. D'un autre côté l'équation $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$, donne $5 = 80$, ce qui étant absurde, on doit conclure que les nombres trouvés p, q, r ne sont pas les véritables. Faisons une autre hypothèse en supposant $A = 10, B = 40, D = 24$ & $C = 60$, nous aurons $AA - B - C = 0, p = \frac{A}{2} = 5, q = 2$ & $r = 3$. Alors $\frac{C}{4p} = 3 = \frac{D}{4q} = 3$; donc la racine quarrée de la quantité proposée $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ est $= \pm (\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})$.

On opérera semblablement pour les quantités de pareille nature, lorsque les racines quarrées devront contenir 4, 5, 6 ou un plus grand nombre de termes.

Des Equations du troisième & du quatrième degré.

88. Soit une équation du troisième degré $x^3 - 1 = 0$, cette équation étant divisible par $x - 1 = 0$, & le quotient étant $x^2 + x + 1 = 0$, dont les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, l'on aura pour les trois racines cubiques de l'unité, $1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. On trouvera facilement que les quatre

racines de l'unité que fournit l'équation $x^4 - 1 = 0$, sont $1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$: car l'équation $x^4 - 1 = 0$ est divisible par $x^2 - 1 = 0$ & donne pour quotient $x^2 + 1 = 0$; or les racines de ces deux dernières équations donnent les quatre racines ci-dessus.

Cela posé. Soit une équation du troisième degré délivrée du second terme (ce qu'on peut toujours obtenir (74)) $x^3 - 3ax - b = 0$. Supposons $x = m + n$; donc $x^3 = m^3 + 3mn(m+n) + n^3$, ou en substituant à la place de $m + n$ la valeur x & transposant tout dans le premier membre, $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = 0$. Comparant cette équation

avec la proposée terme à terme, l'on a $mn = a$, $m^3 + n^3 = b$. Mais l'équation $mn = a$, donne $n^3 = \frac{a^3}{m^3}$; donc en substituant cette valeur dans

la dernière équation, $m^3 + \frac{a^3}{m^3} = b$. Multipliant par m^3 & transposant, $m^6 - bm^3 = -a^3$. Cette équation étant résolue par la méthode du second degré, donne $m^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^3\right)}$, &

enfin $m = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$. Si dans l'équation $m^3 + n^3 = b$ au lieu de la valeur de n , on substitue celle de m prise de l'équation

$mn = a$, on trouvera $n = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$;

donc $x = m + n = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$

$+ \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$ *. De l'équation ci-dessus $m^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt[3]{\left(\frac{b^2}{4} - a^3\right)}$, on tire $m^3 = 1 \times \left(\frac{b}{2} \pm \sqrt[3]{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)$; donc en prenant les racines cubiques de l'unité, & les multipliant par la valeur de m on aura

$$m = 1 \times \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$$

$$m = \frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2} \times \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$$

$$m = \frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2} \times \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}.$$

Multipliant de même les valeurs de n par les racines cubiques de l'unité, l'on aura les quantités qu'on voit ici :

$$n = 1 \times \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$$

$$n = \frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2} \times \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$$

$$n = \frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2} \times \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$$

* On donne le signe $+$ à l'un des radicaux quarrés, & le signe $-$ à l'autre, afin que le produit mn soit $= a$ ou que $m^3 \times n^3 = a^3$, ce qui n'arriveroit pas si les deux radicaux quarrés avoient le même signe.

$$\begin{aligned}
 m+n=x &= \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} + \\
 &\quad \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} \\
 x &= \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} \times \frac{[-1 + \sqrt{(-3)}]}{2} \\
 &\quad + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} \times \frac{[-1 - \sqrt{(-3)}]}{2} \\
 x &= \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} \times \frac{[-1 - \sqrt{(-3)}]}{2} \\
 &\quad + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} \times \frac{[-1 + \sqrt{(-3)}]}{2}.
 \end{aligned}$$

On n'a pas combiné d'autres valeurs de m & de n , parce que leur produit mn n'auroit pas donné a , ni $m^3 \cdot n^3$ la quantité a^3 .

De ces trois valeurs de x la première est toujours réelle, mais les deux autres sont imaginaires si $\frac{b^2}{4} > a^3$; elles sont réelles si $\frac{b^2}{4} = a^3$, ou si $\frac{b^2}{4} < a^3$, c'est-à-dire, si la quantité $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^3\right)}$ est ou 0, ou imaginaire. Pour le démontrer soit $\frac{b}{2} = p$, $\frac{b^2}{4} - a^3 = q$, quantité négative toutes les fois que $a^3 > \frac{b^2}{4}$.

Par la formule générale du binome de Newton *,
 $m = \sqrt[3]{(p + \sqrt{q})}$ fera $p^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} p^{\frac{-2}{3}} \sqrt{q} - \frac{1}{9} p^{\frac{-5}{3}} q +$
 $\frac{1}{27} p^{\frac{-8}{3}} q \sqrt{q} \&c.$, & $n = \sqrt[3]{(p - \sqrt{q})}$ fera $p^{\frac{1}{3}} -$
 $\frac{1}{3} p^{\frac{-2}{3}} \sqrt{q} - \frac{1}{9} p^{\frac{-5}{3}} q \&c.$; donc $x = m + n =$
 $2p^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} p^{\frac{-2}{3}} \sqrt{q} \&c.$, quantité qui ne contient aucun
radical. Donc la première racine est toujours réelle.
La seconde racine peut être représentée par $m \times$
 $\frac{[-1 + \sqrt{(-3)}]}{2} + n \times \frac{[-1 - \sqrt{(-3)}]}{2} = \frac{(-m - n)}{2}$
 $+ \frac{(m - n)}{2} \times \sqrt{(-3)}$. La première partie est évi-
demment rationnelle; quant à la seconde, en retran-
chant la seconde série de la première, vous trou-
verez $\frac{(m - n)}{2} = \frac{1}{3} p^{\frac{-2}{3}} \sqrt{q} + \frac{1}{9} p^{\frac{-5}{3}} q \sqrt{q} \&c.$ dont
tous les termes sont affectés de \sqrt{q} . Mais $\sqrt{q} \times$
 $\sqrt{(-3)}$ est une quantité réelle si q est une quantité
négative, & imaginaire si q est une quantité posi-
tive; donc la seconde racine est réelle dans le
premier cas, & imaginaire dans le second. La
troisième racine peut être représentée par $\frac{(-m - n)}{2}$
 $+ \frac{(-m + n)}{2} \times \sqrt{(-3)}$, dont la première partie est
réelle. À l'égard de la seconde, en ôtant la première
série trouvée ci-dessus de la seconde, divisant le ré-
sultat par 2, & le multipliant par $\sqrt{(-3)}$, on verra
de même que la quantité résultante sera réelle lors-
que q sera négatif, & imaginaire si q est positif.

* La formule $(a + b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \&c.$
s'appelle le binome de Newton, parce que ce grand Géomètre
en est l'inventeur.

Si q est 0, alors la seconde racine & la troisième sont représentées l'une & l'autre par $\frac{-m-n}{2}$; elles sont donc réelles dans ce cas.

Soit maintenant l'équation du troisième degré $y^3 + 3y^2 - 3y + 25 = 0$. Faisant évanouir le second terme, en supposant $y = x - 1$ (74), l'équation résultante $x^3 - 6x + 30 = 0$, étant comparée avec l'équation générale $x^3 - 3ax - b = 0$, donne $6 = 3a$ & $2 = a$, $b = -30$. Ces valeurs substituées dans

$\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^3\right)}$, cette quantité devient $\sqrt{217}$,

qui est une quantité réelle, donc il n'y a que la première valeur de x qui soit réelle, & elle donne

$x = \sqrt[3]{(-15 + \sqrt{217})} + \sqrt[3]{(-15 - \sqrt{217})}$; mais parce que $y = x - 1$, il faut, pour avoir les racines de la proposée, diminuer la valeur de

x de 1, & l'on aura $y = \sqrt[3]{(-15 + \sqrt{217})} + \sqrt[3]{(-15 - \sqrt{217})} - 1$ pour la seule valeur réelle de l'équation proposée.

PROBLEME I. Quel est le nombre dont le cube est égal à six fois ce nombre plus 9? Soit x ce nombre; par la nature du Problème $x^3 = 6x + 9$. Comparant cette équation avec l'équation $x^3 - 3ax - b = 0$, ou $x^3 = 3ax + b$, on a $3a = 6$, ou $a = 2$ & $b = 9$. Substituant ces valeurs

dans la formule $x = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$

$+ \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$, on trouve $x = 3$.

Tel est le nombre cherché.

PROBLEME II. *Quel est le nombre x dont la différence entre le cube & le triple de ce nombre est 2 ?* Par la nature du Problème $x^3 - 3x = 2$, ou $x^3 = 3x + 2$. Comparant cette équation avec l'équation $x^3 = 3ax + b$, on trouve $3a = 3$, $a = 1$, & $b = 2$. Donc la formule $x =$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$$

donnera $x = \sqrt[3]{\left(\frac{2+0}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2-0}{2}\right)} = 1 + 1 = 2$.

PROBLEME III. *Quel est le nombre x dont le cube est égal à six fois ce nombre plus 40 ?* Nous aurons

$$a = 2, b = 40, x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4.$$

PROBLEME IV. *Trouver trois nombres en proportion arithmétique continue, dont la différence d soit $= 3$ & le produit $p = 28$.* Soit y le nombre du milieu ; le plus grand nombre sera $y + d$, & le plus petit $y - d$. Le produit de ces trois nombres donne $y^3 - d^2 y = p$; donc $y^3 - d^2 y - p = 0$. Cette équation étant sans second terme, donne par la comparaison avec l'équation générale,

$$d^2 = 3a, \text{ ou } a = \frac{d^2}{3}, \text{ \& } p = b. \text{ Substituant les va-}$$

leurs numériques de ces quantités dans la première valeur de x trouvée ci-dessus, on a y ou x (car ici l'un peut être mis à la place de l'autre) $=$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{[14 + \sqrt{(196 - 28)}]} + \sqrt[3]{[14 - \sqrt{(196 - 28)}]} \\ &= \sqrt[3]{(14 + 13)} + \sqrt[3]{(14 - 13)} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1} \\ &= 3 + 1 = 4. \text{ Donc } y = 4, \text{ le plus grand nombre } \\ & y + d = 4 + 3 = 7, \text{ \& le plus petit } y - d = 1. \end{aligned}$$

Si l'on avoit une équation de cette forme $y^{3m} + ay^{2m}$

$ay^{2m} + by^m + d = 0$, on la réduiroit à une équation du troisiéme degré sans second terme, en supposant $y^m = x - \frac{a}{3}$; & ayant trouvé les racines

de la réduite, on en retrancheroit $\frac{a}{3}$, les résultats donneroient les valeurs de y^m , & les racines m de ces résultats donneroient les valeurs de y . Si cette équation n'avoit point de second terme, on supposeroit seulement $y^m = x$, & l'on prendroit la racine m de chaque valeur de x . On peut donc résoudre toutes les équations qui n'ayant que quatre termes, ne contiennent que trois puissances de l'inconnue, dont les exposans forment la progression arithmétique $3m, 2m, m$. De même l'on peut résoudre toutes les équations à trois termes qui ne contiennent que deux puissances de l'inconnue, mais dont l'exposant de l'une est triple de celui de l'autre.

88. Soit maintenant une équation du quatrième degré délivrée de son second terme [ce qui est toujours possible (74)] $y^4 + ay^2 + by + c = 0$. Supposons que cette équation soit le produit des deux facteurs du second degré $y^2 + xy + p = 0$, $y^2 - xy + q = 0$ *, leur produit donnera l'équation $y^4 + qy^2 + qxy + pq = 0$, qui étant comparée avec la $\begin{matrix} -x^2 & -px \\ +p & ** \end{matrix}$

* Le second terme du second facteur a le signe —, afin que le produit des deux facteurs donne une équation sans second terme, ce qui n'arriveroit pas si le second terme des deux facteurs, qui d'ailleurs doit être le même, avoit les mêmes signes.

** Les quantités $(+q - x^2 + p)$ sont censées multiplier y^2 . De même y est multiplié par $+qx - px$.

proposée, donne $q + p - x^2 = a$, $qx - px = b$, $pq = c$. Multipliant la première par x & l'ajoutant ensuite à la seconde, l'on a $2qx - x^3 = ax + b$, ou $2qx = ax + x^3 + b$, & $q = \frac{ax + x^3 + b}{2x}$. Cette valeur de q étant substituée dans

l'équation $pq = c$, il vient $p \times \frac{ax + x^3 + b}{2x} = c$,

& $p = \frac{2xc}{ax + x^3 + b}$. Substituant les valeurs de q &

de p que nous venons de trouver dans l'équation $qx - px = b$, il vient $\frac{ax + x^3 + b}{2} - \frac{2cx^2}{ax + x^3 + b} = b$, ou en faisant évanouir les fractions, transposant & réduisant, $x^6 + 2ax^4 + a^2x^2 - b^2 = 0$,

équation qui peut se résoudre par la méthode du troisième degré (88). Cette équation (qu'on appelle *la réduite*) étant résolue, on n'aura qu'à substituer la valeur de x qu'elle donnera dans les équations $y^2 + xy + p = 0$, $y^2 - xy + q = 0$, ou bien en substituant les valeurs de p & de q ,

dans les équations $y^2 + xy + \frac{2c}{x^3 + a + \frac{b}{x}} = 0$,

$$y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a + \frac{b}{2x} = 0,$$

& résoudre ensuite ces équations; ou, ce qui revient au même, substituer la valeur de x dans les racines que donnent ces équations résolues, en considérant y seul comme l'inconnue; c'est-à-dire, dans

$$\text{les racines } y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - \frac{2c}{x^3 + a + \frac{b}{x}}}$$

$$\& y = \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} a - \frac{b}{2x}},$$

& l'on aura les valeurs cherchées de y . Comme x est venu d'une équation dans laquelle il avoit un exposant pair, il est évident que x est un radical quarré & qu'il peut avoir le double signe \pm (car $\sqrt{x^2} = \pm x$).

La premiere expreffion de y peut donc se changer

$$\text{en celle-ci } y = \mp \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\frac{1}{4} x x - \frac{2c}{x x + a \pm \frac{b}{2x}}},$$

& la seconde devient $y = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{(-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} a \mp \frac{b}{2x})}$. Ainsi y a quatre valeurs exprimées par l'une ou l'autre formule; mais il n'y a pas pour cela 8 racines, parce que les deux formules donnent les mêmes racines. En effet, les quantités qui sont devant les signes de ces formules étant les mêmes, il suffit de faire voir que les quantités sous les signes sont les mêmes, c'est-à-dire, que

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{a}{2} \mp \frac{b}{2x} = \frac{x^2}{4} - \frac{2c}{x^2 + a \pm \frac{b}{2x}}; \text{ or en}$$

faisant disparaître les dénominateurs, transposant & réduisant, on tire de cette équation, celle que nous avons appelé *la réduite*; donc cette équation est vraie. Comme la seconde formule est la plus commode, c'est de celle-là que nous nous servirons, & les valeurs de y qu'elle donne, sont

$$y = \frac{1}{2} x + \sqrt{\left(-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} a - \frac{b}{2x}\right)}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a - \frac{b}{2x}\right)}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2x}\right)}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2x}\right)}.$$

Si l'on fait $\frac{x}{2} = f$, $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a - \frac{b}{2x}\right)}$

$= h$, & $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2x}\right)} = l$, les quatre

facteurs de l'équation $y^4 + ay^2 + by + c = 0$,

pourront être représentés par les formules suivantes

$$\left. \begin{aligned} y - f - h &= 0 \\ y - f + h &= 0 \\ y + f - l &= 0 \\ y + f + l &= 0 \end{aligned} \right\} (D).$$

Le produit de ces facteurs donnera l'équation

$$\left. \begin{aligned} y^4 - 2ff y^2 - 2fh h y + f^4 \\ - h h \quad + 2fll \quad - f^2 h^2 \\ - ll \quad \quad - f^2 l^2 \\ \quad \quad + h^2 l^2 \end{aligned} \right\} = 0. (S).$$

En comparant les termes de cette dernière équation avec ceux de l'équation proposée, l'on aura $a = -2f^2 - h^2 - l^2$, $b = 2f.l^2 - 2f.h^2$, $c = f^4 + h^2 l^2 - f^2 h^2 - f^2 l^2$. Substituant ces valeurs dans la réduite, nous aurons l'équation

$$\left. \begin{aligned} x^6 - 4f^2 x^4 + 8f^2 h^2 x^2 - 4f^2 h^4 \\ - 2h^2 \quad + 8f^2 l^2 \quad + 8f^2 h^2 l^2 \\ - 2l^2 \quad + h^4 \quad - 4f^2 l^4 \\ \quad \quad + l^4 \\ \quad \quad - 2h^2 l^2 \end{aligned} \right\} = 0 (P),$$

dont les racines sont $x = \pm 2f$; $x = \pm h \pm l$; $x = \pm h \mp l$. Mais si dans la formule $y = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} a \mp \frac{b}{2x}\right)}$ on substitue les valeurs de a & de b que nous venons de trouver, & ensuite celle qu'on voudra des valeurs de x , il en viendra également les valeurs de y que donnent les équations D; donc les racines de la réduite donnent le même résultat par leur substitution.

La formule générale de la valeur de y fait voir que les 4 racines que donnent cette formule, sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires, ou deux réelles ou deux imaginaires; mais parce que le dernier terme de la réduite a le signe —, il est évident qu'elle doit avoir une valeur de x^2 positive*, & par conséquent une des valeurs de x est positive; mais nous venons de voir que toutes les valeurs de x donnent la même valeur pour y . Donc quand la valeur de y sera imaginaire, ce ne sera qu'une quantité réelle jointe à la racine d'une quantité réelle & négative, c'est-à-dire, une quantité imaginaire de la forme $M \pm N\sqrt{(-1)}$. Et puisque les racines imaginaires sont toujours en nombre pair dans une équation, & que l'une étant $a - b\sqrt{(-1)}$, l'autre doit être $a + b\sqrt{(-1)}$ (voyez le n° 72), les facteurs du second degré qui résulteront des deux racines imaginaires multipliées l'une par l'autre, & de deux facteurs réels multipliés aussi

* Car le produit des deux facteurs imaginaires $x \pm a \pm b\sqrt{(-1)}$, $x \pm a - b\sqrt{(-1)}$, donnant un résultat, dont le dernier terme est positif, il est nécessaire que toute équation, dont le dernier terme est négatif, ait au moins une racine réelle.

par l'autre , ou les facteurs du second degré qui résulteront des quatre racines imaginaires multipliées deux à deux seront réels. Donc dans ce cas même l'équation aura deux facteurs réels du second degré.

La réduite P étant le produit des trois facteurs $x^2 - 4f^2 = 0$, $x^2 - h^2 - l^2 - 2hl = 0$, $x^2 - h^2 + 2hl - l^2 = 0$; si h & l sont tous deux réels ou tous deux imaginaires , les trois facteurs seront tous réels , & la formule du troisième degré (88) ne pourra donner les racines de la réduite. * Si l'une des deux quantités h ou l seulement est imaginaire , les deux derniers facteurs seront imaginaires , & la réduite sera alors résoluble par la formule du troisième degré ; donc alors la formule du quatrième degré réussira.

En examinant attentivement la réduite P , on verra que le coefficient de son second terme est nécessairement négatif lorsque f , h & l sont réels , & que dans le même cas le coefficient de son troisième terme est positif & plus grand que 0 ; mais si h^2 & l^2 sont des quantités négatives , ou , ce qui revient au même , si les 4 racines de l'équation sont imaginaires , la réduite P ne sauroit avoir en même tems le second terme négatif & le troisième positif ; car si $(h^2 + l^2) < 2f^2$, ce qui rend dans ce

* On dit que la formule du troisième degré ne peut alors donner les racines , parce que ces racines sont sous une forme imaginaire , quoiqu'elles soient réelles , & c'est-là ce qu'on appelle le cas irréductible du troisième degré. Lorsque la réduite est dans ce cas , si on substituoit la valeur de x qu'elle donne dans la formule du quatrième degré , on auroit une expression qui contiendrait des radicaux imaginaires ; c'est pourquoi l'on dit que dans ce cas , la formule du quatrième degré ne réussit point.

cas le second terme négatif, le coefficient du troisième terme, qui dans ce même cas est $= (h^2 + l^2) \times (h^2 + l^2 - 8f^2) - 4h^2l^2$, fera nécessairement négatif; donc lorsque la réduite échappera à la formule du n° 88, l'on verra par-là si l'équation doit avoir ses 4 racines réelles ou imaginaires.

En examinant l'équation S, il est aisé de voir qu'une équation du quatrième degré, sans second terme & dont le troisième est positif (on compte comme si le second y étoit), doit avoir des racines imaginaires; car $-2f^2 - h^2 - l^2$ fera toujours une quantité négative, lorsque f, h, l seront réels, & par conséquent tant que les racines seront réelles; donc dans le cas contraire l'équation a des racines imaginaires.

Soit maintenant l'équation $z^4 + 4z^3 + 9z^2 + 12z + 3 = 0$. Faisant $z = y - 1$ & substituant, l'on aura $y^4 + 3y^2 + 2y - 3 = 0$, équation sans second terme. On a donc ici $a = 3, b = 2, c = -3$, & la réduite devient $x^6 + 6x^4 + 21x^2 - 4 = 0$. Faisant disparaître le second terme, en supposant $x^2 = u - 2$ (on regarde ici x^2 comme l'inconnue), l'on a $u^3 + 9u - 30 = 0$, équation qui n'a qu'une racine réelle, & par conséquent l'équation du quatrième degré ne doit avoir (selon ce que nous avons dit ci-dessus) que deux racines réelles. Appliquant la formule du n° 88 à la dernière équation que nous venons de trouver, nous aurons

$$u = \sqrt[3]{(+15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(+15 - \sqrt{252})}^*.$$

* Car en comparant cette équation avec celle du troisième degré (n° 88), l'on a $-3a = 9, -a^3 = 27, -b = -30, \frac{b}{2} = 15$; & $x = u$. Mais la valeur de a , il en est

Mais parce que $x^2 = u - 2$, il faut diminuer cette racine de la quantité 2, & l'on aura $x = \pm$

$$\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]}$$

Substituant cette valeur dans l'équation $y = \pm \frac{1}{2} x$

$$\pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} a \mp \frac{b}{2x}\right)}, \text{ l'on aura les va-}$$

leurs de y renfermées dans la formule suivante: $y =$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]} \pm$$

$$\sqrt{\left[-\frac{1}{4} [-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}] - \frac{1}{2} \mp$$

$$\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]} \right]}.$$

Et pour avoir les valeurs de z , il faudra diminuer ces racines de la quantité 1. Deux des racines de y sont réelles & les deux autres imaginaires *.

Dans le cas où l'équation du quatrième degré n'a point de diviseur commensurable d'une ou de deux dimensions, après avoir connu, par le moyen de la réduite, si elle a des racines réelles, on pourra les chercher par la méthode précédente; mais si elle a des racines commensurables, on les trouvera aisément en cherchant les diviseurs commensurables de cette équation.

Si l'on avoit une équation de cette forme $x^{4m} + ax^{3m} + bx^{2m} + cx^m + d = 0$, il est aisé de voir qu'en faisant $y^m = x$, elle seroit résoluble

de même de celle de b , est différente dans la formule du quatrième degré, puisque dans cette formule $a = 3$, comme nous l'avons dit ci dessus.

* Ce sont celles qu'on trouve en prenant le signe — dans

$$\mp \frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]} }.$$

par la méthode du quatrième degré, quand même on supposeroit a ou b ou $c=0$, c'est-à-dire, quand même un ou plusieurs termes manqueroient.

REMARQUE. Il y a encore une autre méthode pour résoudre les équations du quatrième degré, dont il est à-propos de donner une idée aux Comménçans *.

Supposons que la racine x d'une équation du quatrième degré est $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, p , q & r étant des quantités qui désignent les racines de l'équation du troisième degré $t^3 - ft^2 + gt - h = 0$; de manière que $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$, & $pqr = h$. Cela posé, qu'on pose la formule $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, pour avoir $x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Mais $p + q + r = f$; donc en substituant & transposant ensuite, on trouvera $x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Et en quadrant encore, $x^4 - 2x^2f + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqr^2} + 8\sqrt{pqqr}$. Or $g = pq + pr + qr$; donc $x^4 - 2fx^2 + ff = 4g + 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$, équation que je désignerai par (A). Mais $pqr = h$, $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$, & $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$; donc nous aurons l'équation du quatrième degré $x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + ff - 4g = 0$; dont une des racines est $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, p , q & r étant les racines de l'équation du troisième degré $t^3 - ft^2 + gt - h = 0$.

L'équation du quatrième degré à laquelle nous sommes parvenus, peut être regardée comme générale, parce qu'il est toujours possible de changer une équation du quatrième degré, qui a le second terme en une autre, dans laquelle ce second terme manque. Voyons donc comment on peut trouver les racines de l'équation ci-dessus.

Soit proposée l'équation $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$, que je désignerai par (B), dont on demande les racines. Comparant cette équation avec l'équation A, je trouve 1°. $2f = a$, ou $f = \frac{a}{2}$; 2°. $8\sqrt{h} = b$; donc $64h = bb$, & $h = \frac{bb}{64}$; 3°. $ff - 4g = c$, ou $\frac{aa}{4} - 4g + c = 0$, ou $c + \frac{aa}{4} = 4g$, & $g = \frac{c}{4} + \frac{aa}{16}$. On substituera les valeurs de f , h & g que

* Nous la devons à M. Euler.

nous venons de trouver dans l'équation du troisième degré $t^3 - f t t + g t - h = 0$. On cherchera les trois racines de celle-ci par la méthode ci-dessus; & supposant qu'une de ces racines est p , & que les deux autres sont désignées l'une par q & l'autre par r , une des racines de notre équation du quatrième degré sera $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

Cette formule renferme nécessairement les quatre racines de l'équation proposée du quatrième degré, à cause des différents signes qu'on peut donner aux radicaux, bien plus il semble même qu'elle peut donner huit valeurs de x ; mais on doit faire attention que \sqrt{pqr} doit être $= \sqrt{h} = \frac{b}{8}$; donc si $\frac{b}{8}$ est

une quantité positive, le produit des quantités \sqrt{p} , \sqrt{q} , \sqrt{r} doit être positif. Il est donc nécessaire dans ce cas de prendre les trois radicaux avec le signe $+$, ou bien deux avec le signe $-$, & un avec le signe $+$; de sorte que dans ce cas les valeurs de x sont

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

$$x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$$

$$x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$$

$$x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

Si $\frac{b}{8}$ est une quantité négative, les valeurs de x seront les

suivantes $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$

$$x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

$$x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

$$x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$$

Soit maintenant l'équation du quatrième degré sans second terme $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$. En la comparant avec l'équation B je trouve $a = 25$, $b = -60$ & $c = 36$. Substituant ces valeurs de a , b & c dans celles de f , g & h , l'on a $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$, & $h = \frac{225}{4}$; ainsi notre équation du troisième degré devient $t^3 - \frac{25}{2}t^2 + \frac{769}{16}t - \frac{225}{4} = 0$. Afin d'éliminer les fractions, je fais $t = \frac{z}{4}$, pour

avoir $\frac{z^3}{64} - \frac{25}{2} \cdot \frac{z^2}{16} + \frac{769}{16} \cdot \frac{z}{4} - \frac{225}{4} = 0$. Multipliant en-

suite par le plus grand dénominateur 64, je trouve $z^3 - 50z^2$

$+769z - 3600 = 0$. Il faut maintenant trouver les racines de cette dernière équation ; l'une d'elles est $z = 9$, & en divisant l'équation par $z - 9 = 0$, il vient $zz - 41z + 400 = 0$, ou $zz + 41z = -400$. Cette dernière équation étant résolue par la méthode du second degré, donne $z = 16$ & $z = 25$. Ainsi les trois racines sont $z = 9$, $z = 16$ & $z = 25$; donc $t = \frac{3}{4}$, $t = 4$ & $t = \frac{5}{4}$. Ainsi nous avons $p = \frac{3}{4}$, $q = 4$ & $r = \frac{5}{4}$; mais $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{1}{2} = -\frac{b}{8}$;

donc, pour nous conformer à ce que nous avons dit ci-dessus l'égard des signes des radicaux \sqrt{p} , \sqrt{q} , \sqrt{r} , il faut prendre ces trois radicaux avec le signe $-$, ou n'en prendre qu'un avec le signe $-$; & parce que $\sqrt{p} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{q} = 2$, $\sqrt{r} = \frac{5}{2}$, les quatre racines de l'équation proposée seront

$$x = \frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$$

$$x = \frac{1}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$$

$$x = -\frac{1}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$$

$$x = -\frac{1}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6.$$

Des Equations des Degrés supérieurs.

90. Nous nous contenterons d'exposer la méthode par laquelle on détermine les équations, dont une des racines au moins peut s'exprimer par une formule semblable à la formule de *Cardan*, qui est celle que nous avons donné pour le troisième degré (88) : car il n'y a aucune méthode connue, du moins praticable, par laquelle on puisse résoudre dans tous les cas, les équations des degrés supérieurs. Voyons d'abord qu'elles sont les équations du quatrième degré qui sont dans ce cas.

Soit $x = m + n$; donc $x^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$, ou $x^4 = m^4 + 4mn \times (m+n)^2 + n^4 - 2m^2n^2$.

A la place de $(m+n)^2$, je substitue x^2 , & en transposant tout dans le premier membre, il vient $x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2 - m^4 = 0$ *, équation dont une des racines est $x = m+n$. Dans $-n^4$

* Cette équation est résoluble par la méthode du second degré (71).

cette équation il y a une condition nécessaire, c'est qu'il ne doit y avoir aucune puissance impaire de x . Supposant de même $x = m + n$, nous aurons $x^5 = m^5 + 5 m^4 n + 10 m^3 n^2 + 10 m^2 n^3 + 5 m n^4 + n^5$, équation que j'écris ainsi $x^5 = m^5 + 5 m n (m + n)^3 + n^5$. A la place de $m + n$ substituant $= 5 m^2 n^2 (m + n)$.

x , & transposant, il vient $x^5 - 5 m n x^3 + 5 m^2 n^2 x - m^5 - n^5 = 0$, équation qui a une racine $x = m + n$. Il y a deux conditions dans cette équation, la première qu'il n'y ait aucune puissance paire de x , la seconde que le coefficient de x soit la cinquième partie du carré du coefficient de x^3 .

Faisant toujours $x = m + n$, nous aurons $x^6 = m^6 + 6 m^5 n + 15 m^4 n^2 + 20 m^3 n^3 + 15 m^2 n^4 + 6 m n^5 + n^6$. Je dispose ainsi cette équation : $x^6 = m^6 + 6 m n (m + n)^4 + n^6 - 9 m^2 n^2 (m + n)^2 + 2 m^3 n$.

En substituant x à la place de $m + n$, & transposant tout dans le premier membre, il vient $x^6 - 6 m n x^4 + 9 m^2 n^2 x^2 - 2 m^3 n - m^6 - n^6 = 0$, équation dont une racine $x = m + n$.

Dans cette équation il ne doit point y avoir de puissance impaire de x , & de plus le coefficient de x^2 doit être le quart du carré de celui de x^4 .

S'il s'agit de l'équation du septième degré, l'on trouvera

$$\begin{aligned} x^7 = m^7 + 7 m n (m + n)^5 + n^7, \\ - 14 m^2 n^2 (m + n)^3 \\ + 7 m^3 n^3 (m + n) \end{aligned}$$

substituant x à la place de $m + n$, & transposant, il vient

$$\begin{aligned} x^7 - 7 m n x^5 + 14 m^2 n^2 x^3 - 7 m^3 n^3 x - m^7 - n^7 = 0, \\ - n^7 \end{aligned}$$

équation dont une des racines $x = m + n$. Dans cette équation il ne doit y avoir aucune puissance paire de x , & de plus le septième du coefficient de x^3 élevé au carré, & multiplié par 14, doit donner le coefficient de x^5 , & ce même septième élevé au cube & multiplié par 7, doit donner le coefficient de x .

Après avoir élevé $m + n$ à la huitième puissance, & disposé l'équation comme on le voit ici

$$\begin{aligned} x^8 = & m^8 + 8 m n (m + n)^6 + n^8, \\ & - 20 m^2 n^2 (m + n)^4 \\ & + 16 m^3 n^3 (m + n)^2 \\ & - 2 m^4 n^4 \end{aligned}$$

substituez x à la place de $m + n$, & transposant tout dans le premier membre, vous aurez l'équation

$$\begin{aligned} x^8 - 8 m n x^6 + 20 m^2 n^2 x^4 - 16 m^3 n^3 x^2 + 2 m^4 n^4 = 0. \\ \quad \quad \quad - m^8 \\ \quad \quad \quad - n^8 \end{aligned}$$

Dans cette équation toutes les puissances impaires de x doivent manquer; & il est visible que le $\frac{1}{8}$ du coefficient de x^6 élevé au quarré & multiplié par 20, doit donner le coefficient de x^4 ; le cube de la même quantité, multiplié par 16, donne le coefficient de x^2 .

La même méthode donnera pour l'équation du neuvième degré, dont une des racines est $x = m + n$, l'équation que l'on voit ici :

$$\begin{aligned} x^9 - 9 m n x^7 + 27 m^2 n^2 x^5 - 30 m^3 n^3 x^3 + 9 m^4 n^4 x - m^9 = 0. \\ \quad \quad \quad - n^9 \end{aligned}$$

Toutes les équations dont nous venons de parler, ont une racine $x = m + n$.

On voit clairement que dans les équations d'un degré impair, toutes les puissances paires de x manquent; au contraire toutes les puissances impaires de x doivent s'évanouir dans les équations des degrés pairs. Si p désigne le degré de l'équation, $- m^p - n^p$ sera le dernier terme commun à toutes ces équations. De plus dans les équations paires ce dernier terme doit contenir encore la quantité $2 m^{\frac{p}{2}} n^{\frac{p}{2}}$. Les termes de ces équations, si on en excepte m^p & n^p qui ont toujours le signe $-$, ont alternativement les signes $+$ & moins; c'est pourquoi dans les équations paires $2 m^{\frac{p}{2}} n^{\frac{p}{2}}$ doit avoir le signe $+$ (nous regardons cette quantité comme le coefficient de x^0), si p est un nombre parement pair, c'est-à-dire, de cette série 4, 8, 12, 16 &c., & le signe $-$ si p est impairement pair, c'est-à-dire, de cette série 2, 6, 10, 14 &c. Dans les coefficients on trouve successivement $m n$, $m^2 n^2$, $m^3 n^3$, &c., $m n$ est toujours multiplié par l'exposant p ; & pour trouver les nombres

qui multiplie $m^2 n^2, m^3 n^3, \&c.$, je suppose $x = m + n$, & j'ai $x^2 - 2 m n - m^2 = 0$, dont une des racines $= m + n$,
 $- n^2$

& l'autre $= - m - n$; & joignant ici l'équation du troisième degré (88), je forme la table suivante.

	$m n$	$m^2 n^2$	$m^3 n^3$	$m^4 n^4$	$m^5 n^5$	$m^6 n^6$	$m^7 n^7$
II	2
III	3
IV	4	2
V	5	5
VI	6	9	2
VII	7	14	7
VIII	8	20	16	2	.	.	.
IX	9	27	30	9	.	.	.
X	10	35	50	25	2	.	.
XI	11	44	77	55	11	.	.
XII	12	54	112	105	36	2	.
XIII	13	65	156	182	91	13	.
XIV	14	77	210	294	196	49	2

Dans le premier rang horizontal je place $m n, m^2 n^2, \&c.$ La première colonne verticale en chiffres romains désigne le degré de l'équation, & les nombres situés sous $m n, m^2 n^2, \&c.$ sont les nombres cherchés, sans omettre 2, qui, dans les équations paires, doit être multiplié par $m^{\frac{p}{2}} n^{\frac{p}{2}} x^0$. On voit que la colonne qui répond à $m n$ est une progression arithmétique, dont la différence $= 1$, ainsi on pourra la continuer à volonté. Chaque nombre de la colonne $m^2 n^2$ est la somme de celui qui est au-dessus de lui dans cette même colonne, & de celui qui lui est supérieur de deux places dans la colonne de la gauche; & il en est de même pour les autres colonnes. Par cette table prolongée autant qu'on le voudra, on trouvera l'équation de chaque degré qui contient une racine $x = m + n$: je l'appellerai la *résolvable* *.

* Par ce terme on n'entend pas qu'on puisse trouver toutes les racines de l'équation proposée, nous prétendons seulement qu'on peut en trouver au moins une par la méthode présente.

Toute équation, dont les termes de rang pair manqueront, excepté le dernier, & dont les coefficients des termes existans seront proportionnels aux quantités $m n$, $m^2 n^2$, &c. multipliées par les nombres de la table ci-dessus, aura une racine semblable à la formule de *Cardan*.

Soit l'équation du quatrième degré $x^4 \pm 4 a x^2 + 2 a^2 - b = 0$. La comparant à la résoluble, je trouve $m n = \mp a$, $m^4 + n^4 = b$. Substituant dans la seconde équation la valeur de n prise de la première, il vient $m^4 + \frac{a^4}{m^4} = b$, ou en multipliant par m^4 & transposant, $m^8 - b m^4 = -a^4$, équation qui, par la méthode du second degré, donne $m^4 = \frac{b}{2} \pm$

$$\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^4\right)}; \text{ donc } m = \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}.$$

Si au lieu de substituer la valeur de n , on eût substitué celle de

$$n, \text{ on auroit trouvé } n = \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}.$$

Si l'on multiplie les valeurs de m & de n par les racines quatrièmes de l'unité trouvées ci-dessus (88), & qu'on joigne ensuite les résultats dont les produits peuvent donner $-a$, on aura celles qui conviennent, lorsque le signe supérieur a lieu, & celles dont le produit des résultats donne $+a$, ont lieu dans le cas que l'équation contient $-4a$. C'est pourquoi les racines de l'équation $x^4 \pm 4 a x^2 + 2 a^2 - b = 0$, sont $x = \pm$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$$

$$x = -\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} - \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$$

$$x = +\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) -$$

* On doit faire ici la même remarque que nous avons déjà faite à l'occasion du signe du radical quarré de l'équation du troisième degré (88).

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) \\
 x = & -\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \times \sqrt{-1} + \\
 & \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \times \sqrt{-1}; \text{ \& les raci-} \\
 \text{nes de l'équation } & x^4 + 4axx + 2a^2 - b = 0 \text{ seront} \\
 x = & +\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} - \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \\
 x = & -\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \\
 x = & +\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) + \\
 & \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1}). \\
 x = & -\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \cdot \sqrt{-1} - \\
 & \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \cdot \sqrt{-1}.
 \end{aligned}$$

Soit maintenant l'équation du cinquième degré $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - b = 0$, la comparant avec la résoluble, on a $m^5 n = a$, $m^5 + n^5 = b$. Substituant successivement dans la seconde équation la valeur de m & de n prise dans la pre-

mière, l'on trouvera $m = \sqrt[5]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$, &

$n = \sqrt[5]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$. Mais les racines cin-
quièmes

quièmes de l'unité qu'on trouve en résolvant cette équation $x^5 - 1 = 0$ *, sont 1, $\frac{-\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$, $\frac{+\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$; ainsi en multipliant

la valeur de m & celle de n par chacune de ces racines, & prenant ensuite celles dont le produit donne $+a$, l'on aura les racines cherchées; & faisant la valeur de m que nous venons de trouver $= A$, celle de $n = B$, nous trouverons les équations suivantes:

$$x = A + B$$

$$x = \frac{A[-\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}] + B[-\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}]}{4}$$

$$x = \frac{A[-\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}] + B[-\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}]}{4}$$

$$x = \frac{A[\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}] + B[\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}]}{4}$$

$$x = \frac{A[\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}] + B[\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}]}{4}$$

Par ces exemples on peut voir comment il faut s'y prendre pour les degrés supérieurs. Dans les équations impaires $x^p - pax^{p-2} + \dots - b = 0$, nous trouverons toujours une racine $x =$

$$\sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)} + \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$$

dans laquelle les signes radicaux expriment les racines qui répondent à la racine 1 de l'unité*. Dans les équations de degré pair qui

* Cette équation a une racine $x = 1$; car elle est divisible par $x - 1 = 0$, & le quotient donne une équation du quatrième degré qui fait trouver les autres racines.

* Dans une équation impaire $x^p - 1 = 0$; il y a toujours une racine $x = 1$; car en supposant $x = 1$, elle devient $= 0$. Mais si p est pair l'équation est divisible par $(x - 1)(x + 1) = 0$, ou par $x^2 - 1 = 0$, donc alors on a $x = \pm 1$.

ont le second terme négatif, comme $x^p - pax^{p-1} \&c. - b = 0$,

$$\text{on a deux racines } x = \pm \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)} \\ \pm \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$$

Si le second terme a le signe $+$, on a ces deux racines

$$x = \pm \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)} \\ \mp \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}.$$

Dans ces formules les signes supérieurs répondent à l'une des racines, & les inférieurs à l'autre.

On peut remarquer que p étant pair, $-a^p$ est toujours une quantité négative; mais p étant impair, cette quantité sera négative si a est positif, & positive si a est négatif. Pour connoître les autres racines, il faut trouver les racines du degré p de l'unité, c'est-à-dire, résoudre l'équation $x^p - 1 = 0$, multiplier par

chacune de ces racines, soit $\sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$,

soit $\sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$, & joindre ensuite celles

dont le produit $= +a$, si p est impair; mais p étant pair, on joindra celles qui donnent $-a$, si le second terme a le signe $+$, & celles qui donnent $+a$, si le second terme a le signe $-$.

DE L'INFINI.

91. Une quantité *infinie* est une quantité plus grande qu'aucune quantité donnée, c'est-à-dire, une quantité qu'on conçoit être augmentée au-delà

de toute limite assignable (en nombres). Une quantité *infinitement petite*, est une quantité plus petite qu'aucune quantité donnée, ou une quantité qu'on conçoit diminuée au-delà de toute limite assignable. La première est désignée par ∞ , la seconde par $\frac{1}{\infty}$. Si l'on multiplie ∞ par ∞ , l'on aura ∞^2 , infini du second ordre, & multipliant celui-ci par ∞ , l'on a ∞^3 , infini du troisième ordre; en général ∞^m est un infini de l'ordre m . De même $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$ est un infiniment petit du second ordre, & $\frac{1}{\infty^m}$ est un infiniment petit de l'ordre m . L'infini du premier ordre ∞ contient le fini une infinité de fois; mais il est lui-même contenu une infinité de fois dans l'infini du second ordre, & celui-ci l'est une infinité de fois dans l'infini du troisième: en général, l'infini de l'ordre m contient une infinité de fois l'infini de l'ordre $m - 1$; & est contenu autant de fois dans l'infini de l'ordre $m + 1$, & l'infini ∞^{m+n} contient l'infini m autant de fois qu'il est désigné par ∞^n , comme cela est évident en divisant ∞^{m+n} par ∞^n , ce qui se fait en ôtant l'exposant du diviseur de celui du dividende. Le fini contient l'infiniment petit du premier ordre une infinité de fois, & celui-ci contient l'infiniment petit du second ordre aussi une infinité de fois. En général, l'infiniment petit de l'ordre m contient l'infiniment petit de l'ordre $m + n$ un nombre de fois désigné par ∞^n : car en divisant $\frac{1}{\infty^m}$ par $\frac{1}{\infty^{m+n}}$, l'on aura (par la règle de la division des fractions) $\frac{\infty^{m+n}}{\infty^m} = \infty^n$.

L'infini $a \infty^m$ est à $b \infty^m$ comme $a : b$, c'est-à-dire, que deux infinis du même ordre peuvent être entr'eux comme deux quantités finies a & b .

De même $\frac{a}{\infty^m} : \frac{b}{\infty^m} :: a : b$; c'est-à-dire , que la même chose a lieu pour les infiniment petits du même ordre. Deux quantités finies , qui ne diffèrent que d'un infiniment petit , sont censées égales : car leur différence étant inassignable & plus petite qu'aucune quantité donnée , doit être censée nulle ; donc $a \pm \frac{1}{\infty} : a :: a : a$, c'est-à-dire , en raison d'égalité. De même un infiniment petit du second ordre étant infiniment plus petit que celui du premier , deux infiniment petits du premier ordre , qui ne diffèrent entr'eux que d'un infiniment petit du second ordre ou du troisième , &c. sont censés être en raison d'égalité. De même $a \infty^m : \infty^m \pm b :: a : 1 \pm \frac{b}{\infty^m}$ (en divisant par ∞^m) ; or $\frac{b}{\infty^m}$ est un infiniment petit de l'ordre m ; donc , selon ce que nous venons de dire , l'on a $a : 1 \pm \frac{b}{\infty^m} :: a : 1$, c'est-à-dire , qu'un infini est à un autre infini du même ordre (& c'est la même chose si les ordres des infiniment grands sont différents) plus ou moins une quantité finie , dans le même rapport que si cette quantité finie ne s'y trouvoit pas. Mais cela n'a pas lieu dans le rapport arithmétique ; car le rapport arithmétique de $\infty + 3 \cdot \infty$ est $= \infty + 3 - \infty = 3$, ce qu'il est bon de remarquer ; donc on ne doit négliger les quantités finies devant les infinies que quand il s'agit d'un rapport géométrique , & non arithmétique. De même dans le rapport arithmétique on ne doit pas négliger un infini devant un autre infini d'un ordre supérieur ; ainsi $\infty^3 + \infty^2 : \infty^3 :: \frac{\infty^3 + \infty^2}{\infty^3} : \frac{\infty^3}{\infty^3} :: 1 + \frac{1}{\infty} : 1 :: 1 : 1$. Mais le rapport arithmétique

de $\infty^3 + \infty^2$ à ∞^3 est $= \infty^3 + \infty^2 - \infty^3 = \infty^2$.

REMARQUE I. Il est de la nature de toute quantité, d'être susceptible d'augmentation ou de diminution; ainsi l'on ne doit pas dire que l'infini est une quantité qui a reçu tous ses accroissements finis possibles, autrement l'infini ne seroit pas une quantité. D'ailleurs nous concevons qu'une quantité quelconque deviendra plus grande, en lui ajoutant une autre quantité si petite qu'elle soit.

REMARQUE II. En regardant 0 comme une quantité infiniment petite, l'on aura $\frac{1}{0} = \infty$, & $0 = \frac{1}{\infty}$; mais on ne doit pas regarder 0 comme un pur rien, sans quoi l'on n'auroit pas $\frac{1}{0} = \infty$, comme le prétend M. Euler. En effet, puisque pour avoir un quotient, il faut une quantité qu'on appelle *le dividende*, qui contienne une quantité qu'on nomme *le diviseur*, & que ces quantités soient de même nature, il est évident que le quotient de 1 divisé par 0 n'est pas une quantité, parce que 0 n'est pas une quantité. Voyez ce que nous avons dit sur cette matière dans la seconde édition de nos Institutions Mathématiques.

Des Séries. ou Suites.

92. On entend par *série*, une suite de termes qui croissent ou décroissent selon une certaine loi (nous ne parlons pas ici des suites dont les termes ne suivent aucune loi): telles sont *les progressions géométriques & arithmétiques, les suites des nombres figurés.*

Nombres figurés.	{	Constans ou du premier ordre,	1, 1, 1, 1, 1 &c.
		Naturels ou du second ordre,	1, 2, 3, 4, 5 &c.
		Triangulaires ou du troisième ordre,	1, 3, 6, 10, 15 &c.
		Piramidaux ou du quatrième ordre,	1, 4, 10, 20, 35 &c.
		Trianguli-Piramidaux ou du cinquième ordre,	1, 5, 15, 35, 70 &c.
		&c.	T ₃

La loi de chacune de ces suites des nombres figurés, est que chacun de leurs termes soit la somme des termes correspondans de la précédente; ainsi le troisième terme 6' de la troisième suite est la somme des trois premiers de la seconde.

Les nombres *polygones* sont formés par la somme des termes consécutifs d'une progression arithmétique, & ces nombres s'appellent *triangulaires*, *quarrés*, *pentagones*, &c. selon que la différence de la progression est 1, ou 2, ou 3, &c.

Progressions Arithmétiques.

1, 2, 3, 4, &c.	Différences	1
1, 3, 5, 7, &c.		2
1, 4, 7, 10, &c.		3
1, 5, 9, 13, &c.		4
&c.		

Nombres Polygones.

1, 3, 6, 10, &c.	Triangulaires*.
1, 4, 9, 16, &c.	Quarrés.
1, 5, 12, 22, &c.	Pentagones.
1, 6, 15, 28, &c.	Exagones.
&c.	

En examinant avec un peu d'attention les nombres figurés, il est visible qu'en désignant par n le

* Les nombres triangulaires ont cette propriété qu'on peut disposer en triangle autant de points qu'ils contiennent d'unités, en prenant un point pour le plus petit triangle; de même les points indiqués par les nombres quarrés peuvent être disposés en quarré, en prenant un point pour le plus petit quarré, &c. On pourra mieux comprendre cela, quand on aura vu dans la Géométrie ce que c'est qu'un triangle, un quarré, &c.

1

1 3

1 4 9

1 6 15 28

• •• ••• &c.

• • •• ••• &c.

• •• ••• •••• &c.

• •• ••• •••• ••••• &c.

rang du nombre naturel, ce nombre sera $= n$; ainsi le nombre naturel du cinquième rang est 5. On trouvera aussi que le nombre triangulaire du rang n est $= \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$. S'il s'agit du nombre triangulaire du

rang 4, on aura $n = 4$, & ce nombre sera $=$

$$\frac{4 \cdot (4 + 1)}{2} = \frac{4 \cdot (5)}{2} = \frac{20}{2} = 10. \text{ Le nombre pyra-}$$

midal du rang n est $= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{2 \cdot 3}$. Le nom-

bre figuré du cinquième ordre du rang n est $= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Le nombre figuré du

fixième ordre est $= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) \cdot (n + 4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$,

& ainsi de suite.

A l'égard des nombres polygones, si n indique le rang du nombre, on aura le nombre triangulaire $= \frac{n n + n}{2} = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$.

$$\text{Le quarré} = \frac{2 n n}{2} = n n.$$

$$\text{Le pentagone ou V gone} = \frac{n \cdot (3 n - 1)}{2}.$$

$$\text{L'exagone ou VI gone} = \frac{n \cdot (4 n - 2)}{2}.$$

$$\text{Le VII gone} = \frac{n \cdot (5 n - 3)}{2}.$$

$$\text{Le VIII gone} = \frac{n \cdot (6 n - 4)}{2}.$$

$$\text{Le IX gone} = \frac{n \cdot (7 n - 5)}{2}.$$

$$\text{Le X gone} = \frac{n(8n-6)}{2} = n(4n-3).$$

$$\text{Le XI gone} = \frac{n(9n-7)}{2}.$$

$$\text{Le XII gone} = \frac{n(10n-8)}{2} = n(5n-4).$$

$$\text{Le XX gone} = \frac{n(18n-16)}{2} = n(9n-8).$$

$$\text{Et en général le } m \text{ gone} = \frac{(m-2) \cdot nn - (m-4) \cdot n}{2}.$$

Nous appellerons *côté* le nombre n ou le rang du nombre polygone ; & nous dirons aussi que le nombre m gone de n ou du côté n est $=$

$$\frac{(m-2) \cdot nn - (m-4) \cdot n}{2}.$$

PROBLÈME. On demande à un Financier combien lui coûte une terre qu'il vient d'acheter : il répond que le nombre 365 gone de 12 est le nombre de louis qu'elle lui coûte. Pour trouver ce nombre, on supposera $m = 365$ & $n = 12$, & substituant ces valeurs dans la formule générale, on trouvera que la terre a été achetée 23970 louis.

Nous venons de voir comment on doit déterminer les nombres polygones, en désignant par n le côté du polygone ; donc si on désignoit ce côté, qu'on appelle aussi *une racine*, par x , il suffiroit d'écrire x au lieu de n dans les formules ci-dessus ; de sorte que l'on auroit le nombre m gone $=$

$$\frac{(m-2)xx - (m-4) \cdot x}{2}.$$

Si connoissant le nombre m gone, on demande la racine, ou le côté, on aura besoin de résoudre

une équation du second degré. Supposons qu'on cherche la racine ou le côté x du nombre triangulaire 91. En substituant x à la place de n , nous

aurons $\frac{xx+x}{2} = 91$, ou $xx+x=182$, &

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{729}{4}} = 13.$$

Soit a un nombre m gone donné, dont il s'agit de déterminer la racine, on aura l'équation

$$\frac{(m-2) \cdot xx - (m-4)x}{2} = a, \text{ ou } (m-2)xx -$$

$(m-4) \cdot x = 2a$, équation qui étant résolue par la méthode du second degré, donne $x =$

$$\frac{m-4 + \sqrt{[8(m-2)a + (m-4)^2]}}{2 \cdot (m-2)}.$$

Si l'on demandoit de trouver un nombre triangulaire qui fût en même temps un quarré, en dési-

gnant ce quarré par $\frac{pp}{4qq} \cdot xx$, nous aurions $\frac{xx+x}{2}$

$$= \frac{ppxx}{4qq}, \quad xx+x = \frac{ppxx}{2qq}, \quad 2qqx + 2qq$$

$$= ppx, \quad \& \quad x = \frac{2qq}{pp-2qq}.$$

Substituant donc dans cette formule des nombres quelconques à la place de q & de p , pourvu qu'il en résulte un nombre entier positif pour x (car nous supposons que les nombres trigonaux sont entiers & positifs), le problème sera résolu. Si $p=3$ & $q=2$, on aura $x=8$, dont le nombre triangulaire qui est 36 est en même temps un quarré. Si nous supposons $p=17$, & $q=12$, nous trouverons $x=288$ & le nom-

bre trigonal $\frac{x(x+1)}{2}$ sera $= 144 \times 289$, dont la racine est $= 12 \times 17 = 204$.

Mais si étant donné un nombre quelconque x , on appelle son nombre trigonal $\frac{x(x+1)}{2}$; en prenant le nom de nombre trigonal dans ce sens, x pourra être un nombre quelconque positif ou négatif, entier ou bien fractionnaire. Si nous faisons $p = 7$ & $q = 5$, nous aurons $x = -50$, dont le triangle 1225 est en temps celui de $+49$ & le quarré de 35. Si $p = 3$ & $q = 1$, on aura $x = \frac{1}{7}$, & le nombre trigonal $\frac{x(x+1)}{2}$ est $= \frac{1}{49}$, quarré de $\frac{1}{7}$.

Les *suites des puissances des nombres* sont celles des quarrés, cubes, &c. de la progression des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. On appelle *progression harmonique*, la suite des quotients d'un même nombre divisé par les termes consécutifs d'une progression arithmétique : telle est la série $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \&c.$ *.

On appelle *séries du premier ordre*, celles dont les premières différences sont constantes : telles sont les progressions arithmétiques. Les *séries du second ordre* sont celles dont les secondes différences sont constantes : celles du troisième, quatrième, &c. ordre sont celles dont les troisièmes, quatrièmes, &c. différences sont constantes. Les séries

* Parce que si on prend trois termes consécutifs dans une telle suite, ils sont en proportion harmonique.

dans lesquelles on peut arriver à des différences constantes , sont appelées *algébriques*. Si l'on multiplie les termes d'une série algébrique , par les termes correspondants d'une série géométrique (c'est-à-dire , le premier de l'une par le premier de l'autre , le second par le second , &c.) , l'on a une série *algébrique-géométrique*. Les *séries récurrentes* sont celles dans lesquelles chaque terme est déterminé par un certain nombre de termes précédents multipliés par des constantes. On les appelle *récurrentes du premier , du second , du troisième , &c. ordre* , selon que , pour avoir un terme , on a besoin d'un seul terme précédent , ou de deux , ou de trois , &c. Ainsi la série 1 , 1 , 3 , 7 , 17 , &c. est récurrente du second ordre , parce que chaque terme , à compter du troisième , est égal à la somme des deux précédens multipliés le premier par 1 , & l'autre (c'est celui qui précède immédiatement le terme cherché) par 2 *.

Cherchons maintenant la somme des puissances des nombres naturels 1 , 2 , 3 , 4 , 5 . . . ∞.

93. LEMME. Dans une progression arithmétique \div a. b. c. e. &c. dont la différence = 1 , en premier lieu le quarré d'un terme , quelconque est égal au quarré du premier terme , plus au double de la somme des termes précédents , plus au nombre des termes précédents. En second lieu le cube d'un terme quelconque est égal à la somme faite , 1^o du cube du premier terme , 2^o du triple de la somme des quarrés

* Pour former une suite récurrente du second ordre , ayant pris les deux premiers termes à volonté , on multipliera le premier par a & le second par b , la somme des produits donnera le troisième. Multipliant le second par a & le troisième par b , la somme des produits donnera le quatrième ; & ainsi de suite.

des termes précédents, 3^o du triple de la somme des termes précédents, & enfin du nombre des termes précédents. Car la progression $\div a \cdot b \cdot c \cdot \&c.$ est $\div a \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot \&c.$; donc $c = b + 1$, $c^2 = b^2 + 2b + 1$; & parce que $b = a + 1$, l'on a $b^2 = a^2 + 2a + 1$; donc en substituant, $c^2 = a^2 + 2b + 1$; donc 1^o, &c. de même

$$+ 2a + 1$$

$c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$, $b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; donc en substituant cette valeur de b^3 dans l'équation précédente, l'on aura

$$c^3 = a^3 + 3b^2 + 3b + 1; \text{ donc } 2^{\circ}, \&c.$$

$$+ 3a^2 + 3a + 1$$

94. THÉOREME. 1^o. La somme de la progression 1, 1, 1, &c. à l'infini est $= \infty$. 2^o. La somme S des nombres naturels continuée à l'infini 1, 2, 3, 4, 5... ∞

est $= \frac{\infty^2}{2}$. 3^o. La somme p des quarrés 1, 4, 9,

16, 25... ∞^2 des nombres naturels est un infiniment

grand du troisième ordre, c'est-à-dire, $p = \frac{\infty^3}{3}$. La

premiere partie du théorème est évidente; car l'unité prise une infinité de fois, donne une quantité plus grande qu'aucune quantité assignable. La seconde partie se démontre facilement: car par le lemme précédent, le quarré du terme ∞ est $\infty^2 = 1$ (quarré du premier terme) $+ 2S - 2\infty$ (c'est-à-dire, plus le double de la somme des termes précédents, laquelle somme $= S - \infty$) $+ \infty - 1$ (nombre des termes précédents); donc réduisant & transposant, $\infty^2 + \infty = 2S$, ou (selon le n^o. 91)

$\infty^2 = 2S$, ou $S = \frac{\infty^2}{2}$, en négligeant ∞ qui dis-
 paroît devant ∞^2 . Pour démontrer la troisième par-
 tie, je remarque que par le lemme précédent, ∞' est
 $= 1$ (cube du premier terme) $+ 3p - 3\infty^2$ (triple
 de la somme des quarrés des termes précédents)
 $+ 3 \times \left(\frac{\infty^2}{2} - \infty \right)$ (triple de la somme des termes
 précédents) $+ \infty - 1$ (nombre des termes précé-
 dents); donc réduisant & transposant, $\infty' + 3\infty^2$
 $- 3\frac{\infty^2}{2} + 2\infty = 3p$; donc (en négligeant les
 infinis des ordres inférieurs (91)) $\infty' = 3p$, & p
 $= \frac{\infty^3}{3}$; donc, &c. En général la somme des puis-
 sances m des nombres naturels 1, 2, 3 à l'infini
 est $= \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$.

95. Dans la suite la lettre x désignera le nombre des ter-
 mes. Le *terme général* d'une suite (nous le désignerons par T)
 est une fonction de x , dans laquelle, si on substitue succes-
 sivement à la place de x les nombres 1, 2, 3, &c., on ob-
 tiendra tous les termes de la série. Ainsi la série 1, 7, 13,
 19, 25, 31, 37, &c. a pour terme général $6x - 5$. Si
 dans ce terme général nous substituons 3, *par exemple*, au
 lieu de x , nous aurons le troisième terme 13. Le *terme som-*
matoire S d'une série est une fonction de x , dans laquelle,
 si à la place de x on substitue un nombre entier positif,
 on aura la somme d'autant de termes que ce nombre con-
 tient d'unités. Le terme sommatoire de la série, dont nous
 venons de parler, étant $3x^2 - 2x$, si on substitue 7 à la
 place de x , on aura 133, somme des 7 premiers termes de
 la série. En supposant la série continuée à l'infini, la somme
 devient $S = 3\infty^2 - 2\infty = 3\infty^2$ (91). Il seroit à sou-
 haiter qu'étant donné le terme général d'une série, on pût

trouver le terme sommatoire correspondant : mais il y a peu d'apparence que ce problème général soit jamais résolu ; c'est pourquoi il est à propos de chercher des formules générales par lesquelles on puisse déterminer la somme de plusieurs séries par leur terme général.

96. THEOREME. Dans une série quelconque le terme général est égal à la somme de tous les termes jusqu'à x inclusivement, moins la somme de tous les termes jusqu'à $x - 1$ inclusivement. La chose est évidente ; car ce qui reste doit être égal au terme du rang x . De ce théorème si simple, il suit qu'en appelant S la somme de tous les termes pris jusqu'à x , & S' celle de tous les termes pris jusqu'à $x - 1$ inclusivement, on aura le terme général $T = S - S'$ *, mais il faut pour cela que S exprime la vraie somme, ce qu'on connoîtra si en faisant $x = 1$, on trouve $S = T$. Si alors $S = T - a$ **, T sera $= S + a$ (vraie somme) ; au contraire il faudra ôter a de S si T est plus petit que S , c'est-à-dire, si $T + a = S$, & l'on aura $T = S - a$ (vraie somme) ; ainsi quoique $\frac{6x-3}{2} = \frac{3x^2-1}{2} - \left(\frac{3 \cdot (x-1)^2-1}{2} \right)$,

cependant la série dont le terme général est $\frac{6x-3}{2}$ n'a pas pour terme sommatoire $\frac{3x^2-1}{2}$, qui, en faisant $x = 1$, devient $\frac{1}{2} = 1$, tandis que le terme général $\frac{6x-3}{2}$, devient $\frac{1}{2}$, donc le terme général surpasse alors S de $\frac{1}{2}$; donc $S + a = S + \frac{1}{2} = \frac{3x^2-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3x^2}{2}$, véritable terme sommatoire de la série dont le terme général est $T = \frac{6x-3}{2}$.

Mais il faut bien remarquer que $T = S - S'$ exprime deux séries, dont le terme général de l'une $= S$, & celui

* On voit bien que pour avoir T , il faut avoir S ou la somme des termes exprimée par une fonction de x , autrement T ne seroit pas exprimé par une fonction de x .

** a est une quantité constante.

de l'autre $= S'$. En formant ces deux séries on verra que le premier terme de la première détruit le second de la seconde, le second de la première, le troisième de la seconde, &c. & alors comme il ne reste rien que la différence du dernier de la première au premier de la seconde, la méthode de trouver

T exposée ci-dessus devient inutile. Soit $S = \frac{x}{2+x}$, alors

$$S' = \frac{x-1}{1+x}, \text{ \& } T = S - S' = \frac{x}{2+x} - \left(\frac{x-1}{1+x} \right).$$

En formant les séries dont S & S' sont les termes généraux & retranchant celle qui répond à S', de celle qui répond à S,

$$\text{Pona } T = S - S' = \frac{x}{2+x} - \left(\frac{x-1}{1+x} \right) = \frac{x}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (S) \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots + \frac{x-1}{1+x}, \frac{x}{2+x} \\ -(S') \frac{0}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{4}, \dots - \left(\frac{x-1}{1+x} \right) \end{array} \right\} = \frac{x}{2+x} - \frac{0}{1} = \frac{x}{2+x},$$

c'est-à-dire, qu'après avoir retranché les termes de la série S' (si ces termes n'étoient pas retranchés, ils auroient le signe +) de ceux de la série S, il reste le terme général de la série S, ce qui ne donne rien à connoître. Ainsi la méthode du théorème ne peut réussir, tandis que le terme général aura la forme dont nous venons de parler. Il faut donc tâcher de donner une autre forme à $T = S - S'$.

Si on réduit au même dénominateur la valeur de $T = S - S'$

$$= \frac{x}{2+x} - \left(\frac{x-1}{1+x} \right), \text{ on aura } S - S' = \frac{2}{(1+x) \cdot (2+x)}$$

$= T$, & la série correspondante sera $\frac{2}{1 \cdot 2}, \frac{2}{2 \cdot 3}, \frac{2}{3 \cdot 4}, \frac{2}{4 \cdot 5}, \&c.$

dont le terme sommatoire sera $\frac{x}{2+x}$. Si $x = \infty$, le terme

sommatoire S de cette série deviendra $S = \frac{\infty}{\infty} = 1$.

97. Pour faire l'application de ce que nous venons de dire, cherchons quelles sont les séries dont le terme sommatoire contient x dans tous les termes. Qu'on demande, par exemple,

quelle est la série dont le terme sommatoire est $= ax$, a étant une quantité constante. Ecrivant $x = 1$ au lieu de x , j'ai $S' = ax - a$, & $T = S - S' = a$; donc tous les termes sont égaux à a , & la série est a, a, a, a , dont la somme $S = ax^*$.

Je cherche ensuite quelles sont les séries pour lesquelles on a $S = ax + bx^2$. Substituant $x = 1$ au lieu de x , je trouve $S' = ax - a + bx^2 - 2bx + b$, & $S - S' = T = (a - b + 2bx)$. De ce terme général je forme les deux séries $a, a, a, a, \&c.$ L'une de ces séries est la suite $b, 3b, 5b, 7b, \&c.$

des quantités égales, la seconde est une progression arithmétique, dont les termes croissent comme les nombres impairs $1, 3, 5, 7, \&c.$ Et enfin la série qui résulte de ces deux séries, ajoutées terme à terme, est une progression arithmétique, dont la différence est $= 2b$. Donc si le terme général d'une série contient seulement x linéaire, c'est-à-dire, x élevé à la première puissance, on déterminera facilement le terme sommatoire S , en faisant $= a - b$ le terme qui ne contient pas x , & le coefficient de $x = 2b$. Par exemple, supposant $T = 15 + 3x$, je fais $15 = a - b$, & $3 = 2b$; donc $b = \frac{3}{2}$ & $a = 15 + \frac{3}{2} = \frac{33}{2}$; ainsi $S = ax + bx^2 = \frac{33x}{2} + \frac{3x^2}{2}$.

98. Si l'on a une série telle que $3, 7, 11, \&c.$ dont les premières différences soient constantes, on trouvera facilement le terme T & le terme S . Car supposant le premier terme 3 de cette série $= (a - b + 2bx)$ en faisant $x = 1$; supposant ensuite le second terme $7 = (a - b + 2bx)$, en faisant $x = 2$, l'on aura $3 = a + b$, & $7 = a + 3b$. Retranchant la première équation de la seconde, il vient $7 - 3$ ou $4 = 2b$, & $b = 2$. Substituant cette valeur de b dans la première, l'on trouve $a = 1$; donc $T = S - S' = (a - b + 2bx) = 1 + 4x$, & $S = ax + bx^2 = x + 2x^2$.

Si l'on suppose $S = ax + bx^2 + cx^3$; en substituant $x = 1$ au lieu de x , S se changera en S' , & l'on aura

* C'est-à-dire, si x est $= 5$, par exemple, la somme des 5 premiers termes sera $5a$, ce qui est évident.

$$T = S - S' = \left(\begin{array}{l} -b + 2bx \\ +c \\ -3bx \\ +3xx^2 \end{array} \right). \text{ De ce terme gé-} \\ \text{néral je forme une}$$

série que je divise en trois ;
la première est composée de
termes égaux ; la seconde est
celle des quantités qui suivent la progression des nombres
impairs 1, 3, 5, 7, &c. ; la troisième est une série, dont
les secondes différences sont constantes & égales à 6c, laquelle
propriété convient nécessairement à la série totale qui résulte
de ces trois ajoutées terme à terme.

a, a, a, a, &c.
b, 3b, 5b, 7b, &c.
c, 7c, 19c, 37c, &c.

De là il suit qu'étant donné le terme général $T = 1 - x + x^2$ pour trouver le terme sommatoire S de la série à laquelle appartient ce terme général, il faut faire $1 = a - b + c$, $-1 = 2b - 3c$, $1 = 3c^*$. De la dernière équation l'on tire $c = \frac{1}{3}$. Substituant cette valeur dans les deux autres, l'on a $1 = a - b + \frac{1}{3}$, $-1 = 2b - 1$. La dernière donne $b = 0$; donc en substituant, l'on a $1 = a - b + \frac{1}{3} = a - 0 + \frac{1}{3}$, ou $a = \frac{2}{3}$. Substituant les valeurs de a, b, c dans la valeur générale de S, l'on a $S = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^3$, terme sommatoire de la série, dont le terme général est $T = (1 - x + x^2)$.

COROLLAIRE. Il suit de-là qu'on peut facilement déterminer soit S, soit T dans une série dont les différences secondes sont constantes. Car par la comparaison de trois termes on pourra connoître a, b, c ; qui feront connoître T & S. Soit la série 9, 13, 21, 33, 49, &c. dont les secondes différences sont constantes & égales à 4. Comparant le premier terme 9 avec le terme général dans la supposition de $x = 1$, le second terme 13 avec le même terme général dans la supposition de $x = 2$, & enfin le troisième terme 21 avec le terme général dans la supposition de $x = 3$, on trouvera trois équations, que j'appellerai *du premier ordre*. Otant la première de la seconde, & celle-ci de la troisième, l'on aura deux équations *du second ordre* : Otant enfin la première des secondes de la seconde, l'on a une équation que j'appelle *du troisième ordre*.

* C'est-à-dire qu'il faut égalet les quantités constantes qui se trouvent dans le terme général donné, & dans la formule du terme général : donnée ci dessus ; l'on égale de même les coefficients d'une même puissance de x.

<i>Equations du premier ordre.</i>	<i>Equations du second ordre.</i>	<i>Equations du troisième ordre.</i>
$9 = a + b + c$	$4 = 2b + 6c$	
$13 = a + 3b + 7c$	$8 = 2b + 12c$	$4 = 6c$
$21 = a + 5b + 19c$		

De l'équation $4 = 6c$, l'on tire $c = \frac{2}{3}$. Cette valeur de c substituée dans la première du second ordre, donne $b = 0$; substituant les valeurs de c & de b dans la première du premier ordre, l'on a l'équation $a = 8 + \frac{2}{3}$; donc $T = 9 + 2x + 2x^2$, & $S = (8 + \frac{2}{3})x + \frac{2}{3}x^3$.

On trouvera de même que le terme sommatoire S étant $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$, le terme général sera

$$S - S' = T = \begin{pmatrix} a \\ -b + 2bx \\ +c - 3cx + 3cx^2 \\ -d + 4dx - 6dx^2 + 4dx^3 \end{pmatrix}.$$

De ce terme général l'on pourra former une série, dont les troisièmes différences seront constantes. Par la même méthode, si $S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + fx^5$, on aura

$$T = \begin{pmatrix} a \\ -b + 2bx \\ +c - 3cx + 3cx^2 \\ -d + 4dx - 6dx^2 + 4dx^3 \\ +f - 5fx + 10fx^2 - 10fx^3 + 5fx^4 \end{pmatrix}.$$

De ce terme général on peut former une série dont les quatrièmes différences soient constantes.

COROLLAIRE II. De ce que nous venons de dire, il suit 1°. qu'une série, dont les différences de l'ordre m sont constantes, a pour terme général une formule *, dans laquelle x est élevé à la puissance m , & pour terme sommatoire une formule

* Cette formule est $T = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots + px^m$. En faisant $= a$ toutes les quantités constantes, toutes les quantités qui multiplient x étant b , &c.

dans laquelle x a l'exposant $m+1$, & de plus tous les termes de S sont affectés de quelque puissance de x . 2°. Que pour trouver le terme T d'une série, dont les différences d'un ordre quelconque sont constantes, il suffit, ayant fait successivement $x = 1, 2, 3, 4, \&c.$, de comparer autant de premiers termes de la série qu'il y a d'unités dans $m+1$ (si la série est de l'ordre m *) avec la formule générale qui convient à cette série, d'où l'on tirera les équations nécessaires pour déterminer $a, b, c, \&c.$

Exemple. La série 2, 9, 24, 50, 90, &c. ayant ses troisièmes différences constantes, je prends la formule du troisième degré $a + bx + cx^2 + dx^3$. Faisant successivement $x = 1, 2, 3, 4$, j'ai quatre équations du premier ordre.

Equations du premier ordre.	Equations du second ordre.
$a + b + c + d = 2$	$b + 3c + 7d = 7$
$a + 2b + 4c + 8d = 9$	$b + 5c + 19d = 15$
$a + 3b + 9c + 27d = 24$	$b + 7c + 37d = 26$
$a + 4b + 16c + 64d = 50$	

Equations du troisième ordre.	Equation du quatrième ordre.
$2c + 12d = 8$	
$2c + 18d = 11$	$6d = 3$

Retranchant la première équation du premier ordre de la seconde, celle-ci de la troisième, &c. j'ai les équations du second ordre qui, en retranchant la première de la seconde, & celle-ci de la troisième, donnent les équations du troisième ordre. Retranchant la première du troisième ordre de la seconde, j'ai l'équation du quatrième ordre $6d = 3$, d'où je tire $d = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Substituant cette valeur de d dans la première du troisième ordre, l'on trouve $c = 1$. Substituant ces valeurs de d & de c dans la première du second ordre, l'on a $b = \frac{1}{2}$. Substituant ces valeurs de b, c, d dans la première du premier ordre, l'on trouve $a = 0$; donc $T = a + bx + cx^2 + dx^3 = \frac{1}{2}x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$. Je suppose $S = Ax + Bx^2$

* C'est-à-dire si les différences de l'ordre m sont constantes.

$+Cx^3 + Dx^4$. Dont le terme général est

$$S - S' = T = \begin{pmatrix} A \\ -B + 2Bx \\ +C - 3Cx + 3Cx^2 \\ -D + 4Dx - 6Dx^2 + 4Dx^3 \end{pmatrix}$$

La comparaison des termes donne les équations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A - B + C - D = 0 & \text{d'où l'on tire } D = \frac{1}{12}, C = \frac{7}{12}, \\ 2B - 3C + 4D = \frac{1}{2} & B = \frac{7}{8}, A = \frac{1}{12}. \\ 3C - 6D = 1 & \text{Substituant} \\ 4D = \frac{1}{3} & \text{ces valeurs dans } S, \text{ on a } S = \end{array}$$

$\frac{1}{12}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{7}{12}x^3 + \frac{1}{12}x^4$.
On voit par-là qu'on peut toujours déterminer S & T dans une série, dans laquelle on peut parvenir à des différences constantes.

99. Venons aux séries dans lesquelles S est une fraction dont les deux termes sont affectés d'une même puissance de x .

Soit $S = \frac{fx}{a + bx}$. Ecrivant $x = 1$ au lieu de x , l'on a S' , &

retranchant S' de S , il vient $S - S' = T = \frac{fx}{a + bx} -$

$$\left(\frac{fx - f}{a + b(x-1)} \right) = \frac{af}{[a + b(x-1)](a + bx)}, \text{ en ré-}$$

duisant les fractions au même dénominateur. Si de ce terme général on forme une série, son terme sommatoire sera $S =$

$\frac{fx}{a + bx}$. Mais la série que donne le terme général que nous

venons de trouver, est $\frac{af}{a(a+b)} + \frac{af}{(a+b)(a+2b)} +$

$\frac{af}{(a+2b)(a+3b)} + \dots$. Or il est visible que les divi-

seurs forment les deux séries que l'on voit ici.

$a, a+b, a+2b, a+3b, \dots$ dans lesquelles le premier ter-

me de la seconde est égal au second de la première, le second

de la seconde au troisième de la première, & le dernier de

de la première à l'avant dernier de la seconde. La différence

dans les deux séries est $= b$. Si dans S on fait $x = \infty$, l'on

aura $S = \frac{f}{b}$. Soit la série $\frac{6}{1 \cdot 2}, \frac{6}{2 \cdot 3}, \frac{6}{3 \cdot 4}, \frac{6}{4 \cdot 5}, \dots$ le

numérateur de ces fractions étant constant, & les séries 2, 7, 12, 17 &c. que forment les diviseurs étant les mêmes, excepté que l'une commence au second terme de l'autre, il est facile de voir qu'elle appartient à notre formule générale. La comparaison fait voir que $b = 5$ & $a = 2$. Pour trouver f comme l'on a l'équation $af = 6$, ou (à cause de $a = 2$) $2f = 6$, il est visible que $f = \frac{6}{2} = 3$; donc

$$S = \frac{fx}{a + bx} = \frac{3x}{2 + 5x}; \text{ \& à l'infini } S = \frac{1}{5}.$$

Soit maintenant $S = \frac{fx + mx^2}{[1 + b(x-1)] \cdot (a + bx)}$. Substituant $x = 1$ à la place de x , l'on aura S' , & $S - S' =$

$$\begin{aligned} & \frac{af - bf'x}{-am - bmx} \\ & \quad + 2amx \end{aligned}$$

$T = \frac{fx + mx^2}{[1 + b(x-1)] \cdot (a + bx)}$. Dans cette formule le numérateur est le terme général d'une série du premier ordre, pourvu que le coefficient de x ne soit pas $= 0$: car dans ce cas le numérateur seroit le terme général d'une suite de quantités égales. Les facteurs du diviseur représentent chacun une série du premier ordre & de plus la même, avec cette différence que la seconde commence au second terme de la première, & la troisième au troisième terme de la première.

Soit la série $\frac{4}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}, \frac{7}{1 \cdot 4 \cdot 5}, \frac{10}{4 \cdot 5 \cdot 6}, \frac{13}{5 \cdot 6 \cdot 7}, \text{ \&c.}$ Le terme général de la série des numérateurs est $T = 1 + 3x$; & les séries des deux premiers facteurs du dénominateur sont dans le cas dont nous venons de parler. Le terme général de la série que forment les troisièmes facteurs est $a + bx = 3 + x$; de sorte que $a = 3, b = 1$. Substituant ces valeurs de a & de b dans le terme général qui convient à notre série, on en déduira $3f + 3m = 1$, $-f - m + 6m = 3$; d'où l'on tirera $m = \frac{1}{2}$, $f = \frac{7}{2}$; donc

$$S = \frac{7x + \frac{1}{2}x^2}{2 \cdot 3 \cdot (2 + x) \cdot (3 + x)}, \text{ \& } S = \frac{1}{6}, \text{ en faisant } x = \infty.$$

Si le numérateur du terme général T étoit divisible par un des facteurs extrêmes, la division étant faite, il appartiendrait à l'avant dernière formule. Mais si le facteur moyen manquoit, il faudroit multiplier le numérateur & le dénominateur par ce

facteur, afin que le terme général pût se trouver dans le cas de la formule que nous venons de trouver.

Soit maintenant $S = \frac{f x + m x^2 + n x^3}{[1+b(x-2)][1+b(x-1)] \cdot (a+bx)}$.

On trouvera de même le terme T correspondant, dont les facteurs du dénominateur seront des termes généraux de quatre séries qui ne seront qu'une & même série, avec cette différence que la seconde aura pour premier terme le second de la première, la troisième le 3^e, & la quatrième le 4^e; & x ne montera qu'au second degré dans le numérateur de T; si quelque facteur manque dans le dénominateur, du terme général, on multipliera les deux termes de la fraction par le facteur qui manque, &c. *

100. Passons aux séries dans lesquelles le terme sommatoire renferme une quantité constante multipliée par une quantité exponentielle **. Soit $S = a l^x - a$. Substituant $x = 1$ au lieu de x, on a $S' = a l^{x-1} - a = \frac{a l^x - l a}{l}$; donc $S - S' =$

$$T = \frac{a(l-1)l^x}{l}. \text{ Si l'on suppose } x = 1, \text{ l'on aura } S$$

$= T$. Il est aisé de voir que le terme T désigne une progression métrique, dont par conséquent on peut toujours trouver la somme S. Si $l > 1$, la série est croissante; & faisant $x = \infty$, S sera aussi infinie. Si $l = 1$, alors, $T = 0$ & $S = 0$; si $l < 1$, la série est décroissante, & alors supposant $x = \infty$, on auroit $a l^\infty - a$, quantité négative. Pour rendre S positive, il faut supposer $S = a - a l^x$, & $T = \frac{a(1-l)l^x}{l}$; & alors en supposant $x = \infty$, l'on a $S = a$.

Soit maintenant $S = (a + b x) \cdot l^x - a$. On trouvera $S - S' = T = \frac{[1(l-1) + b + b x \cdot (l-1)] \cdot l^x}{l}$. Si $l < 1$, il

* Si le plus grand exposant de x dans le numérateur de T n'étoit pas plus petit de deux unités que le nombre des facteurs du dénominateur, on verroit si l'on peut le rendre tel par la division, & l'on chercheroit à part le terme S du quotient, qu'on joindroit avec le terme S de la fraction, la somme donneroit le terme sommatoire cherché.

** Une quantité exponentielle est une quantité affectée d'un exposant variable, comme a^x qui devient a^2 , en supposant $x = 2$, & a^3 en faisant $x = 3$.

faut changer tous les signes, soit dans T, soit dans S, afin d'éviter les quantités négatives.

De même si $S = (a + bx + cx^2) \cdot l^x - a$, T sera

$$\begin{pmatrix} -a & -bx & -cx^2 \\ +b & +2cx & -cx^2 \\ -c & & \end{pmatrix}$$

$\times l^x$. Si $l < 1$, on chan-

gera les signes dans S & dans T. On voit par-là qu'une série dont la somme est exprimée par une formule algébrique, multipliée par une quantité exponentielle, & dont on ôte une constante, a pour terme général une formule algébrique du même degré, & multipliée par la même exponentielle.

Supposons le terme général d'une série $= (1 + x + x^2) \cdot (2^x)$. Je fais $S = (a + bx + cx^2) \cdot 2^x - a$. Substituant $x = 1$ à la place de x , pour avoir S' , l'on aura $S - S' = T$

$$\begin{pmatrix} -a & -bx & -cx^2 \\ +b & -bx & -cx^2 \\ -c & +2cx & -cx^2 \end{pmatrix}$$

$\cdot 2^x$. La comparaison me don-

$$ne a + \frac{-a + b - c}{2} = 1, b - \frac{b + 2c}{2} = 1, c - \frac{c}{2} = 1,$$

donc $c = 2$, $b = -2$, $a = 6$; donc $S = (6 - 2x + 2x^2) \times$

$$2^x - 6. \text{ Si l'on avoit } T = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right);$$

parce que la quantité exponentielle est plus petite que l'unité, je

supposerois $S = a - \left((a + bx + cx^2) \times \frac{1}{2^x}\right)$. Ensuite je

trouverois facilement S' , & $S - S' = T$, & par comparai-

$$son les valeurs de a , b , c , d'où je tirerois $S = \frac{1}{2} - \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2\right) \cdot \frac{1}{2^x}\right) = \frac{1}{2}$, en faisant $x = \infty$.$$

Les séries qui sont représentées par les termes généraux de la forme dont nous venons de parler, sont algébrico-géométriques.

De ce que nous avons dit jusqu'ici, il suit qu'on peut trouver la somme d'une série quelconque qui résulte de l'addition ou de la soustraction des séries, soit géométriques, soit algébrico-géométriques : car on peut trouver le terme général de chacune des séries qu'on ajoute ou qu'on soustrait, & le

terme général de la somme ou de la différence, sera égal à la somme ou à la différence des termes généraux de ces séries, ce qu'on doit entendre de même du terme sommatoire. Mais il n'est pas facile de connoître si une série proposée a été formée par l'addition ou par la soustraction des séries géométriques ou algèbre-géométriques; or je dis que les séries récurrentes sont de ce genre. Pour le prouver:

101. Soit $T = al^x$, d'où l'on tire la série géométrique $al, al^2, al^3, \&c.$ dans laquelle chaque terme est égal au précédent multiplié par la constante l : ainsi c'est une série récurrente du premier ordre. Si l'on fait $x - l = 0$, il est évident que l sera la racine de cette équation. Pour trouver a , lorsqu'on connoît l , il suffit, en supposant $x = 1$, de comparer le premier terme de la série donnée avec al . Soit, par exemple, la série récurrente du premier ordre $6, 4, 2\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \&c.$ qui, ayant supposé le premier terme $= 6$, se forme en multipliant chaque terme par $\frac{2}{3}$. Donc $l = \frac{2}{3}$, & $T = a(\frac{2}{3})^x$. Supposant $x = 1$, l'on a $6 = \frac{2}{3}a$, & $a = 9$; donc $T = 9 \cdot (\frac{2}{3})^x = \frac{2^x}{3^{x-1}}$.

Soit maintenant $T = al^x + bf^x$, d'où l'on tire une série composée des deux suivantes $\left. \begin{array}{l} al, al^2, al^3, \&c. \\ bf, bf^2, bf^3, \&c. \end{array} \right\}$. La série qui résulte de ces deux ajoutées terme à terme, est une série récurrente du second ordre; car chaque terme de cette série se trouve en multipliant le second (c'est celui qui précède immédiatement celui qu'on cherche) par $l + f$, & le premier (c'est celui qui précède le second) par $-lf$. En effet en multipliant $al^{x-1} + bf^{x-1}$ par $l + f$, & $al^{x-2} + bf^{x-2}$ par $-lf$, la somme de ses deux produits donne $al^x + bf^x$, terme suivant (on regarde cette quantité comme un seul terme). Soit supposé $l + f = h$, $-fl = i$; donc $h^2 = l^2 + 2lf + f^2$. En ajoutant $4i$ au premier membre, & $-4fl$ au second, on aura $h^2 + 4i = l^2 - 2lf + f^2$, & $\sqrt{(h^2 + 4i)} = l - f$; donc $h + \sqrt{(h^2 + 4i)} = 2l$, $\frac{h + \sqrt{(h^2 + 4i)}}{2} = l$, & $\frac{h - \sqrt{(h^2 + 4i)}}{2} = f$.

Ces valeurs de l & de f sont les racines de l'équation $x^2 - hx - i = 0$; car $fl = -i$, & $l + f = h$. l & f étant une fois

* Dans une équation du second degré le dernier terme est le produit des racines; l'on sait aussi que la somme des racines prises avec un signe contraire donne le coefficient du second terme d'une équation.

connues, pour déterminer a & b , il suffit de supposer le premier terme de la série $= al + bf$, & le second $= al^2 + bf^2$. Si l'on suppose $i = -1$, $h = 3$, & les deux premiers termes de la série 3, 2, pour avoir la série récurrente du second ordre 3, 2, 3, 7, 18, 47, 123, &c. on trouvera $l = \frac{h + \sqrt{h^2 + 4i}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, & $f = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (racines

de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$). Pour avoir a & b , on fe-

$$\text{ra } a \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + b \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 3, a \cdot \frac{9 + 6\sqrt{5} + 5}{4}$$

$$+ b \cdot \frac{9 - 6\sqrt{5} + 5}{4} = 2, \text{ ou } a \cdot \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} + b \cdot \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$

$= 2$. De la premiere équation multipliée par 3, retranchant la dernière, on tire $a + b = 7$, cette valeur étant substituée dans la premiere, donne $\frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot (a - b) = 3$; donc a

$$- b = \frac{-15}{\sqrt{5}} = -3\sqrt{5}. \text{ Ajoutant cette dernière équation à}$$

l'avant-dernière, & l'en retranchant ensuite, l'on trouve $a =$

$$\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}, \text{ & } b = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}; \text{ donc } T = \frac{(7 - 3\sqrt{5})}{2} \times$$

$$\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^x + \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \times \frac{(3 - \sqrt{5})^x}{2^x}. \text{ Si } h^2 = -$$

$4i$, alors les racines de l'équation $x^2 - hx - i = 0$ sont égales; & dans ce cas la méthode précédente conduit à une équation, ou identique, ou absurde. Ainsi si l'on suppose $h = 3$, $i = -\frac{9}{4}$, & les deux premiers termes de la série 1, 1, pour avoir la série récurrente 1, 1, $\frac{1}{4}$, 0, $-\frac{27}{16}$, $-\frac{31}{16}$ &c. vous trouverez $l = f = \frac{1}{2}$. C'est pourquoi T devrait être $= a \left(\frac{1}{2} \right)^x + b \left(\frac{1}{2} \right)^x$, & supposant $x = 1$, & ensuite $= 2$, l'on auroit $\frac{1}{2} \cdot (a + b) = 1$, $\frac{2}{4} \cdot (a + b) = 1$, d'où l'on tireroit $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, & $12 = 18$, ce qui est absurde. Nous dirons bien-tôt comment il faut s'y prendre dans ce cas pour avoir T.

Si $T = al^x + bf^x + cg^x$, il en naîtra une série récurrente du troisième ordre, en multipliant les trois termes antécédens à commencer par le dernier (le dernier est celui qui précède immédiatement celui qu'on cherche) l'un par $l + f + g$, le second par $-lf - lg - fg$, & le troisième par lfg : com-

me il est aisé de le voir en multipliant les trois termes $a l^{x-1} + b f^{x-1} + c g^{x-1}$, $a l^{x-2} + b f^{x-2} + c g^{x-2}$, $a l^{x-3} + b f^{x-3} + c g^{x-3}$, de la manière que nous venons de le dire ; car l'on aura , en prenant la somme des produits , le terme suivant $a l^x + b f^x + c g^x$.

Si le terme général d'une série est composé de l'addition de plusieurs quantités de cette forme $a l^x$, la série se formera en multipliant autant de termes antécédens , qu'il y a de termes dans T , & commençant la multiplication par le dernier , en multipliant , dis-je , par la somme de toutes les quantités exponentielles l, f , &c. , l'avant dernier par la somme des produits de ces quantités prises deux à deux ; mais laquelle somme doit être prise négativement, le terme qui précède celui-ci par la somme des produits des mêmes quantités prises trois à trois , le terme qui précède immédiatement celui dont nous venons de parler , par la somme négative de ces mêmes quantités prises quatre à quatre ; & ainsi de suite.

Supposant le premier multiplicateur $= l$, le second $= s$, le troisième $= r$, le quatrième $= q$, &c. il est évident que l'équation $x^m - l x^{m-1} + l f x^{m-2} - \&c. = 0$, a pour raci-

nes $l, f, \&c.$ * C'est pourquoi l'équation $x^m - l x^{m-1} - s x^{m-2} - r x^{m-3} - \&c. = 0$, qui résulte de la première, aura pour racines $l, f, g \&c.$; dans cette équation m doit être égal au nombre des termes antécédens nécessaires pour former la série. Ayant trouvé les racines de cette équation , le terme général aura la forme $a l^x + b f^x + c g^x \&c.$ Pour déterminer a, b, c , &c. comparez ce terme général aux m premiers termes de la série , cette comparaison fera connoître a, b, c , &c.

Pour en donner un exemple , soit la série $0, 0, 1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64} \&c.$ qui , (en supposant les trois premiers termes $0, 0, 1$), se forme en multipliant les trois premiers termes , à commencer par le dernier , par $1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$. C'est pourquoi l'équation qui doit donner l, f, g , sera $x^3 - x^2 - \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} = 0$, dont les racines sont $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; donc le ter-

* On sait que le coefficient du second terme d'une équation, dont le premier terme n'a d'autre coefficient que l'unité est égal à la somme des racines prises avec un signe contraire , que le coefficient du troisième terme est égal à la somme des produits des racines multipliées deux à deux , &c.

me général sera $a \cdot 1^x + b \cdot \frac{1}{2^x} + c \cdot \frac{(-1)^x}{2^x}$. Supposant successivement $x=1, 2, 3$, & comparant ce terme général dans ces différentes suppositions avec les trois premiers termes de la série, l'on aura $a + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} = 0$, $a + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} = 0$, $a + \frac{b}{8} - \frac{c}{8} = 1$. Retranchant successivement la première équation de la seconde & de la troisième, on aura $-\frac{b}{4} + \frac{3c}{4} = 0$, $-\frac{3b}{8} + \frac{3c}{8} = 1$; d'où l'on tire aisément $b = -4$, & $c = -\frac{1}{3}$. Ces valeurs substituées dans la première donnent $a = 2 + \frac{1}{3} = 0$, ou $a = \frac{1}{3}$; donc le terme général sera $\frac{1}{3} - \frac{4}{2^x} - \frac{1}{3} \frac{(-1)^x}{2^x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{x-2}} - \frac{(-1)^x}{3 \cdot 2^{x-2}}$.

202. Nous venons de voir quelles séries récurrentes se forment par l'assemblage des séries géométriques, parlons maintenant des séries algébriques-géométriques. Soit le terme général $T = (a + bx)^l$, duquel on peut former la série $(a + b)l$, $(a + 2b)l^2$, $(a + 3b)l^3$, &c. En multipliant deux termes antécédens quelconques $[a + b \cdot (x - 1)] \cdot l^{x-1}$, $[a + b \cdot (x - 2)] \cdot l^{x-2}$, le dernier par $2l$, & le précédent par $-l^2$. Le terme suivant $(a + bx)^l$ sera la somme des deux produits; donc cette série est récurrente. Si l'on fait $2l = h$, & $-l^2 = i$, il est évident que $4i$ sera $= -h^2$, & que l'équation $x^2 - hx - i = 0$ a deux racines égales, ce qui donne le cas (101) qui exclut le terme général de la forme $a l^x + b f^x$, ici $l = \frac{h}{2}$.

Soit la série 0, 1, 4, 12, 32, 120 &c. qui (en supposant les deux premiers termes 0, 1), se forme en multipliant les deux termes antécédens, le dernier par 4, & l'autre par -4 . Parce que $h = 4$, & $i = -4$, on aura $4i = -h^2$; l'équation $xx - hx - i = 0$ aura deux racines égales, & l'on trouvera $l = 2$. Donc le terme général sera $(a + bx) 2^x$. Fai-

Nous avons ici $m = 2$, $s = 1$, $f = \frac{1}{4}$, $r = -\frac{1}{4}$, & l'on peut remarquer que r est le coefficient de $x^2 = 1$.

font $x = 1$, & ensuite $x = 2$, l'on aura en comparant successivement le terme général avec les deux premiers termes de la série, $2a + 2b = 0$, $4a + 8b = 1$; donc $b = \frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{4}$.

C'est pourquoi $T = \left(-\frac{1}{4} + \frac{x}{4} \right) 2^x = (x - 1) \cdot 2^{x-2}$.

Si l'on suppose $T = (a + bx + cx^2) l^x$, la série qui en naîtra sera récurrente du troisième ordre. On la formera en multipliant trois termes antécédens (en commençant par le dernier) par $3l$, $-3l^2$, l^3 . En général si $T = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.) l^x$, de manière que le nombre des termes du multiplicateur de l^x soit $= m$, & le plus grand exposant de x (dans ce multiplicateur) $= m - 1$, il en résultera une série récurrente de l'ordre m , en multipliant m termes antécédens, le dernier par $m l$, l'avant dernier par $-\frac{m \cdot (m-1)}{2} l^2$, celui qui précède par $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{2 \cdot 3} l^3$ &c., en donnant alternativement les signes $+$ & $-$ à ces

multiplicateurs. Si l'on fait l'équation $x^m - m l x^{m-1} - \frac{m \cdot (m-1)}{2} l^2 x^{m-2} - \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{2 \cdot 3} l^3 x^{m-3} - \&c. = 0$, qui a toutes ses racines égales à l , & si l'on appelle t, f, r, p &c. les multiplicateurs des termes antécédens, à commencer par le dernier, on aura l'équation $x^m - (x^{m-1} - f x^{m-2} - r x^{m-3} - \&c.) = 0$, qui est la même que nous avons déjà trouvée (101). C'est pourquoi toutes les fois que cette équation aura toutes ses racines égales, T aura la forme dont nous venons de parler, & les quantités a, b, c , &c. se trouveront par la même méthode, c'est à-dire, par la comparaison du terme général avec les m premiers termes de la série.

Soit la série $0, 0, 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, \&c.$ qui (ayant supposé les quatre premiers termes $0, 0, 0, 1$) se forme en multipliant quatre termes antécédens, à commencer par le dernier, par $2, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$. On aura l'équation $x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$, dont les quatre racines sont toutes $= \frac{1}{2}$; c'est pourquoi T sera de cette forme $(a + bx + cx^2 + dx^3) \cdot \frac{1}{2^x}$; & faisant ensuite successivement $x = 1, 2, 3, 4$, on trouvera quatre équations d'où l'on tirera $a = -16, b = \frac{31}{2}, c = -16, d = \frac{1}{2}$; ainsi $T = \left(-16 + \frac{31}{2}x - 16x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right) \frac{1}{2^x}$. Mais si l'équation avoit des ra-

cines en partie égales & en partie inégales, T résulteroit de l'assemblage des séries, dont les unes seroient géométriques, & les autres algébrico-géométriques, & par conséquent T seroit composé des quantités, dont les unes seroient de la forme présente, & les autres de la forme ci dessus (101).

Soit, par exemple, la série 0, 3, — 2, 23, — 14, 87, — 90, 303 &c. qu'on forme en multipliant cinq termes antécédens, à commencer par le dernier, par 0, 4, — 2, — 3, 2. Dans ce cas l'équation générale sera $x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0$, (on a mis x^5 à la place du second terme qui manque). Les racines de cette équation sont 1, 1, 1, — 1, — 2; trois sont égales & deux inégales. Donc T aura cette forme $(a + bx + cx^2) 1^x + d \cdot (-1)^x + e \cdot (-2)^x$. Ayant fait successivement $x = 1, 2, 3, 4, 5$, on comparera T avec les cinq premiers termes de la série; & les cinq équations que l'on tirera de cette comparaison donneront $a = 1, b = -2, c = 1, d = -2, e = 1$; c'est pourquoi $T = 1 - 2x + x^2 - 2(-1)^x + 1 \cdot (-2)^x$.

De ce que nous avons dit sur les séries récurrentes, l'on doit conclure que ces séries ont pour terme général des formules exponentielles multipliées ou par des constantes, ou par des fonctions rationnelles & entières de x ; & parce que nous avons donné la méthode de trouver le terme sommatoire S des séries qui ont T de cette forme, il s'ensuit qu'on peut trouver soit le terme général, soit le terme sommatoire de toutes les séries récurrentes.

103. Il y a une autre espèce de séries récurrentes qui diffèrent de celles dont nous venons de parler, en ce qu'elles se forment d'un certain nombre de termes antécédens, multipliés par des quantités constantes, en ajoutant de plus à leur somme une quantité constante, positive, ou négative, que nous appellerons l'*Ajoutée*, en nommant les séries dont il est ici question, *séries récurrentes composées*.

Etant donnée la série 0, 1, 1; 2, 4, 9, 21, 50 &c. Pour trouver un terme de cette série, les deux précédens étant donnés, multipliez le dernier par 2 & le premier par 1, ajoutez — 1 à la somme des produits, le résultat donnera le terme cherché. Soit une série récurrente composée du premier ordre, dont le premier terme = a , la quantité par laquelle on doit multiplier chaque terme pour avoir le suivant étant = 1, & l'a-

jointée $= z$. Nous aurons la série récurrente, composée du premier ordre qu'on voit ici.

Si l'on multiplie le premier terme par r , & qu'on lui ajoute z , on aura le second terme $= ar + z$; & multipliant celui-ci par r , & ajoutant z , l'on aura le troisième, & ainsi de suite; de sorte que la somme des termes de chaque colonne représente un

$$\begin{array}{cccccccc} a, & ar, & ar^2, & ar^3, & \dots & ar^{x-1} \\ z, & z, & z, & z, & \dots & z \\ z, & z, & z, & z, & \dots & z \\ z, & z, & z, & z, & \dots & z \\ & & & & & z \\ & & & & & z \\ & & & & & z \end{array}$$

seul terme, & la dernière colonne à droite représente le terme général T , en supposant que x représente le nombre des termes. Les séries horizontales sont récurrentes simples du premier ordre, & à compter de la seconde toutes sont la même série, excepté que le nombre de leurs termes n'est pas le même. Le terme général résulte du terme ar^{x-1} , & d'une série récurrente simple du premier ordre z, z, z, z &c. dans laquelle le nombre des termes est $= x - 1$, où il faut remarquer que z répond non à $x = 1$, mais à $x = 2$. Si $r = 1$, le terme sommatoire S de cette série sera $a + (x - 1)z$. Si r n'est pas $= 1$, la série z, z, z, z sera une série géométrique dans laquelle $S = \frac{z(r^{x-1} - 1)}{r - 1}$, & le terme général de toute la

$$\text{série sera } T = ar^{x-1} + \frac{z(r^{x-1} - 1)}{r - 1} = \frac{ar^x + (z - a)r^{x-1} - z}{r - 1}$$

(on suppose r plus grand que 1, autrement l'on n'auroit pas $S = \frac{z(r^{x-1} - 1)}{r - 1}$).

Soit la série 2, 3, 7, 15, 31 &c. dans laquelle chaque terme est égal au précédent multiplié par 2, en ajoutant $- 1$; l'on aura le terme général $= 2^x - 1$.

* Si r est supposé $= 1$, l'on aura $S = \frac{z - z}{0} = \frac{0}{0}$, ce qui n'apprend rien. Si $r < 1$, la valeur de S se trouvera comme nous l'avons dit en parlant des progressions géométriques, en multipliant le plus grand terme par le dénominateur du quotient qui regne dans la progression, retranchant le plus petit terme du produit, & divisant le reste par ce dénominateur diminué de l'unité; mais alors il faut renverser la progression, afin qu'elle aille en croissant.

Si l'on a la série 2, 3, 6, 15 &c. qu'on forme en multipliant le terme précédent par 3, & ajoutant — 3. Le terme général deviendra $\frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} + 3}{2} = 3x - \frac{1}{2} \cdot 3^{x-1} +$

$$\frac{1}{2} = \left(3 - \frac{5}{2}\right) 3^{x-1} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right) 3^{x-1} + \frac{1}{2} = \frac{3^{x-1} + 3}{2}.$$

Soit maintenant la série récurrente composée du second ordre, représentée par les séries que l'on voit ici. a, b, p, p', p'', p'''
 $\begin{array}{cccccc} a & b & p & p' & p'' & p''' \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ z & iz & q & q' & q'' & q''' \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ iz & i^2z & q & q' & q'' & q''' \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ iz & i^2z & q & q' & q'' & q''' \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ iz & i^2z & q & q' & q'' & q''' \end{array}$
 est le premier terme, b le second avec l'ajoutée z . Pour avoir le troisième on multiplie a par f , & b par i , leur somme est supposée $= p$; & multipliant par i l'ajoutée z qui est sous b , on ajoutera iz à p pour avoir $p + iz$, & ajoutant z à cette somme, on aura le troisième terme ($p + iz + z$). Pour avoir le quatrième terme, on multiplie b par f , & p par i ; & faisant la somme de ces produits $= p'$, on multiplie z par f & iz par i , & l'on fait la somme $= q$, on multiplie aussi le z du troisième terme par i , & l'on ajoute encore z & l'on a le quatrième terme, &c. Il faut avoir soin de faire $= p', p''$ &c. les termes que donne la première série horizontale. On fera $= q, q', q''$ &c. les termes que donnent les autres séries horizontales, & l'on aura la formule ci-dessus. Il est visible que les séries horizontales sont récurrentes du second ordre, & qu'on les forme en multipliant deux termes antécédents, le dernier par i & l'autre par f . Les deux premiers termes de la première série sont a & b , ceux de la seconde z & iz . Le nombre des termes de la seconde est $x - 1$ celui de la troisième $x - 2$ &c. & celui de la première x . Le premier de la seconde répond à $x = 2$, le premier de la troisième à $x = 3$, &c.

Selon ce que nous avons vu ci-dessus, le terme général de ces séries dépend de la résolution de l'équation $x^2 - ix - f = 0$,

dont les racines sont $x = \frac{i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{i^2}{4} + f\right)}$, que nous supposerons $= h$ & $= K$. Si ces racines sont inégales, le terme général de la première série horizontale est de cette forme $AK^x + B/h^x$ (101). On déterminera A & B en faisant successivement

* Ici nous appelons i & f les quantités que nous avons désignées (101) par h & i .

$x = 1, 2$, & comparant le terme général de la série dans ces différentes suppositions, avec les deux premiers termes de la série proposée. Les termes généraux de la seconde, troisième, &c. séries horizontales sont de cette forme $CK^{x-1} + Dh^{x-2}$, $fK^{x-2} + Gh^{x-3}$ &c. Pour déterminer A & B, on aura les deux équations $AK + Bh = a$, $AK^2 + Bh^2 = b$. Multipliant la première par h , & la retranchant ensuite de la seconde, l'on en tirera $A = \frac{b - ah}{K(K-h)}$. Multipliant la première par K pour

en retrancher ensuite la seconde, l'on aura $B = \frac{aK - b}{h(K-h)}$. Par

une méthode semblable on trouvera $C = \frac{(1-h)}{K(K-h)}$, & $D =$

$\frac{(K-1)}{h(K-h)}$. Ce qui étant bien compris, il est évident que le terme général d'une pareille série est de la forme suivante :

$$AK^x + CK^{x-1} + CK^{x-2} + CK^{x-3} \dots CK.$$

$$Bh^x + Dh^{x-1} + Dh^2 + Dh^3 \dots Dh.$$

où les quantités A, B, C, D, sont déterminées. Et le terme général $T = AK^x + Bh^x + \left(\frac{CK, CK^2 \dots CK^{x-1}}{Dh, Dh^2 \dots Dh^{x-1}} \right) (P)$.

Dans les dernières séries le premier terme se trouve en faisant $x=2$; & la somme de ces dernières séries est $S = \frac{CK^2 - CK}{K-1}$

$$+ \frac{Dh^2 - Dh}{h-1}, \text{ donc le terme général sera } T = AK^x + \frac{CK^x - CK}{K-1} + Bh^x + \frac{Dh^x - Dh}{h-1} = \frac{A^{x+1} + (C-A)K^x - CK}{K-1} + \frac{Bh^{x+1} + (D-B)h^x - Dh}{h-1}.$$

Si on suppose $K=1$ la première des dernières séries sera une suite de quantités égales, & le terme sommatoire de cette série sera $S = (x-1) \times C$; donc le terme général deviendra

$$T = A + x \cdot C - C + \frac{Bh^{x+1} + (D-B)h^x - Dh}{-1},$$

Supposons maintenant $K=h$; dans ce cas le terme général de la première série horizontale aura la forme $(A+Bx)K^x$
(102).

(102). Les quantités A & B se déterminent par les premiers termes de la série : les termes généraux des autres séries seront pour la seconde $T = [C + (x-1) \cdot D] K^{x-1}$; pour la troisième T sera de cette forme $[C + (x-2) \cdot D] K^{x-2}$, &c. Par les deux premiers termes de la première série , l'on trouvera $A = \frac{2aK-b}{K^2}$, $B = \frac{b-aK}{K^2}$. Par les deux premiers termes de la seconde série , l'on aura $C = \frac{2K-1}{K^2}$, $D = \frac{(1-K)}{K^2}$; & T sera $= (A+Bx) \cdot K^x + [C + (x-1) \cdot D] K^{x-1} + [C + (x-2) \cdot D] K^{x-2} \dots + (C+D) K = (A+Bx) \cdot K^x + [(C+D) \cdot K + (C+2D) \cdot K^2 + (C+3D) \cdot K^3 \dots + [C + (x-1) \cdot D] \cdot K^{x-1}]$. Or la dernière partie est évidemment une série récurrente simple du second ordre, dont on peut facilement trouver la somme S . Si $K = h = 1$, on aura facilement la somme S . Si K n'est pas $= 1$, cette série sera algébrico-géométrique, & la somme S se trouvera par la méthode ci-dessus (102).

EXEMPLE. Soit la série $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, \&c.$ qui, en supposant les deux premiers termes $0, 1$ se forme en faisant le multiplicateur $r = 0$, le multiplicateur $s = 1$, & l'ajoutée $z = \frac{1}{2}$. C'est pourquoi $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$. L'équation à résoudre est $x^2 - 1 = 0$, d'où l'on tire $x = \pm 1$; donc $K = 1$, & $h = -1$. Nous servant des formules qui conviennent à ce cas, nous trouverons $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$, & le terme $T = \frac{1}{4} + \frac{x-1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^x + \frac{[-\frac{1}{4} \cdot (-1)^x - \frac{1}{4}]}{-2} = \frac{2x+1}{8} + \frac{1}{2} \cdot (-1)^x$.

104. On peut voir maintenant comment il faut s'y prendre pour avoir T dans les séries récurrentes composées des ordres

* Car dans ce cas $A K^x = \frac{1}{4}$, $B h^x = \frac{1}{4} (-1)^x$. la somme de la série $CK, CK^2, \&c.$ est $S = (x-1) C = \frac{x-1}{4}$, & la somme de la série $Dh, Dh^2 \dots Dh^{x-1}$ est $S = \frac{Dh^x - Dh}{-2} = \frac{-\frac{1}{4}(-1)^x - \frac{1}{4}}{-2}$, donc la formule P ci-dessus deviendra $T = \&c.$

supérieurs ; & parce que le terme général de ces séries fait voir qu'elles sont composées de séries algébriques, ou géométriques, ou algébrico-géométriques, dont nous savons trouver le terme sommatoire, l'on peut sommer ces sortes de séries, pourvu qu'on puisse avoir les racines de l'équation qu'on doit résoudre pour avoir leur terme général.

Usage des Séries récurrentes dans la recherche des Racines des Equations.

105. LEMME. Si l'on a une fraction dont le numérateur soit $= 1$, & le dénominateur un polynome, dont le premier terme soit aussi $= 1$ & dont les autres termes contiennent une inconnue élevée aux puissances 1° , 2° , 3° , &c. je dis que la valeur de cette fraction sera exprimée par une série récurrente.

Soit la fraction $\frac{1}{1 - az - bz^2 - cz^3}$, &c. Si l'on divise le numérateur par le premier terme du dénominateur, l'on aura 1 au quotient. Multipliant ce quotient par le divi-

$$\left. \begin{array}{l} 1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 \\ + bz^2 + 2abz^3 + \&c. \\ + cz^3 \end{array} \right\} B$$

seur & retranchant le produit du dividende, on aura un reste $az + bz^2 + cz^2 + \&c.$ dont le premier terme étant divisé par le premier terme du même dénominateur, on trouve $+ az$ pour quotient. Multipliant encore ce diviseur par le quotient & retranchant le produit du premier reste, il vient $(a^2 + b)z^2 + (c + ab)z^3 + \&c.$ Divisant $(a^2 + b)z^2$ par le premier terme 1 du même dénominateur, je trouve $a^2z^2 + bz^2$ pour quotient ; multipliant le diviseur par le quotient, retranchant le produit du dividende, & continuant d'opérer de même, en prenant toujours pour un seul terme la somme de tous ceux qui contiennent une même puissance de z , je trouverai tant de termes qu'il me plaira de la série B, qui, si elle est convergente, donnera la valeur de la fraction proposée, du moins par approximation. Mais si elle est divergente, il faudra faire la division en prenant le dénominateur dans un ordre renversé $- cz^3 - bz^2 - az + 1$, & la série qui en résultera sera convergente.

Si quelqu'un des termes qui suivent le premier manquoit dans le dénominateur, on supposeroit son coefficient $= 0$: Ainsi si le terme $- bz^2$ manquoit, on feroit $b = 0$.

Maintenant il est visible que les coefficients de la série B, joints au premier terme, forment une série récurrente du troisième ordre, dans laquelle les trois premiers termes seroient $0 + 0 + 1$, & donc les termes suivans se trouvent par cette loi : on écrit dans un ordre renversé & avec des signes contraires les coefficients des termes du dénominateur qui suivent le premier, pour avoir $c + b + a$. Multipliant le premier terme 0 par c , le second $+ 0$ par b , & le troisième par a , l'on aura a pour le quatrième terme (qu'on doit multiplier par z). Et continuant de même, on multipliera le second terme $+ 0$ par c , le troisième 1 par b , & le quatrième par a , pour avoir le terme suivant $(a^2 + b)$, qu'on multipliera par z^2 ; & ainsi de suite.

Si le dénominateur étoit $1 - az - bz^2 - cz^3 - ez^4$, les quatre premiers termes de la série étant supposés $0 + 0 + 0 + 1$, on prendroit les coefficients $e + c + b + a$, & multipliant le premier terme 0 par e , le second par c , le troisième par b , le quatrième par a , & continuant de même, il seroit aisé de trouver la série récurrente chetchée. Si la frac-

tion étoit $\frac{1}{1 - az}$, l'échelle de relation (c'est-à-dire, les

quantités par lesquelles on multiplie les termes antécédents pour avoir le terme suivant) seroit composée d'un seul terme $+ a$, & le premier terme de la série étant supposée $= 1$, le suivant seroit $+ az$, le troisième $+ a^2 z^2$, &c. de sorte que la série seroit $1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 + \dots$. Cette série devient $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$ (D), en sup-

posant $a = 2$, & $z = \frac{1}{2}$; de sorte que la fraction $\frac{1}{1 - az}$,

qui dans ce cas devient $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, est la limite

de la série D; de maniere que cette série ne peut jamais surpasser 2, mais à l'infini elle est $= 2$.

Si l'on vouloit réduire en série la fraction $\frac{1}{1 - az - bz^2}$,

l'échelle de relation seroit $b + a$, & les deux premiers termes de la série étant $0 + 1$, on trouveroit le troisième en mul-

X 2

multipliant 0 par b & 1 par a (& encore par z), &c. de manière qu'en prenant toujours pour un seul terme tous ceux dans lesquels z se trouve avoir le même exposant, l'on auroit $1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + a^4z^4 + \&c.$

$$+ bz^2 + 2abz^3 + 3a^2bz^4 + \&c.$$

$$+ b^2z^4 + \&c.$$

Si $a = -3$, & $b = -2$, de manière que $b + a$ soit $= -2 - 3$, si en même temps on suppose $z = \frac{1}{4}$, notre série deviendra $1 - \frac{3}{4} + \frac{7}{16} - \frac{15}{64} + \frac{31}{256} \&c.$ qui sera la

limite de la fraction $\frac{1}{1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{8}{8+6+1} = \frac{8}{15}$. Mais si on

supposoit $b = -2$, $a = -3$ & $z = 1$, la série deviendroit $1 - 3 + 7 - 15 + 31 \&c.$ qui s'éloigneroit d'autant plus de la véritable valeur de la fraction $\frac{1}{1+3+1} = \frac{1}{5}$ qu'on prendroit plus de termes.

Si on vouloit développer en série la fraction

$$\frac{A + Bz + Dz^2}{1 - az - bz^2 - cz^3 - dz^4 - \&c.}$$
 on développeroit d'a-

bord la fraction $\frac{1}{1 - az - bz^2 - cz^3 - dz^4 - \&c.}$ en une série

récurrente par la méthode ci-dessus, & multipliant ensuite tous les termes de cette série par le numérateur $A + Bz + Dz^2$, le Problème seroit résolu. Si la fraction étoit de cette

forme $\frac{A + Bz + \&c.}{p - qz - rz^2 \&c.}$ on diviseroit tous les termes

du numérateur & du dénominateur par p , & l'on auroit

$\frac{D + Ez + \&c.}{1 - az - bz^2 \&c.}$, en faisant $\frac{A}{p} = D$, $\frac{B}{p} = E$, &c. $\frac{q}{p} =$

a , $\frac{r}{p} = b$, &c. & ce cas rentreroit dans le précédent.

106. PROBLÈME. Etant donnée la fraction

$$\frac{1}{1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 \&c.}$$
 de laquelle on ait formé une

série récurrente, trouver une progression géométrique dont chaque

terme soit positif & plus grand que le coefficient du terme correspondant de la série récurrente dont il s'agit, en le prenant même positivement, supposé qu'il fût négatif. Soit l'échelle de relation $c' + b' + a'$ dans laquelle nous prenons tous les termes positivement. Si quelqu'un de ces termes est plus petit que l'unité, s'il est négatif ou fractionnaire, comme si l'échelle étoit $-\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2}$, augmentez-les arbitrairement pour les rendre plus grands, entiers & positifs, de manière que l'échelle devienne $1 + 1 + 2$, par exemple; prenez ensuite la somme de ces termes & formez une série dans laquelle chaque terme soit au suivant comme 1 est à cette somme, & le problème sera résolu.

Pour le faire voir, soit $c + b + a$ la nouvelle échelle de relation substituée à la véritable $c' + b' + a'$, c' , b' & a' étant pris affirmativement, c'est-à-dire, ayant seulement égard à leur grandeur & non au signe, nous aurons $a = a'$ ou $a' > a$, $b = b'$ ou $b > b'$, $c = c'$ ou $c > c'$. Supposons maintenant que la série récurrente, dont l'échelle de relation est $c + b + a$, soit $= p + qz + rz^2 + sz^3 + tz^4 + \&c.$, la série ou progression géométrique, dont l'exposant est $c + b + a$, étant représentée par $P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + \&c.$, & que P soit $= p = 1$.

Par la nature de ces séries, $Q = (c + b + a)P$, $q = ap^*$; donc Q est $> q$. De même $R = (c + b + a)Q$; $r = bp + aq$. Mais $bQ > bq > bp$, & $aQ > aq$; donc $R > r$. On a encore $S = (c + b + a)R$, & $s = cp + bq + ar$. Mais $cR > cr > cq > cp$, & $bR > br > bq$, tandis que $aR > ar$; donc aussi $S > s$. L'on prouveroit de même que $T > t$, & ainsi de suite.

Les termes de la série géométrique ci-dessus sont, à compter du second, plus grands que leurs correspondants dans la série récurrente dont nous venons de parler; or dans celle-ci les termes sont plus grands que dans celle dont l'échelle de relation seroit $c' + b' + a'$, ce qu'on peut prouver de la manière suivante.

Si dans la série récurrente $p + qz + rz^2 + sz^3 + \&c.$

* Cette dernière équation résulte de ce que les trois premiers termes de la série récurrente doivent être supposés $0 + 0 + 1$, & qu'on doit trouver les coefficients des autres en multipliant le premier par c , le second par b , & le troisième par a .

on met a' au lieu de a , b' à la place de b , & c' à la place de c , &c. ayant pris toutes ces quantités affirmativement, les coefficients q, r, f, t, u , &c. resteront les mêmes; parce que a' n'est pas plus grand que a , ni $b' > b$, ni $c' > c$. Mais si on veut avoir égard aux signes de a', b', c' , &c. la grandeur des coefficients ne peut changer que parce que quelqu'une de leurs parties pourroit être détruite par des signes contraires, ce qui les rendroit plus petits; ainsi les coefficients de la série, dont l'échelle de relation est $c', + b', + a'$, seront dans ce cas plus petits que les coefficients correspondants q, r, f, t , &c. qui sont eux-mêmes plus petits que les coefficients correspondants Q, R, S, T , &c. de la série géométrique.

Si on fait $c + b + a = d$, l'exposant de la progression géométrique ci dessus, c'est-à-dire d , pourra surpasser d'une quantité quelconque la somme $c' + b' + a'$ des termes de l'échelle pris affirmativement. Plus d est grand, plus un terme (à compter du second) de la progression géométrique surpassera le terme correspondant de la série récurrente. Mais si on prend $f > d$, la raison $f^2 : d^2$ est plus grande que celle de $f : d$; & la raison de $f^3 : d^3$ plus grande encore que celle de $f^2 : d^2$. De sorte que si m est un nombre fort grand, la raison de $f^m : d^m$ pourra tellement surpasser celle de $f : d$, que d^m disparaîtra, pour ainsi dire, devant f^m ; & la série récurrente étant supposée continuée jusqu'au terme qui contient z^m , dont le coefficient soit supposé B , l'on aura $d^m > B$, & f^m pourra tellement surpasser B , que cette dernière quantité sera presque infiniment petite par rapport à f^m . Si donc d est maintenant supposé représenter f , ayant écrit par ordre les deux séries C & D, $1 + d z + d^2 z^2 + d^3 z^3 + d^4 z^4$ &c. C il est visible qu'on $1 + q z + r z^2 + f z^3 + t z^4$ &c. D pourra tellement les continuer que le coefficient du terme $B z^m$ sera fort petit par rapport à d^m , coefficient du terme correspondant $d^m z^m$ de la série géométrique.

Si l'échelle de relation est $3, - 2, + 5$, la série récurrente sera $1 + 5z + 23z^2 + 108z^3 + 529z^4$ &c., pour laquelle si on prend $d = 3 + 2 + 5 = 10$; & que par le moyen de cet exposant on forme la série géométrique $1 + 10z + 100z^2 + 1000z^3 + 10000z^4$ &c. il est facile de voir que les coefficients de celle-ci surpasseront de beaucoup les coefficients correspondants de l'autre. Si l'échelle de rela-

lation est 10, +6, +2, la série récurrente sera $1 + 2z + 10z^2 + 42z^3 + 164z^4 + 680z^5$ &c. Mais la série géométrique correspondante, dont l'exposant est $= d = 10 + 6 + 2 = 18$, sera $1 + 18z + 324z^2$ &c. dont les coefficients surpassent de beaucoup leurs correspondants dans la série récurrente.

107. THÉOREME. Si $1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 - \&c.$, dénominateur d'une fraction dont le numérateur est $= 1$, a un facteur simple réel $1 - dz$, dans lequel d soit assez grand, la série récurrente qui naîtra de l'évolution de cette fraction, approchera d'autant plus d'être une progression géométrique, dont l'exposant seroit $= d$, qu'on la poussera plus loin. Supposons que la valeur de cette fraction soit y , de manière que l'on

ait $\frac{1}{1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 - \&c.} = y$; puisque le dénomi-

nateur de cette fraction a un facteur simple & réel $1 - dz$, si l'autre facteur est $1 - a''z - b''z^2 - c''z^3 - \&c.$, on aura

$$y = \left(\frac{1}{1 - dz} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - a''z - b''z^2 - c''z^3 - \&c.} \right). \text{ L'un}$$

& l'autre de ces facteurs pouvant être développés en séries, le premier donnera la progression géométrique $1 + dz + d^2z^2 + d^3z^3 + \&c.$, le second une série récurrente qu'on peut représenter par $1 + qz + rz^2 + sz^3 + tz^4 + \&c.$ Si on multiplie ces deux séries l'une par l'autre, ce qui se fait en multipliant tous les termes de l'une successivement par tous ceux de l'autre, leur produit sera $= y$. Or ce produit est

$$\left. \begin{aligned} &1 + qz + rz^2 + sz^3 + tz^4 + uz^5 + \&c. \\ &+ dz + dqz^2 + drz^3 + dsz^4 + d^2z^5 + \&c. \\ &+ d^2z^2 + d^2qz^3 + d^2rz^4 + d^2sz^5 + \&c. \\ &+ d^3z^3 + d^3qz^4 + d^3rz^5 + \&c. \\ &+ d^4z^4 + d^4qz^5 + \&c. \\ &+ d^5z^5 + \&c. \end{aligned} \right\} = y (A).$$

Si nous supposons qu'on développe la fraction proposée, dont la valeur est y , en une série récurrente $1 + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + Vz^5 + \&c.$, il est évident que cette série ne peut être égale au premier membre de l'équation A pour toutes les valeurs de z , à moins que les quantités qui

multiplient une même puissance de z ne soient égales de part & d'autre, On aura donc les équations suivantes

$$Q = d + q$$

$$R = d^2 + dq + r$$

$$S = d^3 + d^2q + dr + f$$

$$T = d^4 + d^3q + d^2r + df + t$$

$$V = d^5 + d^4q + d^3r + d^2f + dt + u.$$

&c.

Si d est fort grand, les derniers termes q, r, f, t, u pourront être négligés sans une erreur bien considérable, & même l'erreur sera peu digne d'attention en négligeant les puissances inférieures de d respectivement aux supérieures, en négligeant, *par exemple*, d^4 devant d^5 . On pourra donc supposer

$$\frac{R}{Q} = \frac{d^2 + dq + r}{d + q} = \frac{d^2}{d} = d$$

$$\frac{S}{R} = \frac{d^3 + d^2q + dr + f}{d^2 + dq + r} = \frac{d^3}{d^2} = d$$

$$\frac{T}{S} = \frac{d^4 + d^3q + d^2r + df + t}{d^3 + d^2q + dr + f} = \frac{d^4}{d^3} = d$$

$$\frac{V}{T} = \frac{d^5 + d^4q + d^3r + d^2f + dt + u}{d^4 + d^3q + d^2r + df + t} = \frac{d^5}{d^4} = d.$$

Il est donc visible que dans cette série la raison de $Q : R$ diffère souvent fort peu de celle de $1 : d$, que celle de $R : S$ en approche davantage, que celle de $S : T$ en approche encore plus, &c. ainsi de suite; de sorte qu'à l'infini cette série se change en une progression géométrique, dans laquelle l'exposant $= d$.

Si d étant une quantité réelle, $1 - dz$ est un diviseur du dénominateur $1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 - \&c.$ l'équation simple $1 - dz = 0$, contiendra une racine réelle de l'équation $0 = 1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 - \&c.$ En effet, on a dans ce cas

$$1 = dz \text{ \& \& } z = \frac{1}{d}.$$

Si donc cette racine est assez petite (c'est-à-dire, si d est assez grand), on pourra la trouver en formant une série récurrente par le moyen de l'échelle que

fourait l'équation : car une telle série pourra, après un certain nombre de termes, être regardée comme une progression géométrique, dont l'exposant seroit $= d$; de sorte qu'en divisant un terme assez éloigné du premier par celui qui le suit, le quotient sera à très-peu près $= \frac{1}{d}$ racine cherchée.

Mais si la série ne tendoit pas à devenir géométrique, ce qu'il est facile de reconnoître, on ne pourroit par cette méthode trouver aucune des racines de l'équation. A l'égard de l'échelle, on la trouvera aisément en prenant avec un signe contraire, pour premier terme, le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue ; pour second terme, le coefficient du terme suivant ; & ainsi de suite, & supposant $= 0$, les coefficients des termes qui manquent dans l'équation.

Soit l'équation du 3^e degré $x - 5x - 40x^2 - 50x^3 = 0$. Je forme, par le moyen de l'échelle 50, 40, 5 la série récurrente $1 + 5x + 65x^2 + 575x^3 + \&c.$, ou n'ayant pas égard à x , $1 + 5 + 65 + 575 + 5725 + 54875 + 532125 + \&c.$ Si on divise le second terme par le premier, le quotient est 5, le troisième étant divisé par le second donne 13, le quatrième étant divisé par le troisième donne 8.8. Le quotient du cinquième par le terme précédent est 9.9 ; le sixième terme étant divisé par le cinquième, on trouve 9.5, & le septième divisé par le sixième donne 9.7. Comme ces derniers quotients ne diffèrent pas beaucoup, c'est une marque que la progression tend à devenir géométrique, & il est visible qu'une des racines $\frac{1}{d}$ est à-peu-près $= \frac{54875}{532125}$.

Dans une équation quelconque on peut toujours diminuer toute racine possible, autant qu'on le voudra : car si l'équation a un diviseur simple $d x - 1 = 0$, qui détermine cette racine, & qu'on fasse $x = x + p$, ce diviseur devient $d x + d p - 1 = 0$, qui représente la racine $x = \frac{1}{d} - p$ de la transformée que donne cette supposition. Or en prenant pour p une quantité convenable, la racine $\frac{1}{d} - p$ pourra être aussi petite qu'on le voudra ; cependant on ne peut pas découvrir par ce moyen toutes les racines réelles de toutes

les équations , comme semble le promettre cette observation. Si l'équation $0 = 1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 - \&c.$ a un facteur simple $1 - dz = 0$, & un autre facteur quelconque $0 = 1 - az - bz^2 - cz^3 - \&c.$, sans que la série que doit fournir l'équation $0 = 1 - a'z - b'z^2 - \&c.$ tende à devenir une progression géométrique , dont l'exposant soit d , si vous voulez faire en sorte que cela arrive , il ne suffit pas d'augmenter d , ce qu'on pourroit faire en diminuant la racine $\frac{1}{d}$; il est encore nécessaire qu'en augmentant ainsi la quantité d , les coefficients a , b , c de l'autre facteur restent les mêmes , ou du moins ne subissent pas des grands changements ; autrement en changeant l'échelle de relation , les termes de la série récurrente pourront différer de beaucoup de leurs correspondants dans la progression géométrique , dont l'exposant $= d$. D'autre côté il est visible qu'en faisant $z = x + p$, chaque racine est diminuée de la même quantité p ; or cette diminution peut changer & augmenter les coefficients a , b , c , de manière que quoique d soit augmenté , il soit cependant trop petit relativement à ces coefficients.

Mais quoique par cette méthode l'on ne puisse pas toujours parvenir à trouver la plus petite racine d'une équation , j'ai cru ne devoir pas la passer sous silence , parce qu'elle est facile & que les tentatives sont rarement infructueuses.

108. EXEMPLE I. On demande les racines de l'équation $y^3 + 8y - 10 = 0$. Puisqu'en supposant $y = 2$, le premier membre devient $4 + 16 - 10 = 10$, & qu'en prenant $y = 1$, l'on trouve $1 + 8 - 10 = -1$, il est visible qu'une des racines est contenue entre 2 & 1 , mais qu'elle approche plus de 1 que de 2 ; car le résultat que donne $+1$ est moins éloigné de 0 (résultat que donneroit la racine exacte) que celui que donne $+2$. On peut diminuer encore cette racine , en substituant dans la proposée $1 + z$ au lieu de y , pour avoir

$$\begin{aligned} y &= 1 + z \\ y^3 &= 1 + 3z + 3z^2 + z^3 \\ 8y &= 8 + 8z \\ -10 &= -10, \end{aligned}$$

ce qui donnera $0 = -1 + 10z + 3z^2 + z^3$, ou $0 = 1 - 10z - 3z^2 - z^3$. Cette dernière équation donne l'échelle de relation

$+1, +10$, par le moyen de laquelle on peut former une série récurrente (dont nous nous contenterons de rapporter les coefficients en regardant 1 comme le coefficient de z^0) $1 + 10 + 101 + 1020 + 10301 + 104030 + 1050601$ &c. qui tend évidemment vers une progression géométrique. C'est pourquoi, si on divise l'avant-dernier terme par le dernier, on aura $z = \frac{104030}{1050601} = 0.0990193$, d'où l'on tire $1 + z = y = 1.099019$. C'est donc là la racine approchée cherchée qui étant substituée dans $y^2 + 8y - 10 = 0$, au lieu de y donne $y^2 + 8y - 10 = -0.000006$, résultat qui fait voir que cette racine n'est pas fort éloignée de la véritable. Si on divise la proposée par $y - 1.099019 = 0$, on aura facilement la seconde racine. Mais on peut la trouver encore plus facilement, en retranchant 1.099019 du coefficient -8 du second terme, pris négativement, ou de la somme des racines de l'équation, ce qui donnera $-8 - 1.099019 = -9.099019$ pour la seconde racine.

Si on avoit voulu trouver celle-ci avant l'autre, il auroit fallu remarquer qu'elle tombe entre -10 & -9 , ce qui est évident; parce que si on fait $y = -9$, la proposée devient $81 - 72 - 10 = -1$; mais en supposant $y = -10$, on trouve $100 - 80 - 10 = 10$, ce qui fait voir qu'il y a une racine entre -10 & -9 , mais plus proche de -9 que de -10 . Si donc on fait $y = -9 - z$, on trouvera $0 = -1 + 10z + z^2$, ou $0 = 1 - 10z - z^2$, cette équation étant la même que celle que nous avons traitée ci-dessus, donnera la même série récurrente & la même valeur de z que nous avons déjà trouvée, & l'on aura $y = -9 - z = -9.099019$.

109. EXEMPLE II. Soit l'équation $x^2 - 7x - 5 = 0$, dans laquelle si on fait $x = 0$, le résultat sera -5 ; mais en supposant $x = -1$ l'équation devient $1 + 7 - 5 = 3$. Cela marque qu'une des racines de l'équation tombe entre 0 & -1 , & qu'elle est plus près de -1 que de 0 . Il sera commode de supposer dans ce cas-ci, $x = 5z$, afin d'avoir $25z^2 - 35z - 5 = 0$, ou $5z^2 - 7z - 1 = 0$, $0 = 1 + 7z - 5z^2$. L'échelle de relation est donc $+5 - 7$, & la série des coefficients $1 - 7 + 54 - 413 + 3161 - 24191 + 185142$ &c.; d'où l'on tire $z = \frac{-24191}{185142} = -0.130661$, & $x = 5z = -0.653305$. Le coefficient du second terme de la proposée pris négativement étant $+7$, l'autre racine sera $x = 7 + 0.653305 = 7.653305$.

110. **EXEMPLE III.** On demande les racines de l'équation $x^2 + 6x + 10 = 0$. Si on fait $x = 10z$, on trouvera après les opérations ordinaires $0 = 10 + 60z + 100zz$, ou, en divisant par 10, afin que le terme constant devienne $= 1$, $0 = 1 + 6z + 10zz$. Donc l'échelle de relation sera $-10, -6$, qui donne la série des coefficients $1 - 6 + 26 - 96 + 316 - 336 + 2456$ &c. Il ne paroît pas que cette série tende à devenir géométrique. Mais parce qu'il est facile de voir qu'une des racines de la proposée est assez proche de -3 , on peut faire $x = -3 + z$, ce qui donne $0 = 1 + zz$. Comme le second terme de l'équation manque, on supposera son coefficient $= 0$, & l'on aura l'échelle de relation $-1 + 0$, d'où l'on tire la série des coefficients $1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0$ &c; mais cette série ne peut rien faire connoître, & les racines de l'équation proposée sont $x = -3 \pm \sqrt{-1}$. Néanmoins, en négligeant les termes alternes, la série précédente se réduit à celle-ci : $1 - 1 + 1 - 1$ &c., dont chaque terme divisé par le suivant donne -1 , qui est le carré de la racine de la transformée, puisque l'on a $zz = -1$, $z = \pm \sqrt{-1}$, & par conséquent $x = -3 \pm \sqrt{-1}$.

111. **EXEMPLE IV.** Soit l'équation cubique $x^3 - 5x^2 + 5x + 12 = 0$, qui a une racine réelle comprise entre -1 & -2 . Car si on fait $x = -1$, elle se réduit à $+1$; mais elle devient $-8 - 20 - 10 + 12 = -26$, en supposant $x = -2$; ainsi cette racine approche plus de -1 que de -2 . On pourra donc supposer commodément $x = -1 - z$, d'où l'on tirera $0 = 1 - 18z - 8z^2 - z^3$, qui donne l'échelle de relation $+1, +8, +18$, d'où l'on tire la série des coefficients $1 + 18 + 332 + 6121 + 112852 + 2080636 +$ &c. qui tend rapidement vers une progression géométrique; ainsi la racine cherchée sera à-peu-près $z = \frac{112852}{2080636} = 0.054239$, & $x = -1 - z = -1.054239$.

REMARQUE. Il sera plus sûr, pour ne pas se tromper dans la détermination de l'échelle de relation, d'ordonner la transformée de manière que l'unité positive étant dans le second membre de l'équation, les autres termes se trouvent dans le premier, de manière que les exposants aillent en décroissant à l'ordinaire. Ainsi dans cet exemple, on auroit pu disposer la transformée de cette manière $z^3 + 8z^2 + 18z = 1$,

& alors les termes de l'échelle seront les coefficients 1, + 8, + 18, dans le rang qu'ils occupent, & avec les signes des termes dont ils sont les coefficients.

112. Soit l'équation $x^3 - 4x^2 + 6x - 20 = 0$, qui a une seule racine réelle comprise entre 3 & 4, mais plus proche de 4 que de 3. Si donc on fait $x = 4 - z$, l'on trouve $0 = 4 - 22z + 8z^2 - z^3$, équation que je dispose ainsi $\frac{1}{4}z^3 - 2z^2 + \frac{11}{2}z = 1$, ou de cette manière $\frac{1}{8}z^3 - \frac{8}{4}z^2 + \frac{11}{2}z = 1$. Si je fais maintenant $\frac{1}{2}z = y$, j'aurai la nouvelle transformée $2y^3 - 8y^2 + 11y = 1$, qui donne pour échelle de relation 2, - 8, + 11, d'où naît la série 1 + 11 + 113 + 1157 + 11845 + 121265 + &c. qui tend à devenir géométrique. On aura donc $\frac{1}{2}z = y = \frac{11845}{121265} = 0.097678$; donc $z = 0.195356$, & $x = 4 - z = 3.804644$.

113. Afin de rendre notre Algebre plus complete, nous croyons devoir dire un mot de la manière dont le célèbre Euler emploie les séries récurrentes dans la recherche des racines des équations. Le fondement de sa méthode consiste à déterminer pour chaque équation une suite de nombres, comme a, b, c , &c. tels que chaque terme de la suite divisé par le précédent; indique la valeur de la racine d'autant plus exactement qu'on aura continué plus loin cette suite de nombres.

Supposons, dit-il dans son Algebre, que nous soyons parvenus déjà aux termes p, q, r, s, t , &c. il faudra que $\frac{q}{p}$ indique la racine x déjà assez exactement; c'est-à-dire, qu'on ait à très-peu-près $\frac{q}{p} = x$. On aura de même $\frac{r}{q} = x$, & la multiplication des deux valeurs donnera $\frac{r}{p} = xx$. De plus comme $\frac{s}{r} = x$, on aura aussi $\frac{s}{p} = x^3$; ensuite, puisque $\frac{t}{s} = x$, on aura $\frac{t}{p} = x^4$, & ainsi de suite.

Soit l'équation $xx = x + 1$, & supposons que dans la série ci-dessus se présentent les termes p, q, r, s, t , &c. Or comme $\frac{q}{p} = x$, & $\frac{r}{p} = xx$, nous obtiendrons l'équa-

tion $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, ou $q + p = r$. Et comme nous trouvons de la même manière que $f = r + q$, & $r = f + p$; nous concluons que chaque terme de notre suite est la somme des deux termes précédents; de sorte qu'ayant les deux premiers termes on est en état de continuer la suite aussi loin qu'on voudra. Quant à ces deux premiers termes (dit ce Savant), on peut les prendre à volonté; si nous supposons donc qu'ils soient 0, 1, notre suite sera 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, &c. & telle que si on divise un terme par celui que le précède, on aura une valeur de x d'autant plus approchante de la véritable qu'on aura choisi un terme plus éloigné. L'erreur véritablement est très-grande au commencement, mais plus on avance, plus elle diminue. Si, par exemple, on fait $x = \frac{1}{1}$, on a $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} + 1 = \frac{2}{1}$, où l'erreur n'est que de $\frac{1}{1}$; les termes suivants la donneroient encore plus petite.

Considérons l'équation $xx = 2x + 1$, & puisque $x = \frac{q}{p}$ & $xx = \frac{r}{p}$, nous aurons $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, ou $r = 2q + p$; d'où l'on peut conclure que le double de chaque terme ajouté au terme précédent donne le terme suivant. Si nous commençons donc encore par 0, 1, nous aurons la série 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, &c., d'où il suit que la valeur cherchée de x sera exprimée de plus en plus exactement par les fractions suivantes : $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{29}$, $\frac{1}{70}$, $\frac{1}{169}$, &c. qui approcheront toujours davantage de la véritable valeur de $x = 1 + \sqrt{2}$.

Soit l'équation $x^3 = x^2 + 2x + 1$. On fera $x = \frac{q}{p}$, $x^2 = \frac{r}{p}$, & $x^3 = \frac{s}{p}$, & l'on aura $f = r + 2q + p$, par où l'on voit comment par les trois termes p , q , r , on doit déterminer le suivant f , & comme le commencement de la suite cherchée est arbitraire, on peut former la série suivante : 0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, &c. ainsi les valeurs de x sont $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{28}$, $\frac{1}{60}$, &c. *. Si nous prenons pour x la fraction $\frac{60}{13} = \frac{11}{2}$, on trouvera

* Nous parlerons dans la seconde partie de cet Ouvrage de la valeur de la fraction $\frac{0}{0}$, qui peut être finie ou infinie, ou 0 ;

pour le premier membre de l'équation proposée la quantité $\frac{1175}{143}$, & pour le second membre $\frac{225}{49} + \frac{10}{7} + 1 = \frac{1108}{143}$, où l'erreur n'est que de $\frac{13}{143}$.

Il faut remarquer cependant (dit M. Euler) que toutes les équations ne sont pas de nature à pouvoir y appliquer cette méthode; & particulièrement lorsque le second terme manque, elle ne peut être employée. Car soit, *par exemple*,

$xx = 2$; si on vouloit faire $x = \frac{q}{p}$; & $xx = \frac{r}{p}$, on au-

roit $\frac{r}{p} = 2$, ou $r = 2p$; c'est-à-dire, $r = 0 \times q + 2p$, d'où

résulteroit la suite 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32, &c. de laquelle on ne peut rien conclure, parce que chaque terme divisé par le précédent donne toujours $x = 1$, ou $x = 2$.

Mais si dans l'équation proposée, on suppose $x = y - 1$, on trouvera $y^2 = 2y + 1$ *; & si l'on fait maintenant $y =$

$\frac{q}{p}$, & $yy = \frac{r}{p}$ on aura l'approximation que nous avons donnée ci-dessus.

Il faut observer de plus (ajoute ce Savant au sujet de cette méthode) que lorsque l'équation a une racine rationnelle, & qu'on choisit le commencement de la période tel que cette racine en résulte, chaque terme de la suite divisé par le terme précédent, donnera également la racine exactement. Soit l'équation $xx = x + 2$, dont une des racines est $x = 2$; comme on a ici, pour la série, la formule $r = q + 2p$, si on prend 1, 2 pour les deux premiers termes, on a la suite 1, 2, 4, 8, 16, 64, &c. qui est une progression géométrique croissante dont l'exposant est 2.

Mais lorsque le commencement de la suite s'écarte de la racine;

ainsi $\frac{(2-2)3}{(2-2) \cdot 5} = \frac{0 \times 3}{0 \times 5} = \frac{3}{5}$; $\frac{(1-1) \cdot 3}{(1-1) \cdot (1-1)} = \frac{3}{(1-1)}$

$\frac{3}{0} = \infty$, en considérant 0 comme une quantité infiniment petite.

Mais $\frac{(1-1)(1-1)3}{(1-1) \cdot 2} = \frac{(1-1) \cdot 3}{2} = \frac{0 \times 3}{2} = \frac{0}{2} = 0$.

C'est tout ce que je dirai maintenant sur cette matière, que je traiterai plus au long dans le calcul différentiel.

* Dans la traduction françoise de l'algèbre de M. Euler, on trouve $y^2 + 2y - 1 = 2$, équation fautive; ce qui sans doute est une faute d'impression.

il ne faut pas croire qu'on ira du moins en s'approchant de cette racine ; la suite ne donne par approximation que la plus grande racine (il ne s'agit pas ici des équations du premier degré) ; & l'on ne trouve pas une des moindres , à moins d'avoir choisi les premiers termes convenablement pour cet effet. Soit l'équation $xx = 4x - 3$, dont les deux racines sont $x = 1$ & $x = 3$. La formule pour la suite est $r = 4q - 3p$; & si l'on prend 1, 1 pour le commencement de la série , qui indique par conséquent la plus petite racine , on a pour la suite entière : 1, 1, 1, 1, &c. Mais si on adopte pour premiers termes les nombres 1, 3 , qui contiennent la plus grande racine , on a la suite : 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, &c. qui indique avec précision la racine 3. Enfin si on adopte un autre commencement , pourvu qu'il soit tel que la plus petite racine n'y soit pas comprise , la série sera telle que le quotient d'un terme par le précédent approchera toujours de plus en plus de la racine 3 à proportion qu'on s'éloignera du premier terme de la série ; mais les quotients n'approcheront pas de la plus petite racine.

Soit l'équation $x^\infty = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + \&c.$ La série doit être telle pour cette équation , que chaque terme soit égal à la somme de tous les précédents , c'est-à-dire , qu'on aura 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c. ce qui fait voir qu'une des racines de l'équation proposée est 2 exactement. En divisant l'équation par x^∞ , on trouve $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{xx} + \frac{1}{x^3} \&c. = \frac{1}{x-1}$; d'où l'on tire $1 = \frac{1}{x-1}$; $x-1 = 1$, & $x = 2$.

En examinant cette méthode avec un peu d'attention, on s'aperçoit facilement que les premiers termes de la série ne doivent pas tous être $= 0$, & qu'ils ne sont pas entièrement arbitraires , comme l'Auteur semble vouloir le faire entendre ; ce qui n'empêche pas qu'elle ne soit très élégante.

Des Fractions continues.

114. Il y a encore une autre espèce de séries , dont je crois devoir donner une notion aux Commencants : je veux parler des fractions continues. Lorsqu'une fraction a pour dénominateur l'assemblage d'un entier & d'une fraction ; que cette seconde fraction a aussi pour dénominateur l'assemblage d'un entier & d'une fraction , & ainsi de suite : l'expression qui

qui en résulte s'appelle *fraction continue* : ainsi l'expression $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} + \&c.$ est une fraction continue. J'appellerai *fractions intégrantes* les fractions $\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \frac{c'}{c}, \&c.$ de l'assemblage desquelles résulte la fraction continue. Si les numérateurs $a', b', c', \&c.$ sont chacun $= 1$, la série ou fraction continue précédente sera $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \&c.$

115. Pour réduire la fraction continue $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}$ en fraction ordinaire, j'opère en allant de droite à gauche & je réduis le dénominateur $b + \frac{c'}{c}$ de la seconde fraction en la fraction équivalente $\frac{bc + c'}{c}$; ainsi l'assemblage des deux fractions $\frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}$ peut être regardé comme une fraction dont le numérateur $= b'$ & dont le dénominateur est $\frac{bc + c'}{c}$; donc on aura la valeur de $\frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}$ en divisant b' par $\frac{bc + c'}{c}$; c'est-à-dire que cette valeur est $= \frac{b'c}{bc + c'}$; c'est pourquoi la fraction continue proposée est $= \frac{a'}{a} + \frac{b'c}{bc + c'}$. Mais $a + \frac{b'c}{bc + c'} = \frac{abc + ac' + b'c}{bc + c'}$; donc notre fraction continue est $= \frac{a'(bc + c')}{abc + ac' + b'c}$. Il est clair qu'en remontant ainsi de droite à gauche, on pourra réduire toute fraction continue, dont le nombre des termes sera fini en une fraction ordinaire.

Appellons S la valeur totale de la fraction continue

$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} + \&c.$; il est aisé de voir que si en allant de gauche à droite on prend la première fraction intégrante seule, puis les deux premières fractions intégrantes seules, puis les trois premières fractions intégrantes seules, & ainsi de suite, on aura des quantités alternativement plus petites & plus grandes que S ; c'est-à-dire, que

$$S < \frac{a'}{a}, S > \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}, S < \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}, \&c. \text{ Car dans}$$

la première expression $\frac{a'}{a}$, le dénominateur a est plus petit que le véritable dénominateur, puisque le dernier est formé de l'addition de a avec toutes les fractions qui suivent à droite. Dans la seconde expression le dénominateur b étant aussi trop petit, la fraction $\frac{b'}{b}$ est trop grande, & par conséquent le dénominateur $a + \frac{b'}{b}$ est trop grand; ainsi la fraction dont le numérateur est a' & le dénominateur $a + \frac{b'}{b}$ est trop petite. Il est maintenant facile de voir que l'assemblage des trois premières fractions est plus grand que S ; que l'assemblage des quatre premières fractions intégrantes est plus petit que S ; &c.

116. Soient A & B deux nombres entiers & positifs, mais $A > B$. Pour réduire la fraction $\frac{A}{B}$ en fraction continue, opérez comme si vous cherchiez le plus grand commun-diviseur de A & de B (31); divisez donc A par B pour avoir le quotient a ; divisez ensuite le dénominateur B par le reste, & nommez le quotient b ; divisez après cela le premier reste par le second, & faites le quotient $= c$; continuez ainsi en divisant toujours l'avant-dernier reste par le dernier reste, jusqu'à ce que vous parveniez à une division qui ne laisse aucun

reste, ce qui doit nécessairement arriver, puisque les restes sont des nombres entiers qui vont en diminuant; vous aurez la fraction continue $a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \&c.$ qui sera égale à la fraction $\frac{A}{B}$; & cette fraction continue contient un entier a .

Soit $\frac{A}{B} = \frac{1103}{887}$. Divisant 1103 par 887, on a le quotient $a = 1$, & le reste 216. Divisant 887 par 216, on aura le quotient $4 = b$ & le reste 23; on divisera 216 par 23, ce qui donnera le quotient 9 & le reste 9; on divisera encore 23 par 9, on aura le quotient 2 & le reste 5; on divisera 9 par 5, on aura le quotient 1 & le reste 4; on divisera 5 par 4, on aura le quotient 1 & le reste 1: enfin divisant 4 par 1, on aura le quotient 4 & le reste 0, de sorte que l'opération sera finie. Rassemblant donc par ordre les quotients trouvés, on aura cette série 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4; & la fraction continue cherchée sera $= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$.

Si nous retranchons 887 de 1103 pour avoir le reste 216, la fraction $\frac{216}{887}$ sera $= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$; or on trouvera facilement ce résultat en divisant 887 par 216; divisant ensuite 216 par le reste que donne la première division; divisant après cela le premier reste par le second; & ainsi de suite pour avoir les quotients 4, 9, 2, 1, 1, 4, dont on formera la fraction continue $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \&c.$

Et selon ce que nous avons dit ci-dessus, faisant $\frac{216}{887} = S$, nous aurons $S < \frac{1}{4}$, $S > \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$, $S < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$, &c.

Soit la fraction numérique & positive $\frac{A}{B}$, dans laquelle A est $> B$, telle que l'on ait $\frac{A}{B} = S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \&c.$

Cette fraction étant réduite en fraction ordinaire donne, en

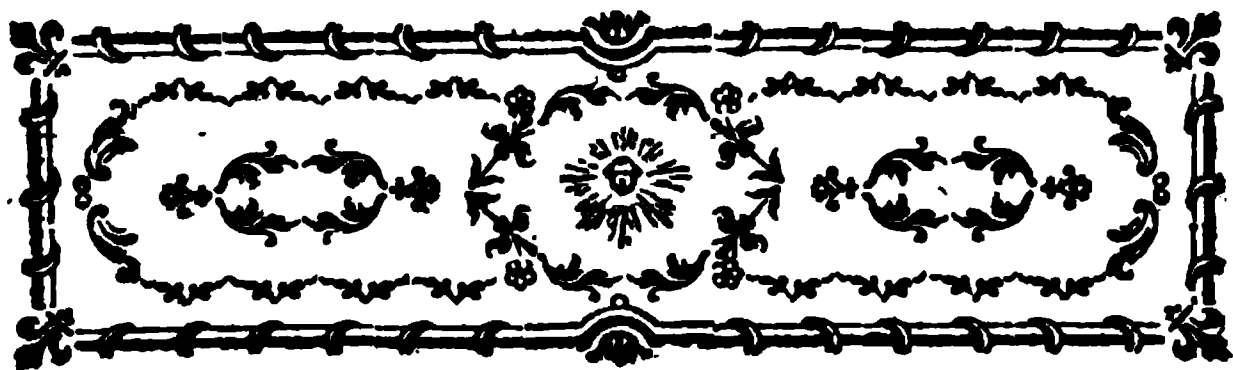
se bornant à trois fractions intégrantes, $S = \frac{bc+1}{abc+a+c}$;
& l'on ne peut avoir une valeur plus approchée de S au moyen
d'une fraction qui soit exprimée en des plus petits nombres
que la fraction $\frac{bc+1}{abc+a+c}$. De sorte que si l'on suppose

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{p}, \text{ en ajoutant une fraction intégrante}$$

de plus, pour avoir $S = \frac{bcp+b+p}{abcp+ab+ap+cp+1}$,
cette fraction sera exprimée par des plus grands nombres que
la précédente.

La fraction $\frac{216}{115}$ étant $= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$, si nous faisons
 $a=4, b=9, c=2, p=1$, nous aurons $\frac{bc+1}{abc+a+c}$
 $= \frac{9 \cdot 2 + 1}{4 \cdot 9 \cdot 2 + 4 + 2} = \frac{19}{78}$, & $\frac{bcp+b+p}{abcp+ab+ap+cp+1}$
 $= \frac{28}{115}$.

Fin du Calcul.



É L E M E N S

D E

G É O M É T R I E.

I. **L**A GÉOMÉTRIE est la science de l'espace ou de l'étendue en longueur , largeur & profondeur. La ligne n'est autre chose que l'étendue considérée sans largeur ni profondeur. La surface est l'étendue considérée en longueur & largeur seulement. On appelle *solide* * les trois dimensions prises ensemble, c'est-à-dire , la longueur , la largeur & la profondeur. L'extrémité d'une ligne s'appelle *un point* , & il est évident que la ligne n'ayant ni longueur ni profondeur (ou étant considérée comme telle) , on ne peut concevoir dans le point ni largeur , ni profondeur : on peut cependant , pour aider l'imagination , considérer le point comme une étendue d'une longueur , largeur & profondeur très-petites.

La ligne droite est celle qui va d'un point à

* On n'entend pas ici par *solide* un amas de parties matérielles ; mais seulement un espace long , large & profond , que cet espace contienne un corps , ou qu'il soit parfaitement vuide.

l'autre sans se détourner à droite ni à gauche, telle est ab (figure première). On peut la concevoir formée par le mouvement d'un point qui va de a en b sans se détourner d'aucun côté.

2. COROLLAIRE. Delà il suit que la ligne droite est la plus courte qu'on puisse tirer entre deux points.

La *ligne courbe* est celle qui est engendrée par le mouvement d'un point qui à chaque moment s'écarte très-peu de la ligne droite. Telles sont les lignes acb , adb . On appelle *ligne mixte*, une ligne pxb , composée d'une ligne droite px & d'une ligne courbe xb . Enfin j'appelle *ligne anguleuse* une ligne apx composée de deux lignes droites ap , px , qui n'ont pas la même direction.

3. COROLLAIRE. On ne peut tirer qu'une ligne droite ab , entre deux points a & b ; mais on peut faire passer tant de courbes que l'on voudra par ces mêmes points a & b .

La *ligne circulaire* est une ligne courbe (fig. 2) décrite par l'extrémité a de la ligne ac , qui tourne autour d'un point fixe c . Ce point c est appelé le *centre*, & il est évident que tous les points de la ligne circulaire (qu'on appelle encore *circonférence du cercle*) sont également éloignés du centre. On appelle *cercle* l'espace renfermé dans la circonférence *; c'est-à-dire, que le cercle est une *surface plane*, terminée par une ligne courbe qu'on appelle *circonférence*, dont tous les points sont également éloignés d'un point qu'on nomme *centre*.

4. COROLLAIRE. Delà il suit que toutes

* Quelquefois cependant on se sert du mot *cercle* pour désigner la circonférence.

les droites tirées du centre à la circonférence (on les appelle des *rayons*) sont égales. De même tous les diamètres sont égaux ; car un *diamètre* bd est une ligne droite , qui passant par le centre est terminée de part & d'autre à la circonférence ; de sorte qu'il est composé de deux rayons égaux. Mais les lignes qui sont terminées de part & d'autre à la circonférence sans passer par le centre , ne sont pas égales. Ces sortes de lignes sont appelées *cordes* ; or il est visible qu'une corde fd est d'autant plus petite qu'elle est plus éloignée du centre.

5. COROLLAIRE. Tout diamètre bd partage la circonférence & le cercle en deux parties égales ; car si l'on conçoit la partie bfd pliée sur le diamètre bd , il est clair que tous les points de la partie dfb , s'appliqueront exactement sur tous les points de la partie bda : car si le point f , par exemple , tomboit en dedans ou en dehors de la partie bda , tous les points de la circonférence ne feroient pas également éloignés du centre c .

Les Géomètres conçoivent la circonférence de tout cercle grand ou petit divisée en 360 parties égales , qu'ils appellent *degrés*. Chaque degré se divise en 60 parties égales qu'on nomme *minutes* , chaque minute en 60 parties égales qu'on nomme *secondes* , chaque seconde en 60 tierces , & ainsi de suite. Le caractère qui désigne le degré est $^{\circ}$, celui de la minute $'$, celui de la seconde $''$, celui des tierces $'''$, &c. ainsi $35^{\circ} 7' 12'' 30'''$ signifient 35 degrés , 7 minutes , 12 secondes , 30 tierces.

On appelle *cercles concentriques* , ceux qui ont un même centre c (fig. 3). On nomme *cercles excentriques* , ceux qui ont différens centres (fig. 4). On appelle *secantes* les lignes qui coupent un cer-

cle , telles que ad (fig. 16) ; & *tangentes* , celles qui le touchent sans le couper , comme ab (fig. 4). On appelle *arc d'un cercle* , une partie de sa circonférence xd (fig. 5). Un *secteur de cercle* est l'espace renfermé entre deux rayons md , mx , & l'arc xd terminé par ces deux rayons. On appelle *segment* l'espace compris entre un arc dx & sa corde.

6. Les *lignes perpendiculaires* sont celles qui tombent sur une autre ligne sans pencher d'un côté ni de l'autre. Ainsi hx (fig. 6) est perpendiculaire sur ab . Il est évident aussi que si hx ne penche ni du côté de a , ni du côté de b , ab ne penchera pas non plus ni du côté de h , ni du côté de x ; c'est-à-dire , que si une ligne est perpendiculaire sur une autre ligne , la seconde sera aussi perpendiculaire sur la première. On appelle *lignes obliques* celles qui en rencontrent une autre en penchant plus d'un côté que de l'autre : ainsi hf & ha sont obliques sur ab ; car la première penche plus du côté de a , que du côté de b , & la seconde penche plus du côté de b , que du côté de a . Les *lignes parallèles* sont celles qui sont partout également éloignées l'une de l'autre. Ainsi elles ne peuvent se rencontrer quelques prolongées qu'elles soient : telles sont les lignes hp , mn , dont tous les points correspondants h & m , p & n sont toujours également éloignés.

Un *angle* n'est autre chose que l'ouverture que laissent entr'elles deux lignes ac , dc , qui se rencontrent en un point c (fig. 3) ; ainsi dca est un angle. Il est visible qu'à proportion que le point d s'éloigne du point a , l'angle dca devient plus grand , aussi-bien que l'arc ad ; de sorte que l'arc ad croît en même temps que l'angle. Il est visible aussi

que l'angle $g e f$, dont les côtés sont plus petits que ceux de l'angle $a c d$, lui est cependant égal.

7. COROLLAIRE. Donc premièrement la grandeur d'un angle ne dépend pas de la grandeur de ses côtés. Secondement l'angle doit s'estimer par le nombre des degrés, minutes, secondes, &c. de l'arc de cercle compris entre ses côtés, en supposant que la pointe de l'angle est au centre du cercle.

Lorsqu'un angle est formé par deux lignes courbes, on l'appelle *curviligne*; mais on le nomme *mixtiligne* lorsqu'il est formé par une ligne droite & une ligne courbe : l'angle $p o n$ est curviligne, & l'angle $n a b$ est mixtiligne (fig. 4). Pour désigner un angle l'on se sert de trois lettres, dont celle du milieu désigne la pointe, & les autres les extrémités des côtés, ou bien on se sert d'une seule lettre située au *sommet* de l'angle. Un angle est appelé *droit* lorsqu'il a pour mesure le quart du cercle; il est *aigu* s'il a pour mesure moins que le quart du cercle. Ainsi l'angle $d c p$ (fig. 7) est droit, & l'angle $D c x$ est aigu. On appelle *angle obtus*, celui qui a pour mesure plus que le quart du cercle, tel est l'angle $d c a$. On appelle *complément* d'un angle la différence de cet angle avec un angle droit, & *supplément* d'un angle ce qui manque à cet angle pour valoir deux angles droits ou 180° .

8. COROLLAIRE VI. Donc les angles égaux ont des complémens & des supplémens égaux, & réciproquement si deux angles ont des complémens ou des supplémens égaux, ils sont égaux*.

* Quand on dit que les angles qui ont des complémens égaux sont égaux, on suppose qu'ils sont de la même espèce; c'est-à-dire, tous les deux aigus ou tous les deux obtus : car l'angle de 100°

DÉFINITIONS. Un espace terminé par des lignes est une *figure* ; & une figure de trois côtés s'appelle un *triangle*.

9. **THÉOREME.** Une ligne ay tombant sur une autre ligne bd , forme sur cette ligne deux angles acd , acb du même côté, qu'on appelle *contigus*, qui pris ensemble valent deux angles droits. En effet si du point c , comme centre, on décrit le cercle abd , il est évident que bd sera un diamètre & bad une demi-circonférence ; mais l'angle bca a pour mesure l'arc ba , & l'angle acd a pour mesure l'arc ad ; ainsi ces deux angles, pris ensemble, ont pour mesure la demi-circonférence bad , & par conséquent ils valent deux angles droits.

10. **COROLLAIRE I.** Deux angles contigus ou de suite sont supplémens l'un de l'autre, & si l'un dcp est droit, l'autre $bc p$ doit l'être ; & la mesure de l'angle droit doit être $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$; or dans ce cas pc ne penchant pas plus du côté de b que du côté de d est perpendiculaire sur bd .

11. **COROLLAIRE II.** Les angles dcy , bcy , formés par la ligne bd & la ligne ac prolongée, auront aussi pour mesure une demi-circonférence de cercle byd , & par conséquent ils vaudront ensemble 180° . Si par le point c on tire tant de lignes que l'on voudra, tous les angles bca , acp , pcx , xcd , formés au-dessus de la ligne bd , auront pour mesure la demi-circonférence bad . De même tous les angles formés au-dessous de bcd ,

& l'angle de 80° ont le même complément 10° , cependant ils ne sont pas égaux. Il y a des Auteurs qui disent que le complément d'un angle est ce qui manque à cet angle pour valoir un angle droit.

auront pour mesure la demi-circonférence inférieure byd ; donc ils vaudront deux angles droits; donc tous les angles qu'on peut former autour d'un point c valent précisément 360° .

12. THÉOREME. *Les angles opposés au sommet sont égaux.* Les angles opposés au sommet sont ceux qui ont leurs pointes opposées & qui sont faits par deux lignes qui se coupent : tels sont les angles acb , dcx (fig. 5), qui sont égaux; car l'angle acd est supplément de l'un & de l'autre; donc (8) ces angles sont égaux; donc, &c.

13 THÉOREME. *Une ligne fx qui coupe deux parallèles la , bd , forme avec elles des angles a , b situés de la même manière (fig. 8), on les appelle correspondans, égaux.* Car il est visible que les lignes bd , la ne sont pas plus inclinées l'une que l'autre sur la ligne fx du côté du point f ; autrement ces lignes s'approcheroient l'une de l'autre d'un côté, & par conséquent ne seroient point parallèles; mais c'est de l'inclinaison des lignes que dépend la grandeur des angles; donc l'angle a est égal à l'angle b .

On appelle *angles alternes-internes* les angles b & c situés entre les parallèles, mais de différens côtés de la sécante; *angles alternes-externes* les angles qui sont situés hors des parallèles de différens côtés de la sécante, comme a , x . Les angles alternes appartiennent toujours l'un à l'une des parallèles, & l'autre à l'autre parallèle.

COROLLAIRE I. Il suit de ce théorème que les angles alternes-internes sont égaux entr'eux, aussi-bien que les angles alternes-externes : car (par le théorème) $b = a$; or $a = c$, parce qu'ils sont opposés au sommet; donc $b = c$; donc 1° &c.

2° $a = b$, parce qu'ils sont correspondans, $b = x$, parce qu'ils sont opposés au sommet; donc $a = x$; donc 2° &c.

COROLLAIRE II. Deux angles soit internes, soit externes du même côté de la sécante, valent toujours deux angles droits; car a & m étant contigus valent deux angles droits (9); mais $a = b$; donc m & b valent deux angles droits. De plus g & b étant contigus valent 180° ; mais $b = a$; donc g & a valent deux angles droits; donc si l'un de ces angles est droit, l'autre le sera aussi; c'est-à-dire, si la sécante $f q$ est perpendiculaire à l'une des parallèles, elle le sera de même à l'autre.

14. COROLLAIRE III. Donc si deux angles ont leurs côtés parallèles, ils seront égaux ou supplémens l'un de l'autre. Les angles $r s p$, $f a i$ sont égaux; car $s = q$, parce qu'ils sont correspondans (à cause des parallèles $f q$, $r s$), $q = a$, parce qu'ils sont de même correspondans; donc $a = s$. Les angles $r s q$, $f a i$ ont leurs côtés parallèles; mais $r s q$ & $f q N$ sont correspondans, & celui-ci est correspondant de $f a l$ supplément de $f a i$. Si l'on conçoit que la ligne $r s M$ se meut sur $p q$ en restant toujours parallèle à la ligne $f q$, & qu'étant arrivée en q , l'angle $r s p$ (qui est devenu $f q p$), ou son opposé au sommet $M s q$ (qui est devenu $A q N$) se meut le long de la ligne $f q$, de manière que la ligne $r s$ soit toujours située sur $f q$, jusqu'à ce que la ligne $s p$ tombe sur $a i$, l'angle $r s p$ se confondra avec $f a i$, & l'angle $M s q$ sera opposé au sommet à l'angle $f a i$; mais les angles $r s q$, $M s p$ ne se confondront avec l'angle $f a i$, ni ne lui seront opposés au sommet. On peut donc, par ce qu'on vient de

dire , connoître dans quels cas les angles dont les côtés sont parallèles sont égaux ou supplémens l'un de l'autre. En général si les angles rsp , fai ; dont les côtés sont parelleles , ont leurs pointes tournées vers la même région ils sont égaux ; & comme l'angle Msq est égal rsp , on peut dire aussi que deux angles fai , Msq seront égaux toutes les fois qu'ils auront leurs côtés parallèles , & que l'un des deux (en prolongeant ses côtés , s'il le faut) sera opposé au sommet à un angle qui aura sa pointe tournée vers la même région que l'autre. Quand dans la suite de cet Ouvrage on conclura que les angles dont les côtés sont parallèles sont égaux, ils ne se trouveront jamais dans le cas de ceux qui sont supplémens l'un de l'autre.

15. THÉOREME. *Si les angles correspondans sont égaux , les lignes seront parallèles ; il en sera de même si les angles alternes-internes , ou alternes-externes , ou si deux angles m , b , ou a , g , internes ou externes situés du même côté de la sécante , l'un appartenant à la ligne supérieure & l'autre à l'inférieure sont égaux.* Car dans tous ces cas les lignes la , bd doivent être également inclinées sur la sécante $f q$ du même côté , ce qui ne peut être , à moins qu'elles ne soient parallèles.

16. PROBLEME. *Par un point i mener une parallèle à la ligne bd .* Du point i , comme centre , & d'une ouverture de compas à discrétion décrivez un arc de cercle th , du point h où cet arc rencontre la ligne bd , & de la même ouverture de compas décrivez l'arc di . Ouvrez le compas de d en i , portez cette ouverture de b en t ; par le point t & le point i tirez la ligne it & le problème sera résolu. En effet les angles hit , ihd

alternes-internes sont égaux étant mesurés par des arcs égaux décrits de la même ouverture de compas ; donc les lignes bd , ti sont parallèles.

17. PROBLEME. *Mener une perpendiculaire sur une ligne ab (fig. 9).* Des points a & b , comme centres & d'une même ouverture de compas *, décrivez deux arcs xx , gg qui se rencontrent en h au-dessus de ab ; faites la même chose en-dessous, & par les points h , h tirez la ligne hph ; vous aurez la perpendiculaire que vous demandez. Car tous les points de l'arc xx sont également distans du centre a de cet arc, de même tous les points de l'arc gg sont également distans du centre b ; donc les points h , qui sont les intercessions de ces arcs, sont également distans de a & de b ; donc aussi tous les autres points de la ligne hh sont également distans de a & de b ; car la position d'une ligne droite ne dépendant que de deux points, le point p de cette ligne ne sauroit être plus près de a que de b , à moins que la ligne hph ne soit pas droite. Donc la ligne hh , a tous ses points également distans de a & de b , donc elle est perpendiculaire sur ab , c'est-à-dire qu'elle ne penche pas plus du côté de a que de b , & de plus elle coupe ab en deux également.

COROLLAIRE I. De ce que nous venons de dire, il suit que toutes les fois qu'une ligne droite aura deux de ses points également distans des deux autres points d'une autre ligne, elle lui sera perpendiculaire.

COROLLAIRE II. Donc pour mener une perpendiculaire sur la ligne ab (fig. 10) par un point d de

* Il faut que l'ouverture du compas soit plus grande que la moitié de la ligne ab , autrement les arcs xx , gg ne se couperont pas.

cette ligne , il suffit , après avoir décrit du point d comme centre une demi-circonférence acb , de décrire deux arcs qui se coupent en h , en décrivant ces arcs de la même ouverture de compas , & prenant pour centres les points a & b , où la demi-circonférence coupe la ligne donnée ab . Tirant ensuite la ligne hd , dont les points h & d sont également distans des points a & b , l'on aura la perpendiculaire demandée.

COROLLAIRE III. Si du point h , hors d'une ligne ab (fig. 11), on veut mener une perpendiculaire à cette ligne ; du point h on décrira un arc de cercle cc , qui coupe la ligne ab en deux points , des points d'intersection comme centre & de la même ouverture de compas décrivant deux arcs qui se couperont en p , l'on tirera la ligne hp , qui sera la perpendiculaire demandée. En effet les points c & c sont également éloignés du point p & du point h (centre de l'arc cc) ; donc la ligne hp a deux points également éloignés des deux autres points de la ligne ab ; donc (Corollaire I.) la ligne hp est perpendiculaire sur ab .

18. THÉOREME. *D'un point p dans une ligne , ou d'un point h pris hors d'une ligne ab , on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette ligne (fig. 6). Car toute autre ligne cp , ou hd penche nécessairement d'un côté ou de l'autre de la ligne ab ; donc , &c.*

COROLLAIRE. Donc deux lignes hp , mn perpendiculaires sur une même ligne ab , sont parallèles : car si elles se rencontroient , on pourroit du point de rencontre tirer deux perpendiculaires sur la même ligne ab , ce qui (par le Théorème) est impossible.

19. THÉOREME. *La perpendiculaire est plus courte*

que l'oblique tirée d'un même point h sur la même ligne ab . Ayant prolongé hp jusqu'en x , en sorte que $ph = px$; il est visible qu'en pliant la figure de manière que a f serve de plis, & que hp tombe sur px , hd tombera sur dx , & ha sur ax ; donc $hd = dx$, & $ha = ax$; mais la ligne anguleuse $hd > hx$; donc hd moitié de la première ligne est plus grande que hp , moitié de la seconde; donc la perpendiculaire hp est plus courte que dh ; donc, &c.

COROLLAIRE I. La ligne anguleuse hax s'écartant plus de la droite hpx , que la ligne anguleuse hdx , la première doit être plus grande que hd ; donc ha moitié de la première ligne anguleuse est plus longue que hd , moitié de l'autre; donc de toutes les obliques, celles qui s'écartent le plus de la perpendiculaire, sont les plus longues. Mais si deux obliques hf , hd s'écartent également de la perpendiculaire, l'une à droite & l'autre à gauche il est visible qu'elles seront égales; & parce qu'il ne peut y avoir que deux droites également éloignées de la perpendiculaire, l'une à droite & l'autre à gauche, on ne peut d'un même point h , mener plus de deux lignes égales sur une même ligne ab .

COROLLAIRE II. Il suit du Corollaire précédent que si la perpendiculaire hp est la même (ce seroit la même chose si l'on avoit deux perpendiculaires égales) & si les obliques hd , hf sont égales de part & d'autre, leur écartement de la perpendiculaire, savoir dp , pf (on appelle cet écartement, *éloignement de perpendicule*) sera égal de part & d'autre; si les obliques & les éloignemens de perpendicule sont égaux, la perpendiculaire hp (qu'on peut prendre pour un éloignement de perpendicule, en

en prenant dp , fp pour les perpendiculaires) sera égale de part & d'autre; & enfin si la perpendiculaire & l'éloignement de perpendicule sont égaux de part & d'autre, les obliques seront évidemment égales; car alors pliant la figure de maniere que le plis tombe sur hp , f tombera sur d ; donc $hd = hf$. De même si $hd = hf$, hp restant la même, les deux obliques égales seront également éloignées de la perpendiculaire (Corollaire précédent); donc les éloignemens de perpendicule seront égaux. Donc de ces trois choses, la perpendiculaire, l'oblique, l'éloignement de perpendicule, si deux sont égales de part & d'autre, la troisième le sera aussi.

COROLLAIRE III. Donc une ligne ca (fig. 12) tirée du centre c sur la tangente ga , au point de contingence a , est perpendiculaire sur cette tangente; car la ligne ca est la plus courte qu'on puisse mener du point c à la ligne ga , puisque toute autre ligne menée du point c à la ligne ga sortiroit du cercle & seroit par conséquent plus longue que le rayon ca . De plus la tangente ne touche le cercle qu'en un seul point, autrement du même point on pourroit tirer deux perpendiculaires sur la même ligne; ce qui (18) est impossible. Il n'est pas moins évident qu'une ligne ga perpendiculaire à l'extrémité a d'un rayon ca est une tangente.

20. THÉOREME. Une ligne cp menée du centre d'un cercle perpendiculairement à la tangente gb coupe les cordes parallèles à cette tangente en deux parties égales (fig. 13). Car cp est perpendiculaire à ces cordes (13), & parce que cp a de plus un point c également éloigné de a & de d (points de la circonférence du cercle), le point d'intersection s doit être aussi égale-

ment éloigné de a & de d , autrement la ligne cp pencheroit d'un côté ou de l'autre de la ligne ad , & ne lui seroit pas par conséquent perpendiculaire. Donc cp coupe ad en deux également; donc, &c.

REMARQUE. Si une ligne cp a deux points c, s également éloignés chacun des extrémités a, d de la corde ad , elle lui est perpendiculaire, parce qu'elle ne penche pas plus d'un côté que de l'autre par rapport à cette corde.

COROLLAIRE I. Si le point d'intersection s est également éloigné des extrémités a & d de la corde ad , & que la ligne cs soit perpendiculaire à cette corde, elle aura par la démonstration du théorème, tous ses autres points également éloignés de a & de d ; donc cs passera par le centre c , point également éloigné de a & de d .

COROLLAIRE II. Donc une ligne cs qui passe par le sommet d'un angle acd , dont les côtés sont égaux, & par le milieu du côté opposé à cet angle, passe aussi par le milieu de l'arc & le divise en deux parties égales, aussi-bien que l'angle mesuré par cet arc.

COROLLAIRE III. Il suit du Théorème, de la Remarque & du Corollaire précédent que si des trois propriétés passer par le centre, être perpendiculaire à la corde, couper la corde en deux parties égales, une ligne cs en a deux, elle doit avoir la troisième.

21. PROBLÈME. *Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés a, b, d (fig. 14). Ayant joint ces points par les lignes ab, db , coupez ces lignes (17) en deux également par les perpendiculaires hh, xx , le point d'intersection c de ces perpendiculaires sera le centre du cercle cherché; & si du point c & de l'intervalle cb, ca ou cd on décrit une circonférence, elle passera par les*

trois points donnés ; car tous les points de la ligne hh étant également éloignés (17) de a & de b , & tous ceux de xx étant aussi également éloignés de b & de d , le point c commun aux deux lignes hh , xx , sera également éloigné de a , b , d ; donc, &c. *

COROLLAIRE. Il suit de-là que si l'on avoit un arc abd dont on voulût trouver le centre, après avoir tiré deux cordes ab , bd dans cet arc, on chercheroit le centre c , comme nous venons de le dire.

22. PROBLEME. *Couper un arc ab en deux parties égales.* Tirez la perpendiculaire hh de manière qu'elle coupe la corde ab en deux également (17), cette ligne passera par le centre c (10) ; donc elle aura un point c également éloigné de a & de b , & puisque d'ailleurs elle passe par le milieu de ab , elle aura deux points c , s également éloignés de a & de b ; donc tous les points de cette ligne seront également éloignés de a & de b ; donc le point o est également éloigné de a & de b ; ainsi l'arc ao est égal à l'arc ob ; donc, &c.

23. THÉOREME. *Les arcs compris entre une tangente & une corde, ou entre deux cordes parallèles, sont égaux (fig. 13).* Car la ligne cp passant par le centre & aboutissant au point de contingence est perpendiculaire sur la tangente gh (19), & par conséquent sur les parallèles ad , mn (13) ; mais le point c de la ligne cp est également éloigné de a & de d , de m & de n ; donc tous les autres points de la ligne cp sont également éloignés de a

* Pour que le Problème soit possible, il faut que les trois points ne soient pas en ligne droite ; car il est visible qu'une droite ne peut rencontrer un cercle en plus de deux points.

& de d ; donc $ap = pd$; de même $mp = pn$; donc $ap - mp = dp - np$, ou $am = nd$; donc, &c.

24. THÉOREME. De toutes les sécantes extérieures tirées d'un point a à la partie convexe bd de la circonférence, la plus courte est celle qui prolongée passeroit par le centre (fig. 15); mais si les sécantes sont tirées à la partie concave db (fig. 16), celle qui passe par le centre est la plus longue. Si les sécantes sont intérieures, la plus courte sera celle qui prolongée passeroit par le centre lorsque l'origine se trouve au-dessous du centre (fig. 17); mais si le point a est au-dessus du centre (fig. 18), la plus longue est celle qui passe par le centre. Ayant tiré le rayon dc , la ligne anguleuse adc (fig. 15) est plus longue que abc ; donc retranchant de ces deux lignes les rayons égaux cb , cd , il restera $ad > ab$; donc 1°. &c. 2°. (fig. 16) $acd > ad$; mais $acd = acb$, puisque ces deux lignes ayant la partie commune ac , ont encore les parties égales dc , bc ; donc $acb > ad$; donc 2°. &c. 3°. (fig. 17) $cad > cd = cb = ca + ab$; donc $(ad + ac - ac) > (ca + ab - ac)$, ou $ad > ab$; donc 3°. &c. 4°. (fig. 18) $ac + cd = ac + cb$; or $ac + cd > ad$, puisque ad est une ligne droite & acd une ligne anguleuse; donc $ab > ad$; donc 4°. &c.

COROLLAIRE. Donc si le point a est à la circonférence (fig. 19), le diamètre $acb = acd$ sera plus grand que la corde ad ; donc de toutes les cordes le diamètre est la plus grande.

REMARQUE. D'un point a pris en dedans ou en dehors, ou à la circonférence d'un cercle (fig. 15, 16, 17, 18 & 19) l'on ne peut évidemment tirer que deux lignes ad , ap , qui s'éloignent également de la ligne ab , l'une d'un côté

& l'autre de l'autre; & par conséquent il ne peut y avoir (fig. 19) que deux cordes égales ad , ap tirées d'un même point a de la circonférence d'un cercle; c'est-à-dire, que les cordes également éloignées du centre sont égales. Il est d'ailleurs évident que les plus petites cordes répondent aux plus petits arcs & réciproquement.

25. THÉOREME. *On ne peut faire passer aucune ligne droite entre la circonférence & la tangente; mais on peut y faire passer une infinité de courbes.* Car si ab (fig. 20) est tangente, ca lui sera perpendiculaire (19); donc ca seroit oblique sur la ligne ad qu'on voudroit faire passer entre la tangente ab & la circonférence; donc du point c menant co perpendiculaire sur ad , co seroit plus courte que ca (19); donc le point o est dans le cercle; donc ad coupe le cercle, & par conséquent ne passe pas entre la circonférence & la tangente; donc, &c. Mais si dans la figure 21 on prolonge ac jusqu'en p , & que du rayon pa & du point p comme centre on décrive le cercle adh , il est évident que ab sera encore tangente à ce cercle, comme elle l'est au cercle ao , & de plus que ces deux cercles n'auront d'autre point commun que le point a ; car le point d , par exemple, ne sauroit être commun aux deux cercles. En effet tirant dc , on aura, par rapport au grand cercle, une sécante intérieure, qui prolongée ne passeroit point par le centre c . Donc (24) $dc > ac = co$; donc le point o du petit cercle ne peut pas se confondre avec le point d du grand; donc ces deux cercles n'ont d'autre point commun que le point a , & le grand embrasse le petit sans le couper; donc, &c. En prolongeant le rayon ap on pourroit

Z ;

décrire un troisième cercle qui embrasseroit le cercle adh , & n'auroit avec lui d'autre point commun que le point a , & ainsi de suite. Donc on peut faire passer autant de circonférences que l'on voudra entre la tangente ab & la petite circonférence, sans couper ni l'une ni l'autre ligne.

REMARQUE. Cela vient de ce que la circonférence du cercle adh se détourne pour embrasser la petite circonférence, & la circonférence d'un troisième cercle se détourneroit de même pour embrasser le cercle adh ; mais la ligne droite ad allant toujours dans la même direction, doit couper la petite circonférence.

COROLLAIRE. De-là il suit que l'espace bo , si petit qu'il soit, peut se diviser en une infinité de parties, puisqu'en faisant passer tant de cercles qu'on voudra (on prend ici la circonférence pour le cercle) entre la tangente & la circonférence, ces cercles couperont la ligne ob en tant de parties que l'on voudra.

De la mesure des Angles.

26. Nous avons déjà dit (7) que la mesure d'un angle qui a son sommet au centre d'un cercle, doit s'estimer par le nombre des degrés, minutes, secondes, &c. de l'arc compris entre ses côtés; de sorte qu'un angle qui a son sommet au centre du cercle, a pour mesure l'arc compris entre ses côtés. D'où il suit qu'étant donné un angle bac (fig. 22), pour faire un autre angle hfg sur la ligne fg , égal au premier, du point a & d'un intervalle à discrétion ac décrivez l'arc bc , du point f comme centre & de la même ouverture de compas décrivez un arc indéfini gh , prenant

avec le compas la grandeur de l'arc bc , portez-la de g en h , par les points f , h , tirez la ligne fh , & l'angle hfg sera égal à l'angle bac : car ces deux angles sont mesurés par des arcs égaux décrits de la même ouverture de compas.

27. THÉOREME. *L'angle à la circonférence formé par deux cordes ab , ad , ou par une tangente ga & par une corde ba , a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés (fig. 12).* Car si l'on suppose qu'un de ses côtés soit un diamètre, en tirant par le centre c la ligne hf parallèle au côté ba , les angles bad , $fc d$ (étant correspondans) sont égaux (13); mais l'angle $fc d$ ayant son sommet au centre, a pour mesure l'arc $fd = ah$ (parce que ces deux arcs mesurent des angles opposés au sommet) $= bf$ à cause des parallèles ba , fh (23); donc $fd = bf$; donc $bad = fc d$ a pour mesure fd ou bf , ou la moitié de l'arc compris entre ses côtés. Mais par la propriété de la tangente, la ligne ca lui est perpendiculaire, & par conséquent l'angle gad est droit; donc gad a pour mesure la moitié de la demi-circonférence abd , ou $\frac{ab}{2} + \frac{bd}{2}$; or bad a pour mesure $\frac{bd}{2}$; donc gab a pour mesure $\frac{ab}{2}$; donc, &c. *

REMARQUE. Nous avons supposé qu'un des côtés ad de l'angle passoit par le centre, mais la

* L'angle formé par une corde & une tangente, s'appelle *angle du segment*, tel est l'angle gab . L'angle bad formé par deux cordes; ou par un diamètre & une corde, est appelé *angle inscrit*.

même chose a lieu dans le cas contraire (fig. 23) ; car l'angle baf , entre les côtés duquel se trouve le centre c , peut être divisé en deux parties par le diamètre ad , & par le Théorème présent, l'une de ses parties a pour mesure $\frac{bd}{2}$, & l'autre $\frac{df}{2}$; or ces deux moitiés valent $\frac{bf}{2}$; donc, &c. A l'égard de l'angle gaf , hors duquel se trouve le centre c , ayant tiré le diamètre ad , il est visible, par le Théorème, que l'angle dag a pour mesure $\frac{gd}{2} = \frac{df}{2} + \frac{fg}{2}$; mais l'angle fad a pour mesure $\frac{df}{2}$; donc l'angle gaf a pour mesure $\frac{fg}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc l'angle pab formé par une corde ab , & le prolongement pa d'une autre corde, a pour mesure la moitié de la somme des arcs ab , ag soutendus par ces cordes ; car les angles pab , bag sont deux angles contigus, qui par conséquent (9) valent deux angles droits, c'est-à-dire, la moitié du cercle entier. Or le seul angle bag vaut la moitié de l'arc bdg ; donc l'angle pab a pour mesure la moitié du reste du cercle, c'est-à-dire $\frac{ab}{2} + \frac{ag}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc 1°. les angles inscrits a & b appuyés sur le même arc df sont égaux (fig. 24), & chacun d'eux vaut la moitié de l'angle central dcf . 2°. Un angle $b ad$ appuyé sur le diamètre bd , & qui a son sommet à la circonférence, est droit (fig. 25), parce qu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence bfd , ou 90° . L'angle $f ad$ appuyé sur un arc plus petit que la

demi-circonférence est aigu, & l'angle bag , appuyé sur un arc bfg plus grand que la demi-circonférence est obtus. En général le plus grand angle est mesuré par la moitié d'un plus grand arc, & un plus petit angle par la moitié d'un plus petit arc, lorsqu'il est question des angles inscrits, ou des angles qui ont leur sommet à la circonférence du cercle.

REMARQUE. Si deux angles dcf , daf sont appuyés sur la même base df (fig. 24) & que leur sommet soit situé sur la même ligne ac perpendiculaire à df , celui qui aura son sommet a plus éloigné de df , sera le plus petit, puisqu'il est évident qu'à proportion que les côtés da , af s'allongent pour que le point a parvienne jusqu'à la circonférence du cercle dfb , l'angle daf doit diminuer; à plus forte raison il diminuera davantage si les côtés se rencontrent au-delà de cette circonférence.

28. PROBLEME. *Sur l'extrémité de la ligne ab (qu'on suppose ne pouvoir être prolongée) mener une perpendiculaire db (fig. 26).* D'un point quelconque c hors de cette ligne & d'un intervalle cb décrivez un cercle dba : par le point a , où ce cercle coupe la ligne ab , tirez le diamètre acd , & du point d la ligne db , qui sera perpendiculaire sur ab . En effet l'angle dba est appuyé sur un diamètre; donc (27) il est droit; donc, &c.

29. PROBLEME. *D'un point a hors d'un cercle $d p$, mener une tangente à ce cercle (fig. 27).* Divisez en deux également la distance ac entre le point a & le centre du cercle donné; du point o milieu de la ligne ac & de l'intervalle ao , décrivez un cercle apd qui coupera le premier en d & en p . Par le point a & les points d & p tirez les lignes ad , ap , elles seront tangentes du cercle adp : car les

angles adc , apc , étant appuyés sur le diamètre ac , sont droits; donc les lignes ap , ad sont perpendiculaires sur les rayons cd , cp ; donc les lignes ap , ad sont des tangentes (19).

30. THÉOREME. *L'angle excentrique* * bad *a pour mesure la moitié de deux arcs* bd , fg *compris entre ses côtés prolongés* (fig. 28). Car ayant tiré gh parallèle à fd , les angles correspondans bad , bgh seront égaux (13); or (27) la mesure de l'angle bgh est $= \frac{bdh}{2} = \frac{bd}{2} + \frac{gh}{2}$; mais $dh = fg$ (23) à cause des parallèles fd , gh ; donc la mesure de l'angle bad est $= \frac{bd}{2} + \frac{fg}{2}$; donc, &c.

REMARQUE. Si la ligne gh devenoit tangente, l'arc gh s'évanouiroit, & alors gf seroit égal à gd , & le Théorème auroit également lieu.

31. THÉOREME. *L'angle circonscrit* dab (*c'est-à-dire dont le sommet est hors du cercle*) *a pour mesure la moitié de l'arc concave* bd , *compris entre ses côtés moins la moitié de l'arc convexe* gf (fig. 29). Car ayant tiré gx parallèle à da , les angles correspondans dab , xgb seront égaux; mais l'angle inscrit xgb a pour mesure $\frac{xb}{2}$; & xb est égal à $db - dx$, & dx est $= gf$ à cause des parallèles df , gx ; donc $\frac{xb}{2} = \frac{db}{2} - \frac{fg}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE. Si la ligne ad devient tangente, de manière que ad se confonde avec ap , l'arc fpd

* Un angle qui a son sommet entre la circonférence & le centre, est appelé *ex-centrique*; mais on appelle *angle circonscrit* celui qui a son sommet hors du cercle.

s'évanouira , les deux points f & d se confondront en p , & l'angle pab aura pour mesure $\frac{pnb}{2} - \frac{pg}{2}$.

On voit aussi que l'angle pam , formé par deux tangentes ap , am , a pour mesure la moitié de l'arc concave , moins la moitié de l'arc convexe , c'est-à-dire $\frac{pbm}{2} - \frac{pgm}{2}$.

Des Polygones.

32. Une *figure rectiligne* ou un *polygone rectiligne* , est un espace renfermé par des lignes droites , qu'on appelle *côtés du polygone* , ou *de la figure*. Il est évident qu'il faut au moins trois lignes pour renfermer un espace. Les polygones prennent différens noms , selon le nombre de leurs côtés. Le *triangle* est un polygone de trois côtés , le *quadrilatère* en a quatre , le *pentagone* cinq , l'*exagone* six , l'*eptagone* sept , l'*octogone* huit , l'*énéagone* neuf , le *décagone* dix , l'*ondécagone* onze , le *dodécagone* douze , &c. On appelle *polygone régulier* celui dont les côtés sont égaux entr'eux aussi bien que les angles ; dans le cas contraire les polygones sont dits *irréguliers*. Les *polygones symétriques* sont ceux qui sont composés des côtés parallèles & égaux deux à deux ; d'où il suit qu'ils doivent avoir un nombre pair de côtés.

Un triangle , dont les trois côtés sont égaux entr'eux , s'appelle *triangle équilatéral* : tel est le triangle bac (fig. 30) ; si deux de ses côtés seulement sont égaux , on le nomme *isocelle* , tel est le triangle bac (fig. 31) ; mais si les trois côtés du triangle bac (fig. 32) sont inégaux , le triangle est

appelé *scalene*. Un triangle dont tous les angles sont aigus s'appelle *acutangle*, celui qui a un angle droit s'appelle *triangle rectangle*, & l'on nomme *triangle obtusangle* celui qui a un angle obtus. La figure 30 représente un triangle acutangle, la figure 31 un triangle rectangle, & la figure 32 un triangle obtusangle. Dans un triangle le côté opposé à un angle s'appelle *la base* de cet angle; ainsi bc est la base de l'angle a (fig. 32). Mais si l'angle a est droit (fig. 31) la base bc est appelée *hypothénuse*.

33. THÉOREME. Les trois angles d'un triangle quelconque abc valent deux angles droits (fig. 33). Ayant fait passer une circonférence de cercle par les trois points b, a, c (21), chaque angle aura pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés; donc les trois angles a, b, c auront pour mesure $\frac{bc}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{ab}{2} = \frac{abca}{2} = 180^\circ$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit ou un seul angle obtus, autrement la somme de ses trois angles vaudrait plus de deux angles droits.

COROLLAIRE II. Si le triangle bac est supposé rectangle en a , les angles b & c , situés sur l'hypothénuse bc , vaudront un angle droit, & seront complémens l'un de l'autre (7).

COROLLAIRE III. Si dans un triangle on connoît deux angles, on connoîtra le troisième, en ôtant la valeur de ces deux angles de 180° .

COROLLAIRE IV. Dans un triangle abc , le plus grand angle a est opposé au plus grand côté, & le plus petit angle b au plus petit côté ac , & réciproquement le plus grand côté est opposé

au plus grand angle , & le plus petit côté au plus petit angle ; car si a est plus grand que b , donc la moitié de l'arc bc , mesure du premier angle , sera plus grande que la moitié de l'arc ac , mesure du second ; donc l'arc bc sera plus grand que l'arc ac ; donc la corde bc sera plus grande que la corde ac ; donc 1°. &c. 2°. si la corde bc est plus grande que la corde ac , l'arc bc sera plus grand que l'arc ac , & la moitié du premier arc plus grande que la moitié du second , c'est-à-dire que la mesure de l'angle a sera plus grande que la mesure de l'angle b ; ainsi l'angle a sera plus grand que l'angle b .

COROLLAIRE V. Il suit du dernier Corollaire que si les trois angles a , b , c sont égaux , les trois côtés opposés le seront aussi , c'est-à-dire qu'un triangle équiangle est équilatéral & réciproquement. De plus si deux angles d & b seulement sont supposés égaux , les côtés opposés à ces angles seront égaux , & réciproquement si un triangle a deux côtés égaux , les angles opposés à ces côtés seront égaux ; donc dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

34. THÉOREME. *L'angle extérieur acd formé par un côté ac & le prolongement cd d'un autre côté vaut les deux angles intérieurs opposés a & b (fig. 32).* Car l'angle acd avec l'angle acb valent deux angles droits ; mais le même angle acb avec les deux autres angles a & b valent de même 180° (Théorème précédent) ; donc l'angle acd vaut les deux angles b & a opposés ; donc , &c.

35. THÉOREME. *Deux triangles abc , dfg (fig. 34) qui ont un angle a & d égal , & les côtés qui comprennent cet angle égaux de part & d'autre , sont*

égaux en tout. Car si l'on conçoit le côté df exactement appliqué sur ab , le point d sur le point a , le point f sur le point b ; ces deux côtés égaux se confondront; & parce que l'angle a est égal à l'angle d , le côté dg tombera sur ac & le point g sur le point c ; donc fg tombera sur bc ; donc les deux triangles se confondront; donc ils sont égaux.

COROLLAIRE. Deux triangles abc , dfg qui ont leurs trois côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux en tout. Car posant df sur ab , ces deux côtés égaux se confondront; or je dis que dg tombera sur ac , le point g sur le point c , & que l'angle d sera égal à l'angle a ; car autrement fg ne seroit pas $= bc$, puisque le côté dg s'écarteroit plus ou moins du côté df , que ac de ba ; donc l'angle a est égal à l'angle d . Mais les deux côtés qui comprennent l'angle a & ceux qui comprennent l'angle d sont égaux; donc par le Théorème, les deux triangles sont égaux.

36. THÉOREME. Deux triangles abc , fdg qui ont un côté bc , fg égal de part & d'autre, & les angles b & c , f & g sur ce côté, égaux chacun à chacun, sont égaux en tout. Car posant fg sur bc , le point f sur le point b , le point g sur le point c , il est visible (à cause de $f = b$ & de $g = c$) que fd tombera sur ba & gd sur ca ; donc d tombera sur a , & les deux triangles se confondant ne feront qu'un seul & même triangle. Ils sont donc égaux.

37. PROBLEME. Faire un triangle abc égal au triangle dfg . Ayant tiré $bc = fg$, faites (26) l'angle abc égal à l'angle dfg , & l'angle acb égal à l'angle dgf , tirant les lignes ab , ac jus-

qu'à ce qu'elles se rencontrent en a , vous aurez les deux triangles bac , dfg qui auront un côté égal de part & d'autre, & les deux angles sur ce côté égaux chacun à chacun; donc par le Théorème précédent ces triangles seront égaux.

38. THÉOREME. La somme de tous les angles d'un Polygone $abcdf$ (fig. 35) vaut autant de fois deux angles droits, que le Polygone a de côtés moins deux. Car si du sommet d'un des angles a du Polygone on tire à tous les autres angles (excepté aux deux angles voisins) des lignes ad , ac , il est visible qu'on formera autant de triangles moins deux qu'il y a de côtés, & les angles de ces triangles seront formés des angles mêmes du Polygone. Mais les angles de chacun de ces triangles valent deux angles droits; ainsi les angles du Polygone valent autant de fois deux angles droits, qu'il a de côtés moins deux.

REMARQUE. Lorsque dans les Polygones il y a un angle rentrant d^* (fig. 36), le Théorème ne peut être vrai, à moins qu'on ne prenne pour cet angle son supplément à 360° , parce que les angles adf , adc , joints à l'angle fdc , valent 360° (11); or la somme des angles adf , adc jointe aux autres angles du Polygone, vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc pour avoir la somme des angles d'un Polygone de 8 côtés, il faut multiplier 180° par $8 - 2 = 6$, le produit 1080° sera la valeur des angles du Polygone. En général appel-

* On appelle *angle rentrant* celui qui rentre dans la figure, l'*angle saillant* est celui qui sort pour ainsi dire de la figure.

lant n le nombre des côtés , s la somme des angles du Polygone , r l'angle droit , on aura $s = 2r \times (n - 2) = 2nr - 4r$.

COROLLAIRE II. Si le Polygone est régulier , la valeur de chaque angle se trouvera en divisant la somme des angles par le nombre des angles ou des côtés (parce que dans ce cas tous les angles du Polygone sont égaux (32)) ; ainsi la valeur de chaque angle sera $= \frac{2nr - 4r}{n}$. Dans le cas du trian-

gle équilatéral , cette quantité , que j'appelle x , est $= 60^\circ$; pour le quarré on a $x = 90^\circ$, 108° pour le pentagone , 120° pour l'exagone , 135° pour l'octogone , &c.

39. THÉOREME. *La somme des angles extérieurs d'un Polygone vaut 4 angles droits , ou 360° (fig. 37).* Car chaque angle intérieur abc , joint à son extérieur $c b p$, vaut deux angles droits , puisque ce sont deux angles contigus ; donc la somme des angles intérieurs & extérieurs vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a d'angles ou de côtés . Mais (Théorème précédent) les seuls angles intérieurs valent autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux ; donc les angles extérieurs valent seulement deux fois deux angles droits , ou quatre angles droits.

COROLLAIRE. Si le Polygone est régulier , les angles extérieurs seront égaux entr'eux aussi-bien que les intérieurs ; donc l'angle extérieur d'un Polygone régulier se trouvera en divisant 360° par le nombre des angles ou des côtés , ou par n ; ainsi la formule générale de la valeur y de l'angle extérieur d'un Polygone régulier quelconque sera $y = \frac{360}{n}$. Si $n = 8$ l'on aura $y = 45$; c'est-à-dire que
l'angle

l'angle extérieur de l'octogone régulier vaut 45° .

40. THÉOREME. Si par tous les angles a, b, d &c. d'un Polygone régulier (fig. 38) on tire des lignes ac, bc, dc &c. qui partagent ces angles en deux également, ces lignes partageront le Polygone en autant de triangles égaux qu'il a de côtés. Car l'angle a étant égal à l'angle b (puisque le Polygone est supposé régulier), bac moitié de a fera $\simeq ab$ moitié de b ; donc le triangle bac a deux angles égaux bac, abc ; donc (33) les côtés ac, bc opposés à ces angles sont égaux. On démontrera de même que le côté $bc \simeq dc$, &c.; donc les deux triangles bac, bdc qui ont tous leurs côtés égaux seront égaux (35): on peut prouver la même chose pour les autres triangles; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc si du point c comme centre, & de l'intervalle ac on décrit un cercle, il passera par tous les angles du Polygone qui se trouvera inscrit dans le cercle*; de sorte qu'on peut toujours inscrire un Polygone régulier dans un cercle.

REMARQUE. On appelle *rayon oblique* une ligne ac menée du centre c à un angle a quelconque du Polygone régulier; mais on appelle *rayon droit* une perpendiculaire cp tirée du centre c sur un côté quelconque gh du Polygone régulier.

COROLLAIRE I. Le point c est le centre du Polygone, & les angles au centre acb, bcd , &c. opposés à des côtés égaux, sont évidemment égaux: en effet les cordes ab, db ne peuvent être égales sans que les arcs correspondans le soient; donc les angles dont ces arcs sont les mesures, sont égaux.

* Un Polygone inscrit dans un cercle, est un Polygone dont les côtés sont des cordes; un Polygone circonscrit à un cercle, est celui dont les côtés sont des tangentes du cercle.

COROLLAIRE II. Les angles au centre d'un Polygone régulier, ayant pour mesure le cercle entier, valent 360° , & chacun d'eux est égal à $\frac{360^\circ}{n}$ (n étant le nombre des angles du Polygone); mais (39) les angles extérieurs d'un Polygone régulier valent aussi 360° , & chacun d'eux est $= \frac{360^\circ}{n}$; donc la somme des angles au centre d'un Polygone régulier est égale à la somme des angles extérieurs, & chacun des premiers est égal à chacun des seconds.

COROLLAIRE III. Si le Polygone régulier $abdfgh$ est un exagone, l'angle au centre sera de 60° ; car l'angle au centre aura pour mesure la sixième partie de la circonférence du cercle, & à cause du triangle isocèle bac , chacun des angles sur la base bc sera aussi de 60° ; donc le triangle bac sera équiangle & équilatéral; donc le côté ab de l'exagone régulier est égal au rayon du cercle.

COROLLAIRE IV. Il suit du Corollaire précédent, que pour inscrire un Exagone régulier dans un cercle, il suffit de porter le rayon ac du cercle 6 fois sur la circonférence; & pour inscrire un dodécagone régulier dans le cercle, il suffira de diviser en deux également les arcs ba , bd , &c. (22), & par les points de division tirant les lignes ma , mb , nb , nd , &c. l'on aura un dodécagone régulier inscrit.

REMARQUE. Etant donné un angle bca pour le diviser en deux également, du sommet de l'angle c on décrira l'arc ba qu'on coupera en deux parties égales au point m , si par le point c & par le point m on tire la ligne cm , l'on aura les angles acm , bcm mesurés par des arcs égaux ma , bm ; donc ces angles sont chacun la moitié de l'angle acb ; donc, &c.

41. THÉOREME. *Tous les rayons droits cp , cq , &c. d'un Polygone régulier sont égaux.* Car le rayon oblique ch divisant en deux également l'angle h (voyez le Théorème précédent), les triangles rectangles chp , chq ont le côté commun hc , & les angles sur ce côté égaux. En effet $chp = chq$, mais p & q étant droits, les angles qch , pch sont complémens des angles égaux chp , chq ; donc ils sont égaux; donc les triangles chp , chq ont deux angles égaux sur un même côté; donc ils sont égaux; donc $cp = cq$; donc, &c.

42. THÉOREME. *Le rayon droit d'un Polygone régulier est d'autant plus petit que le Polygone a moins de côtés : par exemple, le rayon droit du pentagone régulier (fig. 39) est plus petit que le rayon droit de l'exagone régulier.* Car moins le Polygone a de côtés, plus chacun de ses côtés est grand; donc en supposant les Polygones inscrits dans le même cercle, le rayon droit du pentagone sera une perpendiculaire abaissée du centre sur une plus grande corde; donc cette perpendiculaire sera plus petite que si la corde étoit plus petite; c'est-à-dire, si le Polygone avoit plus de côtés: puisque les cordes sont d'autant plus éloignées du centre, qu'elles sont plus petites; donc, &c.

43. PROBLEME. *Inscrire un cercle dans un Polygone régulier $abdfg$ (fig. 39).* Tirez les rayons obliques bc , dc qui partagent les angles b , d , &c. en deux également. Menez par le centre c sur le côté fg la perpendiculaire cp , qui coupera fg en deux également (20). Du point c comme centre & de l'intervalle cp décrivez un cercle pp , il est visible que tous les rayons droits cp , cq , &c. étant égaux & perpendiculaires sur les côtés ag , gf ,

&c. , ces côtés seront des tangentes du cercle ; donc tous les côtés de ce Polygone seront des tangentes du cercle , ou (ce qui revient au même) le Polygone sera circonscrit au cercle $p p$.

REMARQUE. Si du point c & de l'intervalle cd on décrit un second cercle $db a g f$, le Polygone sera inscrit dans ce second cercle & circonscrit au premier.

44. PROBLÈME. *Inscrire un Polygone régulier dans un cercle.* Cherchez , par le moyen du rapporteur (qui n'est autre chose qu'un demi-cercle $ap d$ (fig. 40.) divisé en degrés *), l'arc correspondant au côté du Polygone ; *par exemple*, l'arc de 72° s'il est question d'un pentagone. Du centre c du rapporteur & du cercle donné tirez le rayon cm , qui n'est autre chose que le rayon du rapporteur prolongé. Par le point p que je suppose répondre à la division 72 tirez le rayon cn , l'arc mn sera de 72° . Portant la corde mn cinq fois sur la circonférence , vous aurez le pentagone inscrit $n m s q x$. Il est visible que cette méthode ne peut s'étendre qu'aux Polygones , dont le nombre des côtés peut diviser exactement 360.

REMARQUE. Pour trouver géométriquement ** l'arc de 30° ; ou pour diviser le quart de cercle af

* Cet instrument se trouve dans les étuis de Mathématiques. On peut s'en servir pour partager un angle en deux également. Supposons , *par exemple* , qu'on ait un angle de 30° , ayant appliqué le centre du rapporteur sur le sommet de l'angle , en sorte que le diamètre de l'instrument réponde à un des côtés , l'autre répondant à la division 30 , on tirera par le centre du rapporteur & la division 15 une ligne qui coupera l'angle donné en deux également ; cela suppose que le nombre des degrés est pair.

** Une opération est géométrique lorsqu'on peut l'exécu-

(fig. 41) en trois parties égales , par le moyen de la règle & du compas ; il suffit de porter le rayon du cercle d'abord de a en m , & ensuite de f en n , pour avoir les arcs an , nm , mf chacun de 30° . En effet , le rayon ou le côté de l'exagone est la corde de 60° (40) ; donc l'arc $am = 60^\circ$, de même l'arc $fn = 60^\circ$; donc l'arc $an = af - fn = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. De même mf est de 30 degrés ; donc aussi nm est de 30° .

COROLLAIRE. Donc on peut facilement inscrire dans un cercle un dodécagone régulier , en portant 12 fois sur la circonférence la corde de 30 degrés.

Des Lignes Proportionnelles.

45. On appelle *figures semblables* celles qui ayant un même nombre d'angles & de côtés , ont tous leurs angles égaux chacun à chacun , & les côtés qui comprennent ces angles proportionnels.

LEMME. Les lignes parallèles ab , cg (fig. 42) comprises entre deux lignes parallèles ac , bg sont égales. Des points a & c ayant abaissé les perpendiculaires ap , cp sur la ligne bg prolongée s'il le faut , les angles b & g correspondants seront évidemment égaux. De plus les angles en p sont égaux & droits , & les perpendiculaires ap , cp égales (puisqu'elles mesurent la distance des parallèles , qui est par-tout la même) ; donc le troisième angle bap , gcp dans les deux triangles bap , gcb sera égal de part & d'autre ; donc ces deux triangles ont un côté égal de part & d'autre , & les deux angles sur ce côté égaux ; ainsi ces deux triangles sont égaux en tout (36) ; donc $ab = cg$.

ter par le moyen de la règle & du compas & sans tâtonnement , en suivant les principes de la Géométrie.

COROLLAIRE. Si deux lignes parallèles ac , bg sont autant éloignées l'une de l'autre que deux autres lignes parallèles xy , pp , & que les parallèles ab , cg soient autant inclinées sur les lignes ac , bg que les parallèles xp , yp le sont entre les lignes xy , pp , l'on aura les lignes ba , cg égales entr'elles & aux lignes xp , yp .

46. **THÉOREME.** Si deux lignes ab , ac (fig. 43) qui se rencontrent en un point, sont divisées par des parallèles md , mg , &c. également éloignées les unes des autres, un nombre quelconque des parties de la ligne ab , sera au même nombre des parties de la ligne ac , comme une partie de ab , à une partie de ac . Car les parties dg , gf sont des obliques également inclinées entre parallèles également éloignées; de même les lignes correspondantes mm , mm sont également inclinées entre parallèles égales. Donc (45) les lignes dg , gf sont égales entre elles aussi-bien que les lignes correspondantes mm , mm . D'ailleurs en tirant les perpendiculaires dp , ap , mp , &c., il est visible que les triangles rectangles apd , dpg ont les côtés égaux ap , dp , les angles en d & en g correspondans égaux, & à cause des angles droits p , les angles pad , pdg égaux, de sorte que ces deux triangles ont les côtés ap , pd égaux & les angles sur ces côtés égaux; donc ces triangles sont égaux en tout & ad est $= dg$. Il n'est pas difficile de voir que les triangles amp , mpm sont dans le même cas, & que par conséquent $am = mm$. Cela posé il est évident que $am : 3 \cdot am :: ad : 3 \cdot ad$, ou $am : ad :: 3 \cdot am : 3 \cdot ad$; & en général une partie quelconque am de la première ligne, est à une partie ad correspondante de la seconde, comme un nom-

bre quelconque des parties de la première , au même nombre des parties de la seconde.

COROLLAIRE. L'on a de même comme deux parties de ab à deux parties de ac , ainsi trois parties de ab sont à trois parties correspondantes de ac . Et en général une partie quelconque de ac comprise entre deux parallèles , ou entre le sommet & une parallèle est à la partie correspondante de ab comme une autre partie de la première , comprise entre deux parallèles , ou entre le sommet a & une parallèle , à la partie correspondante de la seconde.

47. THÉOREME. *Deux triangles qui ont leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre sont équiangles (fig. 44).* Soit le triangle gfm dont les côtés soient supposés perpendiculaires aux côtés du triangle abc , il est visible qu'en faisant tourner le triangle fgm sur le point g , le côté fg perpendiculaire sur ac deviendra parallèle au côté ac lorsque la ligne gf aura décrit un quart de cercle , de même gm sera parallèle à ba & fm à bc ; c'est-à-dire que les côtés qui forment les angles correspondans de ces deux triangles seront parallèles ; donc les angles correspondans sont égaux (14) & les triangles équiangles.

COROLLAIRE. Il suit , de ce qu'on vient de dire , que les triangles dont les côtés sont parallèles , sont équiangles.

48. THÉOREME. *Les triangles équiangles sont semblables , c'est-à-dire qu'ils ont leurs côtés homologues proportionels (les côtés homologues sont ceux qui sont opposés à des angles égaux).* Soient les deux triangles abc , dfg (fig. 45) qu'on suppose équiangles. Posant le point d sur le point a , en sorte que le côté df tombe sur ab , il est visible , à cause de l'angle d égal à l'angle a , que $d'g$ tom-

bera sur ac ; & prenant $as = df$, $ap = dg$, fg tombera sur sp , & le triangle asp sera égal au triangle dfg ; donc l'angle $s = f$, & $p = g$. Mais par supposition $f = b$ & $g = c$; donc $s = b$ & $p = c$; donc les angles correspondans s & b sont égaux ; donc (15) sp est parallèle à bc ; donc (46) $ab : ac :: as$ ou $df : ap = dg$. Si l'on avoit posé l'angle f sur l'angle b , on auroit démontré de même que $ba : bc :: df : fg$. Il est évident (46) que $as : ap :: sb : pc :: ba : ac$.

49. REMARQUE. Si l'on tire la ligne xa parallèle à bd , on voit que les lignes as , ap qui sont autant inclinées entre les parallèles xa , sp que les lignes sb & pc le sont entre les parallèles sp , bc , sont proportionnelles à ces dernières.

COROLL. I. Les triangles qui ont leurs côtés perpendiculaires ou parallèles l'un à l'autre sont semblables, car (47) ces triangles sont équiangles ; donc, &c.

COROLLAIRE II. Deux triangles asp , abc qui ont un angle a égal de part & d'autre, & des bases sp , bc parallèles, sont équiangles & semblables.

50. THÉOREME. Deux triangles qui ont un angle égal, & les côtés qui comprennent cet angle proportionnels, sont semblables. Supposons l'angle a dans le triangle bac , égal à l'angle d du triangle fgd , & qu'on ait en même tems la proportion $ab : ac :: df : dg$. Prenant sur ab la ligne $as = df$, & tirant sp parallèle à bc , il est visible que les deux triangles asp , abc feront équiangles & semblables. Or $dfg = asp$; car (par supposition) $ba : ac :: df : dg$; mais $fa = as$; donc $ba : ac :: sa : dg$. Mais à cause des parallèles sp , bc l'on a (49) $ba : ac :: as = df : ap$; donc $ap = dg$; donc les deux triangles dfg , asp ont un angle

d & a égal de part & d'autre ; & les côtés qui comprennent cet angle égaux ; donc ils sont égaux en tout. Mais asp est semblable à bac ; & par conséquent bac est aussi semblable à dfg ; donc, &c.

§ 1. THÉOREME. Deux triangles abc , dfg qui ont leurs trois côtés proportionels sont semblables. Car si sur fg on fait l'angle gfh égal à l'angle b ; & $fg = fh$, il est évident que l'angle a sera égal à l'angle h ; donc les triangles abc , hfg seront équiangles & semblables. Or $hfg = dfg$: car (par supposition) $bc : ab :: fg : fd$; mais à cause des triangles semblables abc , hfg on a de même $bc : ab :: fg, fh$; donc (puisque les deux premiers termes de cette proportion sont les mêmes) l'on a $fg : fd :: fg : fh$, ou (*alternando*) $fg : fg :: fd : fh$; mais $fg = fg$; donc $fd = fh$. De plus $bc : ac :: fg : dg$, & $bc : ac :: fg : gh$; donc $fg : dg :: fg : gh$, ou (*alternando*) $fg : fg :: dg : dh$; mais $fg = fg$; donc $dg = gh$; donc les trois côtés du triangle dfg sont égaux aux trois côtés du triangle hfg ; donc (35) ces deux triangles sont égaux en tout. Mais hfg est semblable à bac ; donc dfg est aussi semblable au triangle bac ; donc, &c.

§ 2. THÉOREME. Une ligne droite ap qui divise en deux également l'angle bac d'un triangle quelconque bac (fig. 46), coupe le côté opposé en deux parties bp , pc proportionnelles aux côtés correspondans ab , ac . Par le point b tirez bd parallèle à pa , & prolongez ca jusqu'à la rencontre de bd . A cause des parallèles ap , db , les triangles apc , dbc sont semblables *, &c (par les numéros 46

* Car à cause des parallèles ap , db , les angles cdb , cap correspondans sont égaux aussi-bien que les angles cbd , cpa ; donc, &c.

& 49), l'on aura $pb : pc :: da : ac$. Mais à cause des parallèles bd , ap , l'angle $d = pac = bap$ (autre moitié de l'angle bac) $= abd$, puisque ces angles sont alternes-internes entre les parallèles db , ap ; donc les angles d & b du triangle dba sont égaux, & par conséquent les côtés qui sont opposés à ces angles sont égaux (33); donc $ba = da$. Mais nous venons de voir que $bp : pc :: da : ac$; donc en substituant, $bp : pc :: ab : ac$.

53. THEOREME. Si deux cordes ab , gf se coupent dans un cercle (fig. 47), les parties de l'une seront réciproques aux parties de l'autre; de sorte que l'on aura la proportion $ac : gc :: fc : cb$. Car ayant tiré les cordes ag & fb , les deux triangles gac , $fc b$ ont les angles, opposés au sommet, acg , $fc b$ égaux : de plus l'angle a du premier & l'angle f du second sont égaux (étant appuyés sur le même arc gb); donc le troisième angle est égal de part & d'autre; donc les deux triangles sont équiangles & semblables; donc leurs côtés homologues sont proportionnels; & l'on a $ac : gc :: fc : cb$.

COROLLAIRE I. Si l'une des cordes ab (fig. 48) est un diamètre & que l'autre corde fg lui soit perpendiculaire, à cause que cette perpendiculaire est divisée en deux également au point c (20), fc sera $= cg$; donc la proportion du Théorème deviendra $ac : fc :: cg$ ou $fc : cb$. C'est-à-dire qu'une perpendiculaire quelconque fc sur un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux parties de ce diamètre.

COROLLAIRE II. Supposant le diamètre $ab = a$, la perpendiculaire $fc = y$, la partie ac du diamètre comprise entre l'extrémité a & la rencontre de la perpendiculaire (on l'appelle *abscisse*) $= x$.

l'autre partie cb du diamètre sera $a - x$, & la proportion du Corollaire précédent deviendra $x : y :: y : a - x$, ou (faisant le produit des extrêmes égal à celui des moyens) $y^2 = ax - x^2$ *.

COROLLAIRE III. Le triangle afb étant rectangle en f (parce que l'angle f est appuyé sur un diamètre), il s'ensuit que dans un triangle rectangle la perpendiculaire abaissée sur l'hypothénuse est moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypothénuse déterminées par cette perpendiculaire.

54. PROBLÈME. *Trouver une moyenne géométrique entre deux lignes données x & n .* Joignez ces deux lignes, en sorte qu'elles ne fassent qu'une seule & même ligne. Divisez leur somme ab en deux également au point p . De ce point comme centre & du rayon pa moitié de ab décrivez un cercle $bfa g$, par le point d'union élevez sur ab la perpendiculaire cf jusqu'à la rencontre de la circonférence en f , elle sera moyenne proportionnelle entre x & n , par le premier Corollaire du Théorème précédent.

55. THÉOREME. *Si du sommet f de l'angle droit d'un triangle rectangle quelconque on abaisse une perpendiculaire fc sur l'hypothénuse ab , ce triangle sera divisé en deux autres triangles afc , bfc , semblables au grand triangle & par conséquent semblables*

* C'est ce qu'on appelle l'équation du cercle, & cette propriété convient à toutes les perpendiculaires fc ; de sorte qu'en donnant plusieurs valeurs successives à x & prenant les racines des quantités $ax - x^2$ correspondantes, on déterminera les fc correspondantes aux x , & faisant passer une courbe par tous les points f , on aura un cercle d'autant plus exact que les y seront plus exacts & plus près les uns des autres.

entr'eux. Car 1°. le triangle afc a un angle droit en c , & un angle a commun avec le grand triangle qui a aussi un angle droit en f ; donc le troisième angle est égal de part & d'autre; donc ces deux triangles sont équiangles & semblables. 2°. Le triangle bfc a un angle b commun avec le grand triangle, un angle droit en c comme le grand triangle en a un en f ; donc ces deux triangles sont équiangles; donc les deux petits triangles sont semblables au grand triangle, & par conséquent semblables entr'eux.

COROLLAIRE I. Il suit de-là que $ac : af :: af : ab$, parce que ac , af côtés du petit triangle afc sont homologues aux côtés af , ab du grand triangle afb . De même bc , fb côtés du triangle bfc étant homologues aux côtés bf , ba du grand triangle, l'on a $bc : bf :: bf : ba$; c'est-à-dire, chaque côté du triangle rectangle afb est moyen proportionel entre l'hypothénuse & le segment correspondant *. Il est visible aussi que les deux triangles acf , cfb donnent $ac : cf :: cf : cb$, ou que la perpendiculaire fc est moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypothénuse, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus.

COROLLAIRE II. Les côtés af , fb étant des cordes tirées du même point f aux extrémités du diamètre ab , il suit du Corollaire précédent que si de l'extrémité f d'une corde af ou fb l'on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre ab qui passe par l'autre extrémité de la même corde, cette corde sera moyenne proportionnelle entre le diamètre & le segment correspondant.

* Les parties d'une ligne s'appellent aussi les *segments* de cette ligne.

56. **THÉOREME.** Deux sécantes extérieures ab , ac tirées d'un même point à la partie concave bc de la circonférence, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures au cercle (fig. 49). Ayant tiré les lignes bd , cf , l'on a les triangles adb , afc semblables, puisqu'ils ont un angle a commun, & les angles b & c appuyés sur le même arc fd ; & partant $ab : ac :: ad : af$.

COROLLAIRE. Si l'arc dc s'évanouit, le point c tombera sur le point d , la sécante ac deviendra tangente (fig. 50), & l'on aura toujours $ab : ac :: ac : af$. Ainsi la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière ab , & sa partie hors du cercle.

On dit qu'une ligne ab est divisée *en moyenne & extrême raison* (fig. 51), lorsqu'elle est divisée en deux parties ad , db telles que la ligne entière est à l'une de ces parties, comme celle-ci est à l'autre partie.

57. **PROBLEME.** Diviser une ligne ab en moyenne & extrême raison. Sur l'extrémité b de cette ligne, élevez la perpendiculaire $ob = \frac{ab}{2}$, du point o comme centre; avec le rayon ob , décrivez le cercle cbf , par le point a & le centre o du cercle, tirez la sécante ac , & prenant $ad = af$, je dis que $ab : ad :: ad : db$. Car ob étant perpendiculaire sur ab , ab sera tangente; donc (Corollaire précédent) $ac : ab :: ab : af = ad$, & (dividendo) $ac - ab$, ou $ac - cf$ (à cause du diamètre $cf = ab$), ou $fa = ad : ab :: ab - af = db - ad = db : af = ad$; donc $ad : ab :: bd : ad$, ou mettant les antécédens à la place des conséquens & réciproquement (ce qui ne peut détruire la proportion, puisque le produit des extrêmes reste égal à celui des moyens) $ab : ad :: ad : bd$.

58. **PROBLEME.** Diviser une ligne donnée ab (fig. 52) en parties proportionnelles aux parties d'une autre ligne ac . Faites avec ces lignes un angle quelconque cab . Ayant joint les

extrémités b & c par la ligne cb , par les points de division de la ligne ac , menez des parallèles à la ligne cb jusqu'à la rencontre de la ligne ab . A cause des parallèles dx, fp , &c. la ligne ab aura toutes ses parties proportionnelles aux parties correspondantes de ac (46).

59. PROBLEME. *Diviser une ligne ad en parties égales* (fig. 53). Prenez une ligne indéfinie bc plus grande que ad , portez autant d'ouvertures égales de compas sur cette ligne que vous voulez avoir de parties égales dans ad , disposez ensuite ad parallèlement à bc , par le point b & l'extrémité c de la dernière division, tirez les lignes ba, cd qui se rencontreront en un point quelconque x au-dessus de ad (nous supposons $bc > ad$); du point x aux points m, n, p , &c. des divisions de la ligne bc , menez les lignes xp , &c. ces lignes diviseront ad en parties égales aux points o, i, s , &c. En effet à cause des parallèles ao & pb ; oi & pm , les triangles xao, xbp sont semblables entr'eux; aussi bien que les triangles xio, xpm ; donc $bp : ao :: xp : xo$. De même les deux derniers triangles dont nous venons de parler donnent $pm : oi :: px : xo$; donc $bp : pm :: ao : oi$; dont $ao = oi$. On démontrera de même que $oi = is$ en se servant des triangles xpm, aio & des triangles xmn, xis ; & quel que soit le nombre des parties égales de bc , en procédant de cette manière l'on démontrera que les parties correspondantes de ad sont toutes égales entr'elles.

60. PROBLEME. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données a, b, c* (fig. 54). Avec les lignes indéfinies pr, ps je fais un angle quelconque p . Je porte la ligne a sur pr de p en x , & b sur ps de p en g , je tire xg . Portant ensuite c de x en o , & tirant og parallèle à xg ; il est évi-

dent (à cause des parallèles xg , oq) que px , $xo :: pg : gq$, ou que $a : c :: b : gq$; donc gq est la ligne cherchée. Si $b = c$, gq sera troisième proportionnelle aux lignes a & b .

61. DÉFINITION. Deux Polygones sont appelés *semblables* lorsqu'ils ont un même nombre d'angles, & les côtés qui comprennent ces angles proportionnels.

62. THÉOREME. Deux Polygones semblables peuvent être divisés par des diagonales qui partent des angles homologues en un même nombre de triangles semblables (fig. 55). Du point a du pentagone $abcdf$ tirez les diagonales ac , ad , & du point g correspondant du pentagone semblable $ghilm$ tirez les diagonales gi , gl ; je dis que les triangles afd , adc , acb sont semblables aux triangles gml , gli , gih . Puisque les Polygones sont semblables, les angles correspondans f & m sont égaux, & les côtés qui comprennent ces angles proportionnels (61); donc (50) les triangles afd , gml sont semblables; donc $fd : ml :: ad : gl$; or $fd : ml :: dc : li$ (par la propriété des Polygones semblables); donc $ad : gl :: dc : li$, ou (*alternando*) $ad : dc :: gl : li$; mais l'angle $d = l$ & l'angle $adf = gml$; donc $gli = adc$; donc les triangles adc , gli ont un angle égal, & les côtés autour de cet angle proportionnels; donc ils sont semblables. On démontrera la même chose pour les triangles acb , gih ; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc les périmètres ou contours des figures semblables p & x , sont entr'eux comme deux côtés homologues (c'est-à-dire semblablement situés dans les figures) quelconques af , gm , ou comme deux diagonales homologues ad , gl sem-

blablement tirées dans les figures. Car à cause de la similitude des figures p & x , $af : gm :: fd : ml :: dc : li :: bc : ih :: ba : hg$; donc la somme des antécédens est à la somme des conséquens, c'est-à-dire, le périmètre de p est au périmètre de x comme $af : gm$, ou comme $ad : gl$, à cause des triangles semblables afd , gml .

COROLLAIRE II. Donc les périmètres de deux Polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entr'eux comme un des côtés du premier Polygone à un des côtés du second. Car les Polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont des Polygones semblables.

63. THÉOREME. Deux Polygones réguliers semblables, c'est-à-dire, d'un même nombre de côtés, ont leurs périmètres proportionels à leurs rayons droits & obliques (fig. 56). Car les rayons obliques oa , rs partagent les angles égaux a & r en parties égales; mais à cause des angles droits x & p les triangles rxs , aop ont deux angles égaux p & x , pa & sr ; donc le troisième angle est égal de part & d'autre, & les deux triangles sont semblables; ainsi $rs : oa :: sx : op :: rx : pa$; mais xr est la moitié de rn & pa la moitié de ag (parce que la perpendiculaire abaissée du centre sur une corde d'un cercle divise cette corde en parties égales), & les moitiés sont comme les tous; donc les rayons droits & obliques sont comme les côtés qui (62) sont entre eux comme les périmètres; donc les périmètres sont entr'eux comme les rayons droits & comme les rayons obliques; & en général comme les lignes semblablement tirées, qui nécessairement sont entr'elles comme les côtés & les rayons droits ou obliques.

COROLLAIRE. Donc les circonférences des cercles

cercles font entr'elles comme leurs rayons , & par conséquent comme leurs diamètres , comme les arcs *semblables* , c'est-à-dire , d'un même nombre de degrés , comme les cordes de ces arcs , &c. : car les cercles peuvent être considérés comme des polygones réguliers d'un même nombre de côtés infiniment petits ; donc , &c.

64. THÉOREME. *De tous les Polygones réguliers inscrits au cercle , celui-là est le plus grand qui a plus de côtés , au contraire de tous les Polygones circonscrits , celui qui a le moins de côtés est le plus grand.* Car dans la fig. 39 le pentagone inscrit diffère plus de son cercle que l'exagone inscrit (fig. 38) ne diffère du sien ; mais il est visible aussi qu'en circonscrivant un quarré & un octogone à un cercle (fig. 57), le quarré différera plus du cercle que l'octogone & sera plus grand que l'octogone ; donc , &c.

COROLLAIRE. Donc si un Polygone régulier inscrit ou circonscrit avoit un très-grand nombre de côtés , il ne différeroit pas sensiblement du cercle , & l'on pourroit prendre l'un pour l'autre sans erreur sensible.

De la mesure & du rapport des Surfaces.

65. La *surface plane* est celle qui n'a ni enfoncement ni élévation , & sur laquelle par conséquent une ligne droite peut s'appliquer exactement. La *surface courbe* au contraire est telle qu'on ne peut lui appliquer exactement une ligne droite : telle est la surface d'une boule.

DÉFINITION. Un quadrilatere $abcd$ qui a seulement deux côtés ab , cd parallèles (fig. 58) est appelé *trapeze*. S'il n'a aucun côté parallèle (fig. 59) on l'appelle *trapézoïde*. S'il a ses côtés parallèles

deux à deux, on le nomme *parallélogramme* (fig. 60). Si les côtés du parallélogramme sont égaux & que les angles ne soient pas droits, il prend le nom de *rhombe*, & celui de *rhomboïde* lorsque les côtés opposés seulement sont égaux. Si les angles du parallélogramme sont droits (fig. 61), on l'appelle *rectangle*; mais si les angles étant droits les côtés sont égaux, il se nomme *quarré* (fig. 62). Une ligne bc (fig. 58, 60, 62) menée d'un angle d'un quadrilatère à l'angle opposé s'appelle *diagonale*. Une ligne cd (fig. 58) sur laquelle on conçoit qu'est posée la figure $cabd$, ou le triangle cbd , est appelée *base* de cette figure, ou du triangle cbd . Une ligne ap tirée du sommet d'un angle a perpendiculairement sur la base cd (fig. 63), prolongée, s'il le faut, est appelée *hauteur* du triangle acd . Si on mène la perpendiculaire pm entre les côtés parallèles d'un trapeze (fig. 58), ou d'un parallélogramme (fig. 60), cette perpendiculaire fera la hauteur du trapeze ou du parallélogramme.

66. PROBLÈME. *Décrire un parallélogramme dont un des côtés soit égal à la ligne donnée a (fig. 64), l'autre côté égal à la ligne b , & l'angle compris entre ces côtés $= g$. Tirez $cd = a$, faites ensuite l'angle $acd = g$ (26). Prenez $ac = b$, tirez ab parallèle & égal à cd , tirant ensuite bd , vous aurez le parallélogramme cherché. Si l'angle g étoit droit, le parallélogramme seroit un rectangle, & un quarré si les côtés étoient de plus supposés égaux.*

67. REMARQUE. Nous avons démontré (45) que les parallèles entre parallèles étoient égales; donc les côtés opposés d'un parallélogramme sont toujours égaux entr'eux.

68. THÉOREME. *Une diagonale bc partage un*

parallélogramme quelconque $abcd$ *en deux triangles égaux.* En effet $ab = cd$ & $bd = ac$ (remarque précédente); & la ligne bc étant commune aux deux triangles abc , cdb , ces triangles ont leurs côtés égaux chacun à chacun; donc (35) ils sont égaux en tout.

COROLLAIRE. Donc un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur *.

69. THÉOREME. *Un parallélogramme & un rectangle de même base & de même hauteur sont égaux en surface.* Des extrémités a , b du côté opposé à la base ayant abaissé les perpendiculaires ap , bp sur cette base prolongée s'il le faut; les triangles acp , bdp auront les angles correspondans c & d égaux, & les angles droits en p ; donc ils sont semblables & ont de plus les angles égaux sur les côtés égaux ac , bd ; donc ils sont égaux en tout, & $dp = cp$; donc $pp = ab = cd$; donc le parallélogramme $acdb$ & le rectangle $appb$ ont même base & même hauteur (puisque'ils sont compris entre les mêmes parallèles). De plus pour avoir le rectangle il suffit d'ajouter au parallélogramme le triangle bdp & d'en retrancher en même tems le triangle $acp = bdp$; donc ces deux figures sont égales; donc, &c.

70. THÉOREME. *La surface d'un rectangle est égale au produit de la base par sa hauteur* (fig. 65). Supposant la base cd de 6 pieds, la hauteur ac de 4; divisez cd en 6 parties égales & ca en 4. Par les points de division de cd menez des pa-

* Le triangle cbd a pour hauteur la perpendiculaire bp aussi-bien que le parallélogramme $abcd$.

ralleles au côté ac , & par les points de division de ac des paralleles à cd , vous aurez quatre tranches, dont chacune contiendra 6 quarrés égaux, chacun au quarré *poco* (*poco* est évidemment un pied quarré); donc le rectangle vaut 4 fois 6 pieds quarrés ou 24 pieds quarrés, produit* de la base 6 par la hauteur 4; donc, &c.

REMARQUE. Si l'on conçoit que la base cd (fig. 66) monte parallelement à elle-même le long de ac & qu'elle laisse par-tout des traces d'une largeur très-petite, il est évident qu'il y aura autant de traces égales que la hauteur peut contenir de fois la largeur d'une de ces traces, & que la somme de ces traces est égale à sa surface du rectangle; donc il faudra multiplier une de ces traces par le nombre qui exprime combien de fois sa largeur est contenue dans la hauteur, & en supposant l'épaisseur de la trace infiniment petite, il faudra de même multiplier la trace ou ligne cd par la hauteur ac ; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc un parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur; car (69) un parallélogramme & un rectangle de même base & de même hauteur sont égaux.

COROLLAIRE II. Donc un triangle est égal au produit de sa base par la moitié de sa hauteur, ou au produit de sa hauteur par la moitié de sa base, ou à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

* On ne peut pas multiplier une ligne cd par une ligne ca ; mais on prend le nombre des quarrés qu'on peut former sur cd (en prenant pc pour hauteur), autant de fois que la ligne pc est contenue dans ac . C'est ce qu'on doit entendre quand on dit qu'on multiplie la base par la hauteur.

Car un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur (68).

COROLLAIRE III. Donc un triangle est égal à un parallélogramme de même base, mais d'une hauteur deux fois moindre.

71. THÉOREME. *La surface d'un trapeze $abcd$ (fig. 58) est égale au produit de sa hauteur mp par la moitié de la somme des deux bases opposées & parallèles ab , cd . Car la diagonale bc partage le trapeze en deux triangles de même hauteur que le trapeze (puisque'ils sont compris entre mêmes parallèles) & dont la base de l'un est ab & celle de l'autre cd ; donc la surface de l'un est $mp \times \frac{ab}{2}$, celle de l'autre étant $= mp \times \frac{cd}{2}$; donc la surface du trapeze est $= mp \times \frac{(ab+cd)}{2}$; donc, &c.*

COROLLAIRE I. Donc la surface d'un trapeze est égale au produit de sa hauteur mp multipliée par une ligne xg , menée par le milieu x du côté ac parallèlement à la base cd . En effet les triangles abc , xnc (semblables à cause des parallèles ab , xn) donnent $ab : xn :: ac : cx :: 2 : 1$. De même les triangles semblables bcd , $bn g$ donnent $bd : bg :: cd : ng :: 2 : 1$ (puisque les lignes ac , bd comprises entre les parallèles ab , cd & coupées par une parallèle xg doivent être coupées proportionnellement, & la première étant coupée en deux également, la seconde doit l'être de même); donc $xn = \frac{ab}{2}$, & $ng = \frac{cd}{2}$; donc $xg = \frac{ab+cd}{2}$; donc $mp \times \frac{(ab+cd)}{2} = mp \times xg$; donc, &c.

Bb 3

COROLLAIRE II. Donc (Calcul 61) xg est moyenne proportionnelle arithmétique entre les bases parallèles du trapeze.

COROLLAIRE III. Donc pour avoir la surface d'une figure curviligne $apxb$ (fig. 67), ayant tiré la ligne xA qu'on divisera en parties égales & assez petites pour que les arcs compris entre les lignes pp perpendiculaires à xA soient censés des lignes droites, ou du moins puissent être considérés comme des droites sans une erreur considérable ; il est visible qu'il y aura autant de trapezes qu'il y a de points de division, en y comprenant le triangle pxp que nous considérons comme un trapeze, dont la base située en x est infiniment petite, ou $= 0$. Cela posé, parce que tous ces trapezes ont une même hauteur $= xn$, il faudra multiplier la demi-somme de leurs bases par la hauteur nx , le produit donnera la surface cherchée. Or il est visible que chaque base pp doit être prise deux fois, parce qu'elle appartient à deux trapezes, tandis que la première base ab , ou la dernière (si elle existoit) ne doivent être prises qu'une fois ; donc la moitié de toutes ces bases se trouvera en ajoutant ensemble la moitié des deux extrêmes avec toutes celles du milieu. La somme multipliée par nx donnera la surface cherchée. On peut voir par là comment on pourroit mesurer la surface de flotaison d'un vaisseau.

72. THÉOREME. La surface d'un polygone régulier $abdfgh$ (fig. 38) est égale au produit de son périmètre par la moitié de son rayon droit cq . Car un tel polygone est composé d'autant de triangles égaux que ce polygone a de côtés, & chacun de ces triangles ahc est égal au produit du côté ah par la moitié de sa hauteur cq ; donc la surface entière

du polygone est égale au produit de tous les côtés (ou , ce qui revient au même , au produit de son périmètre) par la moitié du rayon droit , ou au produit du rayon droit par la moitié du périmètre ; donc , &c.

COROLLAIRE I. Donc la surface d'un cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon , ou au produit du rayon par la moitié de la circonférence ; car un cercle peut être regardé comme un polygone régulier d'une infinité de côtés , dans lequel le rayon oblique ne diffère pas du rayon droit ; donc , &c.

COROLLAIRE II. Il suit du dernier Corollaire que la surface d'un secteur acd est égale au produit de l'arc ad qui termine ce secteur par la moitié du rayon (fig. 68) ; car ce secteur peut être regardé comme une partie déterminée du cercle , *par exemple* , la sixième ; il faudra donc multiplier l'arc ad ou la sixième partie de la circonférence par la moitié du rayon , & l'on aura la surface cherchée. Ou bien d'une autre manière , considérant le secteur comme composé d'une infinité de triangles , tels que axc , xcb , qui ont tous leur sommet au centre & dont les bases sont des portions infiniment petites de la circonférence , l'on aura la surface de chacun de ces triangles en multipliant sa base par la moitié du rayon ou de sa hauteur ; donc la surface totale est égale au produit de toutes les bases , ou de l'arc ad par la moitié du rayon ac .

73. THÉOREME. *De tous les polygones réguliers isopérimètres , c'est-à-dire , qui ont des périmètres égaux , celui qui a le plus de côtés est le plus grand.* Soit un pentagone régulier circonscrit au cercle m (fig. 69) , & un exagone régulier du même périmètre circon-

scrit au cercle a . Il est visible (64) que le cercle a est plus grand que le cercle m ; ainsi le rayon $ap > mp$: or en inscrivant ces figures dans des cercles, ap & mp feroient les rayons droits de ces polygones. Mais (Théoreme précédent) pour avoir les surfaces de ces polygones, il faut multiplier les périmètres qui sont ici égaux, par ap & par mp ; donc le premier produit, c'est-à-dire la surface de l'exagone, sera plus grande que le second produit, ou la surface du pentagone; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc de tous les polygones réguliers isopérimètres le cercle est le plus grand, car on peut regarder le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.

74. THEOREME. Un cercle $a d m$ (fig. 68) est égal à un triangle rectangle $c m n$, dont la base $m n$ est égale à la circonférence du cercle, & la hauteur $c m$ égale au rayon du cercle. Car (72) la surface du cercle est égale au produit de sa circonférence $m n$ par la moitié de son rayon $c m$; or la surface du triangle rectangle $c m n$ est égale au même produit (70); donc, &c.

COROLLAIRE. Donc la couronne circulaire $m d a p u$, comprise entre deux circonférences concentriques, est égale au produit de la demi-somme de ces circonférences par la distance $u m$ de ces circonférences. Car tirant $u q$ parallèle à $m n$, les triangles semblables $c u q$, $c m n$ donneront $c u : c m :: u q : m n$; or les circonférences de ces cercles sont entr'elles comme leurs rayons $c u$ & $c m$ (63), & par conséquent comme $u q$ & $m n$; donc la grande est à la petite comme $m n : u q$; or la grande est égale à $m n$ (par supposition), donc la petite est égale à $u q$; donc le petit cercle est égal à

$uq \times \frac{uc}{2}$, & le grand est égal à $mn \times \frac{cm}{2}$, c'est-à-dire que le petit cercle est égal au petit triangle $c u q$, & le grand est égal au triangle $c m n$; donc la couronne circulaire est égale au trapeze $u q m n = \frac{(uq + mn)}{2} \times \frac{um}{2}$ (71); donc, &c.

75. THEOREME. Deux parallélogrammes dont l'un soit appelé p & l'autre q , sont entr'eux comme les produits de leur base par leur hauteur. Car soit h la hauteur, b la base du premier, f la hauteur, g la base du second. La surface du premier sera (70) $p = hb$, celle du second sera $q = fg$; donc $p : q :: hb : fg$; or la raison de $hb : fg$ est le produit des raisons $h : f$ & $b : g$; donc la raison de $p : q$ est composée des raisons de la hauteur à la hauteur & de la base à la base; & partant les parallélogrammes sont entr'eux en raison composée des bases & des hauteurs, ou comme les produits des bases par les hauteurs.

COROLLAIRE I. Donc les triangles sont en raison composée des bases & des hauteurs; car les triangles sont les moitiés des parallélogrammes de même base & de même hauteur; mais les moitiés sont comme les tous; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc les parallélogrammes qui ont même base sont comme leurs hauteurs, & s'ils ont même hauteur ils sont comme leurs bases; il en est de même des triangles.

COROLLAIRE III. Donc deux parallélogrammes seront égaux si leurs hauteurs sont en raison inverse de leurs bases. Car si $h : f :: g : b$, on aura $hb = fg$, ou $p = q$: ce qui a lieu aussi pour les triangles.

COROLLAIRE IV. Si les parallélogrammes sont semblables, ils sont entr'eux comme les quarrés

de leurs bases , ou de leurs hauteurs , ou même comme les quarrés de leurs côtés homologues. Car dans les parallélogrammes semblables $abcd, fhig$ (fig. 70) les deux triangles acp, fhp sont semblables (à cause des angles homologues égaux $c \& h$, & des angles droits $p \& p$); donc $ac : fh :: ap : fp$; or $ac : fh :: cd : hi$ (puisque les parallélogrammes sont supposés semblables; donc $cd : hi :: ap : fp$. C'est-à-dire que la raison des bases est égale à celle des hauteurs; donc la raison qui en est composée est doublée, & par conséquent égale à la raison des quarrés des termes d'une des raisons composantes, on égale à la raison des quarrés des bases, ou des quarrés des hauteurs, ou des quarrés des côtés ac & fh qui sont entr'eux comme les hauteurs ap & fp ; donc $p : q : b^2 : g^2 :: h^2 : f^2 :: (ac)^2 : (fh)^2$.

COROLLAIRE V. Les surfaces des triangles semblables cad, hfi (parce que ces triangles ont un angle $c \& h$ égal de part & d'autre, & les côtés qui comprennent cet angle proportionnels) sont entr'elles comme les quarrés de leurs bases cd & hi , de leurs hauteurs ap & fp , de leurs côtés homologues ac & fh , & par conséquent aussi de leurs côtés ad, fi qui sont dans le même rapport que ac & fh . Cela est évident, car ces triangles sont moitié des parallélogrammes semblables; donc, &c.

COROLLAIRE VI. La surface d'un parallélogramme dont la hauteur est h & la base b est égale à la surface d'un quarré, dont le côté a est moyen proportionnel entre h & b . Car si $h : a :: a : b$, l'on a $hb = a^2$; or hb est la surface du parallélogramme & $aa = a^2$ celle du quarré; donc, &c.

76. THÉOREME. Le quarré de l'hypothénuse d'un

triangle rectangle bac est égal à la somme des quarrés o & m faits sur les côtés qui comprennent l'angle droit a (fig. 71). Car la perpendiculaire ap abaissée de l'angle droit sur l'hypothénuse divise le triangle abc en deux triangles semblables entr'eux, & au grand triangle (55); donc ces triangles sont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; & le grand triangle est à la somme des deux autres comme le quarré de l'hypothénuse du grand triangle à la somme des quarrés des hypothénuses des deux autres. Mais la surface du grand triangle est égale à la somme de surfaces des deux petits triangles; ainsi le quarré de l'hypothénuse bc est égal à la somme des quarrés o & m faits sur les deux côtés qui comprennent l'angle droit.

REMARQUE. On peut démontrer la même chose de cette autre maniere. Selon ce que nous avons déjà dit (55), chaque côté du triangle abc est moyen proportionnel entre l'hypothénuse & le segment correspondant fait par la perpendiculaire ap ; donc $o = (ba)^2 = bc \times bp = bp \times px$, & $m = (ac)^2 = bc \times pc = pc \times qc$; donc $o + m = (bc)^2 = bc \times qn$.

COROLLAIRE I. Donc le quarré de la diagonale bc d'un quarré $bacd$ (fig. 62) est double du quarré du côté $ac = ba$: car le triangle rectangle bac est isocelle; donc le quarré de la diagonale est double du quarré de l'un des côtés égaux ac , ou ba ; c'est-à-dire, que l'on a $(bc)^2 = 2 \cdot (ac)^2 = 2 \cdot (ab)^2$. Donc appellant a le côté, le quarré de la diagonale sera $2a^2$ & celui du côté sera a^2 ; donc le quarré de la diagonale sera à celui du côté comme $2a^2 : a^2 :: 2 : 1$, & la diagonale sera au côté comme $\sqrt{2} : 1$; mais $\sqrt{2}$ est incommensurable avec l'unité ou tout autre nombre quelconque; donc le rapport de la diagonale au côté n'est pas de nombre à nombre.

COROLLAIRE II. Soit a l'hypothénuse, b l'un

des côtés , c l'autre côté d'un triangle rectangle , l'on aura $a^2 = b^2 + c^2$; donc $b^2 = a^2 - c^2$, & $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. De même $c^2 = a^2 - b^2$ & $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, l'on a aussi $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; donc étant donnés les deux côtés pour avoir l'hypothénuse , on prendra la racine de la somme de leurs quarrés ; mais étant donné un côté & l'hypothénuse l'on aura l'autre côté en retranchant le quarré du côté donné du quarré de l'hypothénuse , & prenant la racine du reste.

77. THÉOREME. *Les surfaces des polygones semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ou même de leurs lignes homologues.* Car (fig. 55) les polygones semblables $abcdf$, $ghilm$ peuvent être divisés en triangles semblables par les lignes homologues ac , ad & gi , gl (62). De même les polygones réguliers semblables (fig. 56) peuvent être divisés en un même nombre de triangles semblables par leurs rayons obliques ; or les aires ou surfaces de ces triangles sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ; donc (fig. 55) l'aire du polygone p est à l'aire du polygone x comme la somme des aires qui composent la surface du premier à la somme des aires qui composent la surface du second : mais (à cause que les polygones semblables ont leurs côtés & par conséquent les quarrés de ces côtés , aussi-bien que les triangles faits sur ces côtés , proportionnels) on peut considérer les aires qui composent la surface p comme la somme des antécédens , & les aires qui composent la surface x comme la somme des conséquens d'une suite de raisons égales ; donc $p : x$ comme l'aire du triangle afd est à l'aire du triangle semblable $gmI :: (af)^2 : (gm)^2 :: (ad)^2 : (gl)^2$.

COROLLAIRE I. Donc (fig. 56) les polygones réguliers semblables sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues ag , hr , ou comme les quarrés de leurs périmètres, qui sont entr'eux comme les côtés de ces polygones, lesquels côtés sont entr'eux (63) comme les rayons droits ou obliques; donc les surfaces des polygones réguliers semblables sont entr'elles comme les quarrés des côtés, des périmètres, des rayons droits, & des rayons obliques.

COROLLAIRE II. Donc les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs lignes homologues, des circonférences, des cordes des arcs semblables, des arcs semblables, des rayons & des diamètres; de sorte que le rayon d'un cercle étant supposé double de celui d'un autre cercle, le premier sera au second comme 4:1.

COROLLAIRE III. Donc les demi-cercles faits sur l'hypothénuse & les côtés d'un triangle rectangle abc (fig. 72) sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres; mais le quarré du diamètre du demi-cercle bac , c'est-à-dire, le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés des deux autres diamètres, ou des deux côtés ab , ac ; donc le grand demi-cercle est égal à la somme des deux autres. Et si le triangle bac (fig. 73) est isocelle, le demi-cercle bac sera le double du demi-cercle boa , ou aoc . C'est pourquoi si du quart de cercle $pbxa$, & du demi-cercle bao , on retranche le segment commun $axba$, l'on aura le triangle bap égal à la lunule $boaxb$ *; or nous dirons bientôt com-

* On appelle les lunules $ao b x a$, $aoc x a$ *lunules d'Hypocrate*, parce que ce Géomètre en a trouvé le premier la quadrature.

ment on peut quarrer un triangle ; donc on peut quarrer cette lunule.

COROLLAIRE IV. Pour faire un demi-cercle bma (fig. 72) qui soit à un autre demi-cercle anc dans un rapport donné de 2 : 1 ; *par exemple*, prenez bp de 2 pieds, ou 2 pouces, &c. , & pc d'un pied, ou d'un pouce, &c. Sur bc , comme diamètre, décrivez un demi-cercle. Par le point p tirez la perpendiculaire pa jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence, tirant ensuite les cordes ba , ac , le triangle bac sera rectangle en a (parce que l'angle a est appuyé sur un diamètre), & chacun des côtés ba (b), ac (c) sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse (a) & le segment correspondant ; de sorte qu'en faisant $bp = x$, $pc = p$, l'on aura $b^2 = ax$, $c^2 = ap$; donc $b^2 : c^2 :: ax : ap :: x : p$. Mais les demi-cercles faits sur les côtés b & c sont comme les quarrés b^2 & c^2 de leurs diamètres ; donc ces demi-cercles sont entr'eux comme les segmens x & p ; donc, &c.

78. PROBLEME. Etant donnée une figure p , en construire une semblable x ; de sorte que p soit à x dans un rapport donné de 1 à 2 ; *par exemple* (fig. 74). Ayant pris une ligne bc (fig. 72) à discrétion, coupez cette ligne en deux parties bp , pc , de manière que pb soit à pc dans le rapport donné de x à p , ayant ensuite mené les lignes ba , ac . Prenez sur ac (prolongée s'il le faut) $ad = af$, tirez dx parallèlement à bc , ax sera le côté homologue gm . Pour trouver les autres côtés de x , faites $ab : af :: ax = gm : z$, z sera $= gh$ côté homologue à ba . Ou bien cherchez une quatrième proportionnelle aux lignes af , ab , gm , cette quatrième proportionnelle sera $= gh$. Pour avoir ml , faites $af :$

$fd :: gm : ml$, & ainsi des autres. Faites ensuite les angles g, m, l , &c. égaux aux angles correspondans a, f, d , &c. Disposez les côtés trouvés autour de ces angles, & le Problème sera résolu. Car vous aurez $x : p :: (gm)^2 : (af)^2$. Mais gm (de la fig. 74) est $= ax$ (fig. 72), & af (fig. 74) est $= ad$ (fig. 72); donc $x : p :: (ax)^2 : (ad)^2 :: (ab)^2 : (ac)^2$ (à cause des parallèles bc, xd qui rendent les triangles bac, adx semblables) $:: bp : pc$ (77), ou ici comme 2 : 1. Si le polygone p étoit régulier, tous ses côtés & ceux du polygone x seroient égaux entr'eux.

79. PROBLEME. *Étant donnée la hauteur h & la base b d'un parallélogramme $abcd$ (fig. 70), trouver un quarré qui lui soit égal en surface.* Soit le côté de ce quarré $= x$. En faisant $h : x :: x : b$ l'on aura $x^2 = hb$, & $x = \sqrt{hb}$; c'est-à-dire, que le côté du quarré cherché est moyen proportionnel entre la base & la hauteur du parallélogramme. Or l'on fait trouver (54) une moyenne proportionnelle entre deux lignes; donc, &c.

COROLLAIRE I. Si le parallélogramme est rectangle, sa hauteur ne diffère pas de son côté perpendiculaire à la base; & il n'y a rien à changer à la méthode.

COROLLAIRE II. Pour quarrer un triangle cad , il suffit de prendre une moyenne proportionnelle entre la base & la moitié de la hauteur, ou entre la hauteur ap & la moitié de la base cd . Car le quarré de cette ligne sera égal à la surface du triangle.

COROLLAIRE III. Pour quarrer un polygone régulier il suffit de prendre une moyenne géométrique entre son périmètre & la moitié de son rayon droit, ou entre son rayon droit & la moitié de son périmètre, Car un polygone régulier est égal

au produit de son périmètre par la moitié de son rayon droit (72) ; il est donc égal à un rectangle , dont la base seroit égale au périmètre & la hauteur égale à la moitié du rayon droit ; donc , &c.

COROLLAIRE IV. Donc la surface d'un cercle adm (fig. 68) est égale à un quarré , dont le côté seroit moyen proportionnel-géométrique entre la circonférence & la moitié du rayon. En effet ce cercle est égal au triangle rectangle cmn , dont la base mn égale à la circonférence , & la hauteur cm égale au rayon du cercle ; donc (Corollaire II) la surface de ce cercle est égale au quarré dont le côté est moyen géométrique entre mn & $\frac{cm}{2}$; donc , &c.

REMARQUE. On pourroit donc quarrer le cercle géométriquement si étant donnée la circonférence on pouvoit trouver géométriquement le diamètre , & par conséquent le demi-diamètre ou le rayon ; mais on n'a pu jusqu'ici trouver en nombres le rapport du diamètre à la circonférence. Le rapport approché du diamètre à la circonférence , donné par *Archimede* , est celui de 7 : 22. Celui de *Métius* est de 113 : 355. Un autre Géometre le donne de 100 : 314. Si l'on fait le diamètre = 1 , la circonférence sera = 3.14159 à-peu-près ; de sorte que ce rapport est 1 : 3.14159 : mais ces rapports ne sont qu'approchés. Si l'on veut savoir quel doit être à-peu-près le côté d'un quarré égal à un cercle de 14 pieds de diamètre , on peut faire 7:22::14:x = $\frac{22 \times 14}{7} = 44$, circonférence du cercle donné. Multipliant la circonférence 44 par $\frac{7}{2}$, moitié du rayon , le produit 154 pieds quarrés sera la surface du cercle , & prenant une moyenne géométrique entre la circonférence & la moitié du rayon ,
on

on aura le côté du quarré cherché, ou bien en nombres prenant la racine de 154, en s'en tenant aux dixièmes vous aurez le côté du quarré égal à 12.4, c'est-à-dire que le côté cherché est de 12 pieds & quatre dixièmes de pied à-peu-près. En se servant d'un rapport plus exact, de celui de *Métius*, *par exemple*, on trouvera dans les différens cas des circonférences fort approchées. Si étant donnée la circonférence on demandoit le diametre, on le trouveroit avec la même facilité par une simple regle de trois. Si, *par exemple*, on demande le diametre d'un cercle dont la circonférence seroit de 66 pieds, l'on fera $22:7::66:x = 21$ à-peu-près; c'est-à-dire, que le diametre cherché est à-peu-près de 21 pieds.

80. PROBLEME. Réduire un polygone quelconque $f a b c d$ (fig. 75) en un polygone de même surface, & qui ait un côté de moins. Tirez la diagonale $f c$, & par le point d menez-lui la parallele $d p$ jusqu'à la rencontre de $a f$ prolongée s'il le faut, par le point c & le point p tirez la ligne $p c$, la figure $a b c p$ aura évidemment un côté de moins que la figure proposée, & de plus lui fera égale en surface : car par cette opération vous retranchez le triangle $f d c$, mais aussi vous ajoutez le triangle $f c p$: or ces deux triangles sont égaux en surface, ayant même base $f c$ & même hauteur, puisqu'ils ont leur sommet sur une même ligne $d p$ parallele à leur base. En opérant de même on réduira $a b c p a$ en une figure de trois côtés, c'est-à-dire, en triangle.

COROLLAIRE I. Donc on peut réduire un polygone rectiligne en un triangle de même surface.

COROLLAIRE II. Donc on peut quarrer tout

polygone rectiligne, puisque (79) nous savons quarrer un triangle.

REMARQUE. On peut avoir la surface d'un polygone quelconque, en réduisant ce polygone en triangles par le moyen des diagonales que l'on tirera dans ce polygone; cherchant ensuite les surfaces de chacun de ces triangles, la somme de ces surfaces donnera la surface du polygone. Pour avoir la surface d'un triangle, dont on connoît la base, il suffit de chercher sa hauteur pour la multiplier par la moitié de la base; or la hauteur se trouve en abaissant une perpendiculaire du sommet d'un angle sur la base opposée, laquelle base doit être prise pour la base du triangle.

D E S P L A N S.

81. *Le Plan* est une surface unie, qui n'a ni enfoncement ni élévation. Nous considérerons les Plans comme ayant une étendue infinie.

Un Plan est dit *perpendiculaire* sur un autre Plan, lorsqu'il le rencontre sans pencher d'un côté ni de l'autre. De même une ligne est dite *perpendiculaire* sur un Plan, lorsqu'elle rencontre ce Plan sans pencher d'aucun côté.

82. THÉOREME. 1°. Si une ligne acb * rencontre un Plan dmg (fig. 76), la rencontre sera un point c . 2°. Une ligne dc ne peut avoir deux points communs avec un Plan, sans être toute entière sur ce Plan, autrement elle ne seroit pas droite. 3°. La position d'un Plan dcm est déterminée par trois points d, c, m qui ne sont pas en ligne droite; car il est visible qu'alors le Plan auquel ces trois

* Il faut concevoir le point a au-dessus du Plan de la figure.

points appartiennent sera fixe. 4°. Si un plan $p c d$ rencontre un plan $g m c$, la section $c d$ sera une ligne droite : puisque cette section est commune à l'un & l'autre plan. 5°. Si deux plans parallèles, c'est-à-dire qui ne s'approchent ni ne s'éloignent, tels que $a b$ & $f g$ (fig. 77) sont coupés par un troisième Plan $a b f g$, les sections $a b$, $f g$ seront évidemment dans le Plan coupant & parallèles entre elles ; car autrement les Plans $a b$, $f g$ se rencontreroient, ce qui ne peut être, puisqu'ils sont parallèles. 6°. Si une ligne $a c$ (fig. 76) est perpendiculaire sur un Plan $d c m$, elle doit être perpendiculaire sur toutes les lignes $c g$, $c d$, &c. tirées sur ce plan par le point de rencontre ; car autrement elle pencheroit d'un côté ou de l'autre. Donc les angles $a c g$, $a c d$ doivent être droits. 7°. On ne peut d'un point a hors d'un Plan, ou d'un point c dans un Plan mener deux perpendiculaires à ce Plan : car il est visible que les lignes $a g$ & $c p$ penchent plus d'un côté que de l'autre. 8°. La commune section $a b$ (fig. 78) des deux Plans $g m$, $p n$ perpendiculaires sur un troisième plan $c d$, est perpendiculaire sur ce troisième Plan. Si par le point b commun aux deux plans $g m$, $p n$ on mène une perpendiculaire $a b$ au plan $c d$, cette perpendiculaire doit se trouver dans les deux Plans, autrement elle pencheroit d'un côté ou de l'autre. Cette perpendiculaire est donc la section commune des deux plans.

83. THÉOREME. L'inclinaison de deux Plans $b n$, $b q$ (fig. 79) * doit s'estimer par l'angle $d x p$,

* Il faut concevoir la ligne $x d$ (qui appartient au second Plan) comme ayant son extrémité d en l'air.

formé par deux lignes dx , px , perpendiculaires sur la section ab de ces deux Plans, & menées l'une dans le plan bn & l'autre dans le Plan bq . Car si l'on conçoit d'abord les deux Plans exactement appliqués l'un sur l'autre, & qu'ensuite ces Plans viennent à s'écarter, le point d en s'éloignant du point p décrira l'arc pd mesure de l'angle pxd , ou de l'angle que forment les deux Plans bn , bq .

REMARQUE. L'inclinaison d'une ligne pc sur un plan acd (fig. 76) est égale à l'angle pcd formé par la ligne pc & la ligne cd menée du point c où pc rencontre le Plan, au point d où la perpendiculaire abaissée de l'extrémité p de cette ligne rencontre le même plan. Car si l'on conçoit cp couchée sur cd , en écartant ensuite la ligne cp de cd , le point x qui se trouvoit en d au commencement du mouvement décrira l'arc dx , mesure de l'angle pcd , qui est évidemment l'inclinaison de cp par rapport au plan.

84. **THÉOREME.** La distance d'un point p à un Plan se mesure par la perpendiculaire pd abaissée de ce point sur le Plan. Car pd est plus courte que cp , puisque pd est perpendiculaire sur la ligne cd , tandis que cp lui est oblique.

85. **THÉOREME.** 1°. Si plusieurs Plans se coupent dans la même ligne, les angles qu'ils formeront autour de cette ligne vaudront précisément 360° . 2°. Si plusieurs Plans parallèles sont coupés par un Plan quelconque, les angles correspondans, les angles alternes-internes, alternes-externes seront égaux, & deux angles soit intérieurs, soit extérieurs du même côté du Plan coupant, l'un appartenant à l'un des Plans parallèles, & le second à un autre, vaudront deux angles droits. 3°. Si

un Plan en coupe un autre , les deux angles de suite que forment ces Plans vaudront deux angles droits. De même deux Plans seront parallèles , si étant coupés par un troisième Plan , les angles correspondans sont égaux , si les angles alternes-internes ou alternes-externes sont égaux , &c. Tout cela suit évidemment de la nature des Plans , & de la mesure de l'angle de l'inclinaison des Plans qui se rencontrent.

86. THÉOREME. Deux droites dc , gc qui se rencontrent en un point c , sont toujours dans un même Plan. Car la surface gcd , dans laquelle se trouvent ces droites est évidemment un Plan.

87. THÉOREME. Deux droites ac , pd perpendiculaires sur un Plan gcd sont parallèles. Car joignant par la ligne cd les points de rencontre de ces lignes avec le Plan , les lignes ac , pd seront perpendiculaires sur la même ligne cd (82) ; donc selon ce que nous avons dit ci-dessus (18) , ces lignes sont parallèles.

88. THÉOREME. Si deux Plans sont parallèles , une ligne perpendiculaire à l'un des deux sera perpendiculaire à l'autre. Car autrement ce second Plan seroit incliné sur une perpendiculaire au premier ; donc il seroit aussi incliné au premier ; donc il ne lui seroit pas parallèle , ce qui est contre la supposition ; donc , &c.

DÉFINITION. On appelle angle solide un angle c (fig. 80) formé par le concours de plusieurs angles plans , (un angle plan est la surface comprise entre les côtés d'un angle rectiligne ,) acb , acd , $dc b$ * : tel est , par exemple ,

* Il faut concevoir le point c élevé au-dessus du plan de la base abd .

un des coins d'un dé à jouer. Il est évident que deux angles plans acb , acd ne suffisent pas pour fermer un espace, qu'il en faut au moins trois pour former un angle solide, & que deux quelconques de ces trois sont plus grands que le troisième. Par exemple, les deux angles acb , acd pris ensemble, forment une surface anguleuse $dca cb$ plus grande que le troisième angle plan $dc b$.

89. THÉOREME. Tous les angles qui forment un angle solide valent toujours moins de 360° (fig. 81). Car les angles $d c f$, $f c g$, &c. autour du point c valent seulement 360° ; donc si l'on suppose qu'on élève en l'air le point c jusqu'en a , par exemple, les côtés $d c$, $f c$, $c g$, &c. s'allongeront & deviendront $d a$, $f a$, $g a$, &c. les bases $d f$, $f g$, &c. restant les mêmes; donc les angles $f c d$, $f c g$, &c. diminueront; donc les angles plans qui forment l'angle solide a vaudront moins de 360° .

DES SOLIDES.

90. Le *Solide géométrique*, duquel seul il est ici question, est une étendue qui a les trois dimensions, longueur, largeur & profondeur *. On appelle *prisme* un Solide, dont la grosseur est la même dans toute sa longueur. On peut le concevoir formé par le mouvement d'un plan qu'on nomme *base du prisme*, qui monte parallèlement à lui même le long du côté $d h$ du prisme (fig. 82), & qui laisse partout des traces d'une épaisseur fort petite. Le prisme est appelé *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *exagonal*, &c. selon que le plan générateur est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, &c. De cette génération du prisme, il suit que chaque côté du *polygone générateur* doit

* Le corps est un assemblage de parties matérielles qui se trouvent souvent dans l'espace que nous appelons *solide*. Cependant bien des gens donnent le nom de *solide* au corps, confondant mal-à-propos le *solide géométrique* avec le *solide physique*.

décrire un parallélogramme pendant le mouvement de ce polygone générateur. Si le polygone générateur est un cercle (fig. 83), le prisme est appelé *cylindre*. Si le plan générateur est un parallélogramme, le prisme prend le nom de *parallélipède*. Si le plan générateur est un parallélogramme rectangle, on a un *parallélipède rectangle*. Si le plan générateur est perpendiculaire dans son mouvement au côté, le prisme est *droit*; s'il lui est oblique, le prisme, le cylindre, le parallélipède sont dits *obliques*. Si le plan générateur est un carré, & que dans son mouvement il soit perpendiculaire au côté ad (fig. 84), le solide fera un *cube*, pourvu que le côté ad soit égal au côté ab du carré générateur. Une ligne droite tirée du centre de la base supérieure au centre de la base inférieure d'un prisme ou d'un cylindre, s'appelle *l'axe* du prisme ou du cylindre : telle est la ligne aa (fig. 82 & 83). Si l'axe est perpendiculaire sur les bases supérieure & inférieure (qui sont toujours parallèles), les prismes & cylindres sont appelés *droits*; mais si l'axe est oblique sur les bases, le prisme est dit *oblique*, & sa hauteur doit s'estimer par une perpendiculaire menée entre les deux bases parallèles, en en prolongeant une s'il le faut.

Une *pyramide* est un solide dont la base est un polygone, & qui est terminée par des surfaces triangulaires qui forment un angle solide, qu'on appelle *le sommet de la pyramide* (fig. 85). Si l'on fait mouvoir une ligne ad de manière que son extrémité a restant fixe, l'extrémité d parcourt le contour du polygone $bdfgh$, cette ligne engendrera dans ce mouvement la surface latérale du solide, qu'on appelle *pyramide*. Si le plan de la

base est un triangle , un quadrilatere , un pentagone , &c. la pyramide est appelée *triangulaire* , *quadrangulaire* , *pentagonale* , &c. Si le plan de la base est un cercle (fig. 86) la pyramide prend le nom de *cône* , de sorte qu'un cône n'est autre chose qu'un solide , dont la base est un cercle & qui finit en pointe. Une ligne tirée du sommet du cône ou de la pyramide au centre de la base , s'appelle *l'axe* du cône ou de la pyramide. Si l'axe est perpendiculaire à la base , la pyramide est *droite* , de même dans ce cas le cône est *droit*. Une ligne *am* (fig. 85) abaissée du sommet du cône ou de la pyramide perpendiculairement sur le plan de la base prolongée s'il le faut , mesure la hauteur de la pyramide ou du cône. L'apothème d'une pyramide droite (fig. 81) , dont la base est un polygone régulier (nous désignons dans la suite cette pyramide en l'appellant simplement *pyramide droite*) , est une ligne *ap* tirée du sommet perpendiculairement sur un des côtés de la base de la pyramide.

Si un demi-cercle *amb* se meut autour du diamètre *ab* (fig. 87) il engendrera un solide rond , dont tous les points de la surface seront également éloignés du point *c* qu'on nomme *centre* : ce solide s'appelle *sphère* ou *globe*. L'arc *an* engendrera une *calotte sphérique nal* , le secteur circulaire *nc l* engendrera un *secteur sphérique nal c* , & le demi-segment *na g* engendrera un *segment sphérique nal g*. La partie de la surface sphérique comprise entre deux plans parallèles *mp* , *nl* s'appelle une *zone*.

91. Les solides sont *réguliers* ou *irréguliers*. Les solides réguliers sont ceux qui sont terminés de tous côtés par des faces égales & régulières.

Les solides irréguliers sont ceux qui sont terminés par des surfaces qui n'ont point ces conditions.

Il y a cinq solides réguliers. Le *tétraedre*, qui n'est qu'une pyramide terminée par 4 triangles égaux & équilatéraux (fig. 88). Le *cube* ou l'*hexaedre* (fig. 84) terminé par six quarrés égaux. L'*octaedre* (qui n'est qu'une double pyramide quadrangulaire) est terminé par 8 triangles égaux & équilatéraux (fig. 89). Le *dodécaedre* est terminé par 12 pentagones égaux & équilatéraux (fig. 90). Enfin l'*icosaedre* est terminé par 20 triangles égaux & équilatéraux (fig. 91).

92. COROLLAIRE I. Parce que les Solides réguliers sont terminés de tous côtés par des figures régulières égales, il est clair qu'on peut les inscrire dans une sphere, de maniere que tous leurs angles se trouvant à la surface de la sphere, leur centre se confonde avec celui de la sphere.

93. COROLLAIRE II. Si donc l'on tire des angles de chacun de ces Solides des lignes au centre de la sphere, il est visible que ces Solides seront composés d'autant de pyramides égales qu'ils ont de faces, que le sommet commun de ces pyramides étant au centre de la sphere, leurs bases sont les faces mêmes de ces Solides.

94. PROBLEME. Trouver le développement des Solides réguliers. Pour le *tétraedre* (fig. 92) coupez sur une carte un triangle équilatéral abc , divisez les côtés de ce triangle en deux également en x & tirant des lignes par les points de division, vous aurez 4 triangles égaux & équilatéraux. Le triangle xxx sera la base, les autres triangles seront les faces du *tétraedre*, que vous formerez facilement en pliant la figure, de sorte que les lignes xx servent de plis, & que les points abc aillent se joindre en un seul point. La figure 93, composée de 6 quarrés égaux, représente le développement du cube. La figure 94, composée de deux triangles équilatéraux & tellement assortis qu'ils aient chacun la moitié d'un de leurs côtés commune, représente les 8 triangles qui forment la face de l'*octaedre*. La figure 95 représente le développement du *dodécaedre*, & enfin la figure 96 représente celui de l'*icosaedre*.

95. THÉOREME. Il n'y a que cinq Solides réguliers. Car les angles plans qui forment un angle solide valent toujours moins de 360° (89); donc trois angles de triangle

équilatéral pourront former l'angle solide du tétraèdre : en effet l'angle du triangle équilatéral vaut 60° ; donc ses trois angles valent seulement 180° . L'angle solide de l'octaèdre sera composé de quatre angles plans, chacun de 60° ; donc il sera de 240° . L'angle de l'icosaèdre, composé de 5 angles plans chacun de 60° , vaut 300° , moindres que 360° . Mais 6 angles de 60° valant 360° , il est visible qu'on ne pourra pas former d'angle solide avec 6 triangles égaux & équilatéraux ; à plus forte raison on n'en pourra pas former avec un plus grand nombre. Voilà donc les seuls Solides réguliers qu'on peut former avec le triangle équilatéral. Avec trois angles de carré, qui valent ensemble 3 fois 90° , ou 270° , on pourra former l'angle du cube ou de l'exaèdre ; mais on ne pourra former d'angle solide avec 4 angles de carré, ni avec un plus grand nombre. Enfin l'angle du pentagone régulier valant 108° (38), on peut avec 3 angles de pentagone régulier former l'angle solide du dodécaèdre, qui vaudra 324° , mais 4 de ces angles valent plus de 360° ; donc on ne peut former d'autre Solide régulier avec le pentagone, que le seul dodécaèdre. A l'égard des autres polygones, *par exemple*, de l'exagone, de l'eptagone, &c. il est visible qu'on ne peut s'en servir pour former un angle solide ; car pour former un angle solide, il faut au moins 3 angles plans, dont la somme soit moindre que 360° ; or 3 angles d'exagone, d'eptagone, &c. ne peuvent pas donner une somme moindre que 360° ; donc, &c.

96. REMARQUE. Le triangle équilatéral, le carré & le pentagone régulier sont les seuls polygones avec lesquels on puisse former un Solide régulier. Mais on ne peut pas se servir de tous ces polygones pour remplir l'espace qui est autour d'un point o , en n'employant que des polygones de même espèce (fig. 97). Car l'espace autour d'un point o vaut 360° (11), mais 6 angles de triangle équilatéral valent aussi 360° ; donc on peut avec 6 angles de triangle équilatéral remplir l'espace autour d'un point. 4 angles de carré valent 360° ; donc 4 angles de carré peuvent remplir l'espace autour d'un point. 4 angles de pentagone valent plus de 360° , & 3 angles de pentagone valent moins de 360° ; ainsi l'on ne peut pas se servir du pentagone régulier pour remplir l'espace autour d'un point. 3 angles d'exagone valent 360° ; par conséquent on peut avec 3 angles d'exagone remplir l'espace au-

tour d'un point ; mais 3 angles d'eptagone , d'octogone , &c. valant plus de 360° , & deux de ces angles valant moins de 360° (parce qu'un angle ne peut jamais valoir 180° , autrement il n'y auroit point d'angle , mais une seule ligne droite) , il s'ensuit qu'on ne peut point les employer pour remplir l'espace autour d'un point. C'est pourquoi pour carreler une chambre en n'employant que des polygones de même espèce , on ne peut se servir que du triangle équilatéral , du quarré ou de l'exagone. On préfère ordinairement ce dernier à cause que ses angles obtus sont plus solides que ceux des deux autres.

97. PROBLEME. *Trouver le développement de la surface latérale du prisme droit.* La surface latérale du prisme droit (fig. 82) étant composée d'autant de parallélogrammes de même hauteur , qu'il y a de côtés dans le polygone générateur , la surface latérale du prisme sera égale à un parallélogramme rectangle $acdb$, dont la hauteur ac sera égale au côté dh du prisme & dont la base ab est égale au périmètre de la base du prisme.

REMARQUE. Si le prisme étoit oblique en prenant la ligne ac égale à la hauteur des parallélogrammes qui composent la surface latérale du prisme , l'on auroit une surface égale à la surface latérale du prisme.

COROLLAIRE. Le rectangle $cabd$ peut représenter le développement du cylindre droit dha (fig. 83) en prenant $ac = hd$, & faisant ab égale à la circonférence du cercle de la base. Si le prisme est oblique , on prendra ac égale à la distance qu'il y a entre les circonférences des bases supérieure & inférieure , & l'on aura une surface égale à la surface latérale du prisme , mais non pas son développement.

98. THÉOREME. *Trouver le développement de la surface latérale de la pyramide (fig. 98).* Cette surface étant composée d'autant de triangles qu'il

Il y a de côtés dans la base de la pyramide, il est clair que la surface latérale d'une pyramide qui auroit cinq faces égales respectivement aux triangles qui forment la figure 98., a cette même figure pour développement.

COROLLAIRE. Le développement de la surface d'un cône droit sera un secteur de cercle abd (fig. 99), dont le rayon ab sera égal au côté du cône (on appelle aussi ce côté *l'apothème du cône*), & l'arc bd égal à la circonférence de la base de ce cône; car tous les points de la circonférence de la base du cône droit étant également éloignés du sommet, la surface latérale du cône droit est égale à la somme de tous les triangles qui ont leur sommet au sommet du cône, & leur base sur la circonférence de la base du cône; or tous ces triangles sont évidemment égaux au secteur bad ; donc, &c.

99. **DÉFINITION.** On appelle *solides semblables* ceux qui ont un même nombre d'angles homologues égaux, dont toutes les faces sont des figures semblables (qui par conséquent peuvent se réduire en triangles semblables) & dont toutes les dimensions sont proportionnelles.

COROLLAIRE. Si l'on tire deux diagonales homologues dans deux Solides semblables, ces diagonales feront avec les côtés homologues (ou même avec des lignes homologues quelconques) des triangles semblables; donc ces diagonales sont entre elles comme les côtés homologues ou diagonales homologues, &c.

100. **THÉOREME.** La surface d'un Solide quelconque est égale à la somme des surfaces des faces de ce Solide : ce Théorème est évident.

COROLLAIRE. Donc en mesurant les faces

d'un Solide , on aura aisément la surface de ce Solide.

101. THÉOREME. *La surface d'un Solide régulier est égale à la surface d'une des faces multipliée par le nombre des faces du Solide.* Car la surface d'un Solide régulier est composée d'un certain nombre de faces égales (91) ; donc la surface totale d'un tel Solide est égale à la surface de l'une quelconque de ces faces , multipliée par le nombre des faces.

102. THÉOREME. *La surface latérale d'un prisme est égale au produit d'un des côtés du prisme par le périmètre d'une section du prisme faite perpendiculairement à l'axe du prisme.* Car nous avons dit que la surface latérale d'un prisme étoit composée d'autant de parallélogrammes qu'il y a de côtés dans le polygone générateur ; mais chacun de ces parallélogrammes , tel que $l i g f$ (100) est égal au produit du côté $f i$ ou $g l$ du prisme par la ligne $x p$ perpendiculaire à $g l$ ou $i f$; donc la surface latérale est égale au produit d'un des côtés $g l$ du prisme par le nombre des perpendiculaires $x p$, ou par le périmètre de la section faite perpendiculairement à l'axe ou au côté du prisme.

COROLLAIRE. Donc la surface d'un prisme droit & d'un cylindre droit (fig. 82 & 83) est égale au produit du côté $h d$ par le contour de la base ; parce qu'alors cette base est perpendiculaire au côté. A l'égard du cylindre oblique (fig. 100) , on mesurera , si l'on veut , la circonférence $p p$ avec un fil * , & multipliant cette circonférence par le

* Cette circonférence perpendiculaire au côté $h d$ ne sera pas un cercle , mais une courbe qu'on appelle *ellipse* & dont nous parlerons dans les Sections Coniques.

côté hd perpendiculaire au plan de la circonférence pp .

REMARQUE. En mesurant les surfaces des bases & les ajoutant à la surface latérale, l'on aura la surface totale ; or il est aisé d'avoir la surface des bases qui sont des polygones ou des cercles, dont on peut trouver la surface du moins par approximation.

103. THÉOREME. *La surface latérale d'une pyramide droite $bdfgh$ (fig. 81) est égale au produit du périmètre $bdfgh$ par la moitié de son apothème ap . Car puisque la pyramide est droite & sa base un polygone régulier, les triangles qui forment la surface latérale sont égaux entre eux ; or la surface d'un de ces triangles daf , par exemple, est égale au produit du côté df par la moitié de l'apothème ap , hauteur du triangle ; donc la surface totale est égale au produit du périmètre de la base par la moitié de l'apothème de la pyramide, ou au produit de l'apothème par la moitié du périmètre de la base.*

COROLLAIRE. Donc la surface latérale d'un cône droit $abpd$ (fig. 86) est égale au produit de son côté, ou apothème ba par la moitié de la circonférence de la base, ou au produit de la moitié de l'apothème par la circonférence de la base.

REMARQUE I. Si la pyramide est oblique (fig. 85) on mesurera chacun des triangles qui forment sa surface latérale, & l'on aura la surface totale. A l'égard du cône oblique, on divisera sa circonférence en parties bp assez petites pour que chacune puisse être regardée, sans erreur sensible, comme une ligne droite, & mesurant la surface de chaque triangle bap , ajoutant ensuite toutes ces surfaces,

l'on aura la surface latérale du cône oblique d'autant plus exactement que les lignes bp auront été prises plus petites *.

REMARQUE II. A l'égard de la base soit de la pyramide, soit du cône, on voit bien comment il faut la mesurer, puisqu'elle est un polygone ou un cercle.

104. THÉOREME. *La surface latérale d'une pyramide droite tronquée en mnm , supposant les deux bases parallèles (fig. 81), est égale au produit du reste de l'apothème ap par la moitié de la somme des périmètres des deux bases.* Car si l'on conçoit un plan, coupant mnm parallèle à la base, ce plan retranchera la petite pyramide man & la partie na de l'apothème ap , & les faces latérales du tronc seront évidemment des trapezes, dont la hauteur commune sera le reste np de l'apothème, & les bases seront les côtés mêmes des bases de la pyramide tronquée; donc la surface latérale de cette pyramide sera égale à la surface d'un trapeze, dont une de bases seroit le périmètre de la base inférieure, & l'autre base le périmètre de la base supérieure de la pyramide tronquée; or (71) la surface d'un trapeze est égale au produit de sa hauteur par la moitié de la somme de ses bases; donc, &c.

REMARQUE. Si la pyramide étoit oblique on chercheroit la surface de chaque trapeze $dmtf$, la somme de toutes ces surfaces donneroit la surface cherchée. De même pour le cône oblique (fig. 85), supposant que la partie bp de la circonférence

* La surface exacte du cône oblique ne peut pas se trouver par la Géométrie Élémentaire; elle demande le secours du Calcul intégral.

de la base inférieure ne diffère pas sensiblement d'une ligne droite, on cherchera la surface de chaque trapeze $bMnp$, la somme de ces surfaces donnera la surface du cône tronqué oblique d'autant plus exactement que les lignes bp approcheront plus d'être droites.

COROLLAIRE I. La surface latérale d'une pyramide tronquée droite (fig. 81) est égale au produit de son apothème np par le périmètre oo de la section oo que je suppose passer par le milieu des côtés md , mg parallèlement aux bases; car chacun des côtés de cette section sera la moitié de la somme des bases du trapeze correspondant; donc le périmètre de cette section sera la moitié de la somme des périmètres des deux bases; or (par le Théorème) le produit de cette demi-somme par l'apothème est égale à la surface latérale de la pyramide tronquée; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc la surface latérale du cône droit tronqué (en supposant ses deux bases parallèles) est égale au produit de son apothème nd par le périmètre oo de la section faite par le milieu d'un des côtés nd parallèlement aux bases (fig. 86). Car un cône droit tronqué n'est autre chose qu'une pyramide droite tronquée, dont les bases sont des cercles; donc par le Corollaire précédent cette surface est égale au produit de l'apothème nd par la circonférence Noo du cercle décrit par le milieu du côté nd parallèlement aux bases.

105. **THÉOREME.** La surface d'une sphere décrite par la révolution du demi-cercle amb (fig. 87) autour du diamètre ab * est égale au produit de la circonfé-

* Toutes les lignes tirées par le centre de la sphere &c
rence

rence d'un de ses grands cercles par son diamètre. Des points m, i, n , ou des extrémités & du milieu de l'arc min (qui en le supposant extrêmement petit, sera sensiblement une portion de la tangente tt), ayant abaissé les perpendiculaires md, ix, ng sur le diamètre ab , & du point m la perpendiculaire mo sur ng ; les triangles mon, ngc ayant tous leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre seront semblables (49). Donc l'on a $nc : ng$ ou ix (parce que l'arc mn étant fort petit, ix est sensiblement égale à ng) :: $mn : mo$; mais les circonférences étant entr'elles comme leurs rayons (63), l'on a la circonférence dont nc est le rayon, & à la circonférence dont ix est le rayon comme $mn : mo$; donc le produit de mo par la circonférence du rayon nc , ou par la circonférence d'un grand cercle de la sphere, est égal au produit de mn (côté du cône tronqué décrit par mn pendant la révolution du demi-cercle amb autour de ab) par la circonférence décrite par le rayon xi autour de x , c'est-à-dire, par la circonférence d'un cercle décrit par le milieu i de ce cône tronqué parallèlement à ses bases. Or (104) ce produit est égal à la surface du cône tronqué décrite par mn ; donc la surface décrite par chaque arc mn est égale au produit de la circonférence d'un grand cercle de la

terminées de part & d'autre à la surface, sont appelées *diamètres de la sphere*; mais on appelle *axe* celui des diamètres autour duquel la sphere est censée tourner. On nomme *grands cercles de la sphere* ceux qui ont pour centre le centre même de la sphere; mais ceux qui ont leurs centres hors du point c , sur un diamètre quelconque ab , sont des petits cercles de la sphere. Une ligne cn tirée du centre à la surface de la sphere est un *rayon*.

416 COURS DE MATHÉMATIQUES.

de la base inférieure ne diffère pas sensiblement
d'une ligne droite, on cherchera la surface de
la somme de ces surfaces, ainsi d'au-

S, s
nme
taite

u,
4inf

(02)
nul-
lées

c.
& p
= h,
pro-

I=
des
fines
xes,
s cy-

indres
12 : h2.

H : ph,
lquelles

u cylin-
la raison

& H : h;
me totales

, comme les
es. Car deux

rs dimensions
rs surfaces doi-
Dd 2

sphère par chaque ligne correspondante $mo = dg$ (hauteur du cône tronqué correspondant), ou par la partie du diamètre correspondante à cet arc; donc la surface totale décrite par tous les arcs mn , c'est-à-dire, la surface totale de la sphère, est égale au produit de la circonférence d'un grand cercle par la somme des parties du diamètre correspondantes à tous les arcs mn , c'est-à-dire, par le diamètre ab de la sphère; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc la surface d'une calotte sphérique map , est égale au produit de la circonférence d'un grand cercle de la sphère par la hauteur ad de cette calotte, & la surface d'une zone $mnlp$ est égale au produit de la circonférence d'un grand cercle par la hauteur dg de la zone.

REMARQUE I. La surface d'un secteur sphérique $nalc$ est égale à la surface de la calotte nal , plus la surface latérale du cône ncl .

REMARQUE II. Puisque pendant la révolution du demi-cercle amb autour du diamètre ab tout point m de ce demi-cercle décrit un cercle dont mp est le diamètre; il est visible que la section d'une sphère par un plan quelconque mdp sera un cercle.

COROLLAIRE. La surface de la sphère est égale à la surface latérale du cylindre qui lui est circonscrit, c'est-à-dire, qui la touche par côté, supérieurement & inférieurement (fig. 101). Car la base d'un tel cylindre a un diamètre égal à celui de la sphère, & sa hauteur est aussi égale au diamètre ab de la sphère; mais la surface latérale du cylindre droit est égale au produit de son côté ou de son axe ab par la circonférence de sa base (102); donc, &c.

Du rapport des Surfaces des Solides.

106. THÉOREME. *Les surfaces latérales S, s des deux prismes ou cylindres sont entr'elles comme les produits des périmètres P, p de la section faite perpendiculairement à leur axe par leurs côtés, ou ; ce qui revient au même, par leurs axes H, h . Ainsi l'on aura $S : s :: PH : ph$. Car nous avons vu (102) que le produit des périmètres de ces sections multipliées par les côtés, étoient égaux aux surfaces latérales de prismes ou cylindres ; donc, &c.*

COROLLAIRE I. *Donc si les périmètres P & p sont égaux, l'on aura $S : s :: H : h$; & si $H = h$, l'on aura $S : s :: P : p$. (Voyez les raisons & proportions dans le calcul).*

COROLLAIRE II. *Si $P : p :: h : H$, alors $PH = ph$; & $S = s$. C'est-à-dire que si les périmètres des sections perpendiculaires à l'axe des deux prismes ou cylindres sont en raison inverse de leurs axes, les surfaces latérales de ces prismes ou de ces cylindres seront égales.*

COROLLAIRE III. *Si les prismes ou cylindres sont semblables, on aura $S : s :: P^2 : p^2 :: H^2 : h^2$. Car la raison $S : s$ étant égale à la raison de $PH : ph$, qui est composée de raisons $P : p$ & $H : h$, lesquelles raisons sont égales lorsque les prismes ou cylindres sont semblables (99) ; dans ce cas la raison de $S : s$ sera une raison doublée de $P : p$ & $H : h$; donc, &c. En général les surfaces, même totales des solides semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs dimensions homologues. Car deux solides semblables ayant toutes leurs dimensions homologues proportionnelles, leurs surfaces doi-*

vent être en raison des produits des dimensions proportionnelles ; ou comme les quarrés de ces dimensions.

COROLLAIRE IV. Il suit du dernier Corollaire que les surfaces des spheres sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diametres : car les spheres sont des solides semblables, dont les rayons ou diametres sont des lignes homologues.

107. **THÉOREME.** *La surface de la sphere est à celle d'un de ses grands cercles ; comme 4 : 1. C'est-à-dire qu'elle est quadruple de la surface d'un de ses grands cercles : car la surface de la sphere est égale au produit de la circonférence c d'un de ses grands cercles par le diamètre d de ce même grand cercle ; tandis que la surface de ce grand cercle est égale au produit de la même circonférence c par la moitié du rayon, ou par le quart du diametre d ; donc ces deux surfaces sont entr'elles comme cd :*

$$\frac{cd}{4} :: 1 : \frac{1}{4} :: 4 : 1.$$

108. **THÉOREME.** *La surface totale du cylindre circonscrit est à la surface de la sphere comme 3 : 2. Car (105) la surface de la sphere est égale à la surface latérale du cylindre circonscrit ; donc la surface latérale du cylindre circonscrit vaut 4 grands cercles de la sphere ; c'est pourquoi en y comprenant les bases, dont chacune est un grand cercle de la sphere, la surface totale du cylindre vaudra 6 grands cercles de la sphere ; ainsi cette surface est à celle de la sphere comme 6 : 4, ou 3 : 2 ; donc, &c.*

109. **THÉOREME.** *La surface totale du cône équilatéral (fig. 102) est à la surface de sa base comme 3 : 1. Pour avoir*

la surface latérale du cône équilatéral gdf , il faut multiplier la circonférence de la base par la moitié du côté $gd = gf$, (voyez le n°. 103) ; mais pour avoir la surface de la base , il suffit de multiplier cette même circonférence par la moitié de son rayon, ou par le quart de gf ; donc la surface latérale de ce cône vaut deux fois la surface de la base ; donc la surface latérale plus la surface de la base , vaut trois fois la surface de la base ; donc , &c.

110. THÉOREME. *La surface de la sphere est à la surface du cône équilatéral circonscrit comme 4 : 9* *. Du centre c de la sphere inscrite dans le cône gdf ayant tiré les rayons cg , cf , cd ; à cause du triangle équilatéral gdf , les arcs df , dg , gf seront égaux aussi-bien que leurs cordes. Donc ils vaudront chacun la troisième partie du cercle ou 120° ; donc du point c tirant la perpendiculaire cba sur le milieu de gf , les arcs ga , af vaudront chacun 60° , & leurs cordes ga , af seront égales aux rayons cg , cf ; ainsi les points g & f sont également éloignés de c & de a , & gf coupe ca en deux également en b . Donc cb est la moitié de ca ou de cg ; or $(gc)^2 = (cb)^2 + (gb)^2$ (76) ; donc en faisant $gc = 1$, cb sera $= \frac{1}{2}$, $(cb)^2 = \frac{1}{4}$, & $(gb)^2 = \frac{3}{4}$. Mais les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ; donc le cercle dont le rayon est cb , est au cercle dont le rayon est gb , comme $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$, ou comme 1 : 3. C'est-à-dire que le grand cercle de la sphere inscrite étant 1, la base du cône circonscrit sera 3 ; mais la surface de la sphere vaut 4 de ses grands cercles, tandis que la surface totale du cône équilatéral vaut 3 fois la surface de sa base ; donc ces surfaces sont entr'elles comme $1 \times 4 : 3 \times 3 :: 4 : 9$; donc , &c.

111. THÉOREME. *Si à une sphere (fig. 101) on circonscrit un cylindre & un cône équilatéral, les surfaces de ces trois solides seront entr'elles comme 4 : 6 : 9*. Cela suit évidemment des n°. 108 & 110.

COROLLAIRE. Donc la surface du cylindre circonscrit est moyenne proportionnelle entre la surface de la sphere & celle du cône équilatéral circonscrit.

* Un cône circonscrit à une sphere est celui qui la touche en dessous & par côté.

112. THÉOREME. *La surface de la sphere circonscrite au cône équilatéral (fig. 102) est quadruple de celle de la sphere inscrite dans le même cône.* Car le rayon cg de la première est double du rayon cb de la seconde (par la démonstration de l'avant dernier Théorème); c'est pourquoi ces surfaces sont entr'elles comme $4 : 1$ (106); donc, &c.

De la solidité des Solides & de leur rapport.

113. THÉOREME. *La solidité d'un prisme ou d'un cylindre droit ou oblique (fig. 82 & 100) est égale au produit de sa base par sa hauteur.* Car si l'on conçoit un prisme ou un cylindre engendré par le mouvement de sa base, qui laisse en montant parallèlement à elle-même des traces d'une épaisseur infiniment petite, il est évident qu'il faudra multiplier une de ces traces par le nombre de fois que son épaisseur est contenue dans la hauteur, ou, ce qui revient au même, multiplier la base par la hauteur *; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc les prismes & les cylindres droits & obliques sont en raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs.

COROLLAIRE II. Donc si les bases des deux cylindres A & a (il en est de même de deux prismes) sont B & b , les hauteurs H & h , le pre-

* Comme multiplier c'est prendre le multiplicande un certain nombre de fois désigné par le multiplicateur, il est évident qu'on ne peut multiplier par une ligne. Seulement on conçoit la base d'une certaine épaisseur & l'on prend cette base autant de fois que son épaisseur est contenue dans la hauteur. Rien n'empêche cependant qu'on ne continue de dire le produit de la base par la hauteur, pourvu qu'on entende par-là ce que nous venons de dire.

mier sera au second comme $BH : bh$. Si $H = h$, l'on aura $A : a :: B : b$. Si $B = b$, on aura $A : a :: H : h$. Si $B : b :: h : H$, alors $BH = bh$, & $A = a$.

114. THÉOREME. Deux pyramides triangulaires de même base & de même hauteur sont toujours égales en solidité (fig. 103). Car les deux pyramides ayant même hauteur, il est évident qu'elles seront comprises entre les mêmes plans parallèles, & que si on les coupe par des plans xx parallèles à leurs bases, le nombre des tranches sera le même de part & d'autre, & l'épaisseur des tranches correspondantes sera aussi la même; or les surfaces omn , spi des tranches correspondantes seront égales. En effet les triangles bcd , mon sont semblables; car tous les côtés de l'un sont parallèles aux côtés correspondans de l'autre, om est parallèle à bc , mn à bd & on à dc ; donc si l'on conçoit que le triangle mon descende le long de oc , de manière que om reste toujours parallèle à bc , lorsque le point o tombera sur le point c , le côté om tombera sur bc , on sur cd , & mn sera parallèle à bd ; donc ces deux triangles auront un angle commun & des bases parallèles; donc ils sont semblables. On démontrera de même que le triangle spi est semblable au triangle fgh , égal à bcd (par supposition). De plus les triangles semblables bac , aom donnent $bc : om :: ba : am$, & les triangles semblables afg , aps donnent $fg : ps :: af : ap$. Mais les triangles semblables baf , amp donnent $ba : am :: af : ap$; donc $bc : om :: fg : ps$, & $(bc)^2 : (mo)^2 :: (fg)^2 : (ps)^2$; & parce que les triangles semblables sont entr'eux comme les quarrés des côtés homologues, l'on a $bcd : mon :: fgh :$

$p s i$, ou $b c d : f g h :: m o n : p s i$. Mais $b c d = f g h$, par supposition ; donc $m o n = p s i$. donc les deux pyramides contiennent un nombre égal de tranches égales ; donc elles sont égales.

COROLLAIRE I. Deux pyramides quelconques de même base & de même hauteur sont égales ; car si l'on partage les bases de ces pyramides en un même nombre de triangles égaux chacun à chacun, & qu'on conçoive par le sommet de ces pyramides, des lignes tirées aux trois angles de chacun de ces triangles ; il est visible que chacune de ces pyramides sera divisée en un même nombre de pyramides triangulaires, qui auront des bases & des hauteurs égales chacune à chacune ; or par le Théorème ces pyramides triangulaires sont égales ; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc deux cônes, l'un droit & l'autre oblique de même base & de même hauteur sont égaux : car un cône est une pyramide, dont la base est un cercle ; donc, &c.

115. THÉOREME. *Un prisme triangulaire droit $abcdfg$ (fig. 104) vaut trois pyramides de même base & de même hauteur. Ayant tiré les lignes bf , bd , dc , on peut concevoir le prisme divisé en trois pyramides, dont l'une $bdfg$, a même base $d g f$ & même hauteur $g b$ que le prisme. Celle-ci étant ôtée, le reste se divise en deux pyramides $acdb$, $cdfb$. Les deux pyramides $acdb$, $bdfg$ sont égales, puisqu'elles ont chacune pour base une des bases du prisme, & pour hauteur un des côtés du prisme. De plus la pyramide $acdb$ est $= cdfb$; car la diagonale cd partageant le parallélogramme $acdf$ en deux parties égales, ces deux pyramides ont chacune pour base la moitié de ce parallélogramme, &c*

leur sommet en b . Elles ont donc même hauteur & des bases égales, ce qui les rend égales; donc les trois pyramides sont égales; donc le Théorème est également vrai lorsque le prisme triangulaire n'est pas droit *.

COROLLAIRE I. Tout prisme est triple d'une pyramide de même base & de même hauteur. *Par exemple*, un prisme pentagonal est triple d'une pyramide pentagonale de même base & de même hauteur (fig. 82). Car si l'on divise les bases de ce prisme en un même nombre de triangles égaux, & que de tous les angles correspondans des triangles de l'une des bases, ou même des lignes aux angles correspondans des triangles de l'autre base, on peut concevoir facilement le prisme divisé en un certain nombre de prismes triangulaires, *par exemple*, ici en 5; or chacun de ces prismes est triple d'une pyramide triangulaire de même base & de même hauteur; donc le prisme entier est triple de la somme de ces cinq pyramides triangulaires; mais ces cinq pyramides triangulaires sont évidemment égales à une seule pyramide pentagonale de même hauteur, & dont la base seroit égale à la somme des bases de ces pyramides; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc le cylindre est triple du cône de même base & de même hauteur. Car le cylindre est un prisme dont la base est un cercle, & le cône une pyramide dont la base est aussi un cercle.

* Cela a lieu également soit qu'on suppose le prisme droit ou oblique; car les pyramides $bdfg$, $abcd$ ayant chacune pour base une des bases du prisme, & leurs sommets, l'une en b & l'autre en d ont évidemment même hauteur que le prisme; de plus $acbd = dcdf$.

COROLLAIRE III. Donc pour avoir la solidité d'une pyramide ou d'un cône, il suffit de multiplier la base par le tiers de la hauteur. Car la solidité du prisme étant égale au produit de sa base par sa hauteur, celle de la pyramide, qui n'est que le tiers de celle du prisme, doit être égale au produit de la base par le $\frac{1}{3}$ de la hauteur ; donc, &c.

COROLLAIRE IV. Donc la surface des polyedres réguliers est égale au produit de leur surface par le tiers de la perpendiculaire abaissée du centre sur le milieu d'une des faces du polyedre, (nous appellerons cette perpendiculaire *rayon droit*). En effet on peut (93) concevoir chaque polyedre régulier comme composé d'autant de pyramides égales que le polyedre a de faces : ces pyramides ont leur sommet commun au centre du polyedre, leur hauteur est égale au rayon droit, & leur base est une des faces du polyedre ; donc chacune de ces pyramides est égale à une des faces multipliée par le $\frac{1}{3}$ du rayon droit, & leur somme, ou la solidité du polyedre est égale au produit de toutes les faces, c'est-à-dire, au produit de la surface du polyedre par le $\frac{1}{3}$ du rayon droit du polyedre.

COROLLAIRE V. La solidité de la sphere est égale au produit de sa surface par le $\frac{1}{3}$ de son rayon. Car on peut concevoir la sphere comme composée d'une infinité de pyramides qui ont leur sommet au centre, dont la base de chacune est une portion infiniment petite de la surface de la sphere, & dont la hauteur est égale au rayon de la même sphere ; or la somme de toutes ces pyramides est égale à une seule pyramide qui auroit pour base la surface entière, & pour hauteur le rayon de la sphere ; donc, &c.

COROLLAIRE VI. Il suit du Corollaire précédent que la solidité du cylindre circonscrit à une sphere est à la solidité de la sphere comme 3 : 2. Car soit c la surface d'un grand cercle de la sphere, sa surface sera $= 4c$ (107) ; & faisant le rayon de

la sphere $= r$, la solidité fera $= 4 \frac{c r}{3} = \frac{4}{3} c r$. Mais la solidité du cylindre circonscrit est $= c \times 2r$ (113); donc la solidité du cylindre circonscrit est à la solidité de la sphere comme $2 c r : \frac{4}{3} c r :: 2 : \frac{4}{3} :: 6 : 4 :: 3 : 2$; donc, &c.

COROLLAIRE VII. Il suit du dernier Corollaire que la sphere est les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit.

COROLLAIRE VIII. Il suit du Corollaire précédent que la solidité de la sphere est double de celle d'un cône qui auroit pour base un grand cercle de la sphere, ou la base même du cylindre circonscrit, & pour hauteur le diametre même de la sphere, ou la hauteur du cylindre circonscrit. Car un tel cône est le tiers du cylindre circonscrit; donc ce cône fera $= 1$, si le cylindre circonscrit est $= 3$; donc la sphere qui est au cylindre circonscrit comme $2 : 3$ fera à ce cône comme $2 : 1$; donc, &c.

116. THÉOREME. La sphere est au cône équilatéral circonscrit comme $4 : 9$ (fig. 102). Car la base du cône équilatéral est égale à trois grands cercles de la sphere inscrite (démonstration du n°. 110). De plus cb rayon de la sphere est $= \frac{cg}{2} = \frac{cd}{2}$; donc le rayon de la sphere inscrite est le tiers de la hauteur du cône. Faisant $cb = r$, & la surface d'un grand cercle de la sphere inscrite $= c$, $3c$ sera la base du cône, $3r$ sa hauteur, $3c \times r$ sa solidité (115). Mais la solidité de la sphere (115) est $= \frac{4}{3} c r$; donc la solidité de la sphere est à celle du cône équilatéral circonscrit comme $\frac{4}{3} c r : 3 c r :: \frac{4}{3} : 3 :: 4 : 9$.

COROLLAIRE. Il suit de-là & du n°. 115 que si à une sphere on circonscrit un cylindre & un cône équilatéral, leurs solidités seront comme $\frac{2}{3} : 4 : 6 : 9$. C'est-à-dire, (111) dans le rapport de leurs surfaces.

117. PROBLEME. Trouver la solidité d'un cône droit tronqué pood (fig. 86). Supposant l'axe cs de ce cône prolongé

jusqu'à ce qu'il rencontre le côté da aussi prolongé & tirant xo
 parallèle à l'axe, les triangles semblables dox , dac , donneront $dx = dc - cx = dc - os : ox = sc :: dc : ac$. C'est-à-dire, la différence des rayons des deux bases est à l'axe du cône tronqué comme le rayon de la base inférieure est à l'axe du cône entier. Ce cône entier étant connu, on en ôtera la solidité du petit cône ooo , dont on connoît la base oo , & dont il est aisé de connoître la hauteur qui est égale à sa quand le cône est droit, comme nous le supposons ici, le reste donnera la solidité du cône tronqué, ce qui est évident.

118. Deux prismes (il en est de même de deux cylindres) A & a sont en raison composée de leurs bases B & b , & de leurs hauteurs H & h . Car le premier est $= Bh$, & le second est $= bh$; donc $A : a : BH : bh$. Si $B = b$, l'on aura $A : a :: H : h$. Si $H = h$, l'on aura $A : a :: B : b$. Si $B : b :: h : H$, alors $Bh = bh$, & $A = a$. Ainsi deux prismes ou deux cylindres sont égaux lorsque leurs bases sont en raison inverse de leurs hauteurs.

COROLLAIRE I. Les pyramides & les cônes sont en raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs, & tout ce que nous venons de dire du rapport des prismes & des cylindres doit s'appliquer aux pyramides & aux cônes qui sont les tiers de ces solides.

COROLLAIRE II. Donc si à un cylindre on circonscrit un cube (fig. 105), le cube sera au cylindre comme le carré du diamètre au cercle de la base du cylindre. Mais le cercle de la base est égal au produit de sa circonférence c par la moitié de son rayon r , ou par le quart de son diamètre $2r$; donc le carré du diamètre est à la surface du cercle comme $4r^2 : c \frac{2r}{4}$, ou comme $4r : \frac{c}{2} :: 8r : c$; donc le cube est au cylindre inscrit comme le quadruple du diamètre d'un cercle est à sa circonférence.

119. THÉOREME. Le cube est à la sphere inscrite comme

6 diamètres d'un cercle à la circonférence de ce cercle (fig. 106). Car soit la circonférence $= c$, le rayon $= r$; le diamètre sera $2r$, côté du cube dont la base $4r^2$ multipliée par la hauteur $2r$, donnera $8r^3$ solidité du cube. Celle de la sphere inscrite étant égale au produit de sa surface (qui est égale à quatre de ses grands cercles, c'est-à-dire $= 2rc$) par le tiers de son rayon, sera $2rc \times \frac{1}{3}r = \frac{2}{3}cr^2$; donc les solidités du cube & de la sphere inscrite sont entr'elles comme $8r^3 : \frac{2}{3}cr^2$, ou comme $4r : \frac{c}{3}$ (en divisant par $2rr$), ou comme $12r : c$; c'est-à-dire, comme 6 diamètres à la circonférence.

COROLLAIRE. Donc en se servant du rapport d'*Archimède*, le cube sera à la sphere inscrite comme $6 \times 7 : 22$, ou comme $42 : 22 :: 21 : 11$.

120. THÉOREME. Deux parallélipipedes semblables sont entr'eux comme les cubes des longueurs & largeurs des bases, & des hauteurs. Soit A la largeur de la base, B la longueur de cette même base, h la hauteur du premier parallélipipede, a la largeur, b la longueur de la base du second parallélipipede & h sa hauteur. La base du premier sera AB & sa solidité sera $= ABH$, de même la solidité du second sera abh (par le n°. 113); donc le premier est au second comme $ABH : abh$; or à cause de la similitude de ces solides, les trois dimensions du premier p sont proportionnelles aux trois dimensions du second q . Donc la raison de p à q est composée de trois raisons égales; donc elle est triplée, & égale à la raison des cubes des termes d'une des raisons composantes (voyez les raisons composées dans le calcul). C'est pourquoi $p : q : A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: H^3 : h^3$.

COROLLAIRE. Les prismes triangulaires semblables sont évidemment moitiés des prismes parallélipipedes semblables; puisque les bases de

ces prismes sont des triangles semblables moitiés des parallélogrammes semblables, bases des parallélipèdes semblables; donc les prismes triangulaires semblables (& il en est de même de tous les prismes semblables, puisqu'ils sont évidemment composés d'un égal nombre de prismes triangulaires semblables) sont en raison triplée de leurs côtés homologues, de leurs hauteurs, &c. Cela doit s'entendre aussi des cylindres semblables, qui ne sont autre chose que des prismes semblables, mais dont les bases sont des cercles.

COROLLAIRE II. Il suit du Corollaire précédent que les pyramides & les cônes semblables sont en raison triplée de leurs dimensions homologues; car les pyramides semblables sont le $\frac{1}{3}$ des prismes semblables, & les cônes semblables le $\frac{1}{3}$ des cylindres semblables; or les $\frac{1}{3}$ sont comme les tous; donc, &c.

COROLLAIRE III. Il suit du dernier Corollaire que les polyèdres réguliers semblables, *par exemple*, les tétraèdres semblables, sont en raison triplée de leurs rayons droits, ou en général de leurs dimensions homologues: car les polyèdres réguliers semblables sont composés d'un même nombre de pyramides semblables; donc, &c.

COROLLAIRE IV. Il suit du Corollaire second que les sphères sont comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diamètres. Car on peut considérer deux sphères comme composées d'un même nombre de pyramides semblables qui ont leur sommet au centre, leur base sur la surface, & dont la hauteur est égale au rayon de chaque sphère; donc ces sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diamètres; car les diamètres sont doubles des rayons.

REMARQUE. On peut démontrer ce Corollaire de cette autre manière. Soit r le rayon, c la circonférence d'un grand cercle de la première sphere A , d le rayon, f la circonférence de la seconde sphere a . La première $A = 2rc \times \frac{r}{3} = \frac{2r^2c}{3}$. La seconde sphere $a = \frac{2d^2f}{3}$; donc $A : a :: \frac{2r^2c}{3} : \frac{2d^2f}{3} :: r^2c : d^2f$ (en divisant par $\frac{2}{3}$); mais les grands cercles de ces spheres ont leurs circonférences proportionnelles à leurs rayons; donc $r : d :: c : f$; donc $\frac{r}{d} = \frac{c}{f}$; donc $\frac{r^2c}{d^2f} = \frac{r^2}{d^2} \times \frac{c}{f} = \frac{r^2}{d^2} \times \frac{r}{d} = \frac{r^3}{d^3}$. C'est-à-dire que la raison de $A : a$ est triplée de la raison des cubes des rayons, ou des diamètres. Puisque évidemment $A : a :: r^3 : d^3 :: 8r^3 : 8d^3$. Or $8r^3$ & $8d^3$ sont les cubes des diamètres $2r$ & $2d$; donc si $r = 1$ & $d = 2$, l'on aura $A : a :: 1 : 8$.

121. THÉOREME. *Un parallépipède, dont les dimensions a, b, h sont en proportion continue, peut être réduit en un cube de même solidité que lui.* Car puisque $a : b :: b : h$, l'on a $b^2 = ah$, & en multipliant les deux membres de cette équation par b , il vient $b^3 = abh$; or abh exprime la solidité du parallépipède, & b^3 la solidité d'un cube dont le côté $= b$; donc, &c.

122. PROBLÈME. *Faire un cube double d'un autre cube.* Soit a le côté du cube proposé, a^3 sera sa solidité, $2a^3$ le cube double cherché. Les côtés de ces cubes sont entr'eux comme $\sqrt[3]{a^3} : \sqrt[3]{2a^3} = a \sqrt[3]{2}$; or il n'est pas possible de trouver exactement la racine troisième de 2, par laquelle il faudroit multiplier le côté du cube donné pour avoir celui du cube cherché; donc le Problème est impossible arithmétique.

ment. Si l'on veut se contenter d'une approximation, on prendra la valeur de $\sqrt[3]{2}$ en décimales, on aura 1.2 en se tenant aux dixièmes; & multipliant le côté a par 1.2 on aura le côté d'un cube à-peu-près double du proposé. En poussant l'approximation de $\sqrt[3]{2}$ plus loin, on auroit un cube qui approcheroit plus du cube demandé. On ne peut pas non plus trouver par l'arithmétique un cube triple, quadruple, quintuple, &c. d'un cube proposé, parce que 3, 4, 5, &c. ne sont pas des cubes; mais on peut trouver un cube d'une multiplicité exprimée par un nombre cube; ainsi on peut trouver un cube octuple d'un autre cube a^3 . Car l'on aura le cube demandé $= 8a^3$; or le côté d'un tel cube est $= 2a$; donc, &c. *

123. PROBLEME. *Mesurer la solidité d'une muraille dont l'épaisseur est de 3 pieds, la longueur de 12 & la hauteur de 10.* Je multiplie la longueur 12 par l'épaisseur 3, le produit 36 pieds quarrés donne la base de la muraille. Cette base étant multipliée par la hauteur 10, le produit est 360 pieds cubes, solidité de la muraille.

124. PROBLEME. *Mesurer un obélisque (c'est une pyramide de pierre ou de marbre) dont la base est de 12 toises quarrées, & la hauteur de 30 toises.* Je multiplie la base par le tiers de la hauteur, le produit 120 me fait voir que la solidité cherchée est de 120 toises cubes.

REMARQUE. On mesure les solidités en pieds cubes, pouces cubes, toises cubes, &c. La toise cube vaut 216 pieds cubes, parce que la toise vaut 6 pieds, & que le cube de 6 est 216. Le pied cube vaut 1728 pouces cubes, parce que le

* On peut faire un cube double d'un autre en se servant des lignes courbes pour trouver le côté de ce cube, ainsi qu'on le verra dans la suite de cet Ouvrage.

pied vaut 12 poudres & que le cube de 12 est 1728. Le poudre cube vaut 1728 lignes cubes, & la ligne cube vaut 1728 points cubes; parce que le poudre vaut 12 lignes, & la ligne 12 points.

125. PROBLEME. *Trouver la solidité d'une sphere dont le diametre est supposé de 14 pieds. Je cherche par le rapport d'Archimède la circonférence d'un grand cercle de cette sphere, en disant $7:22::14::x$ (circonférence cherchée) $= 44$. Multipliant cette circonférence par le diametre 14, le produit 616 me fait voir que la surface de cette sphere est de 616 pieds quarrés. Multipliant cette surface par le tiers du rayon ou par $\frac{7}{3}$, le produit est $1437 \frac{1}{3}$ pieds cubes, solidité demandée. On trouveroit un produit plus exact en se servant du rapport de Métius.*

126. PROBLEME. *Trouver la solidité d'un corps fort irrégulier, tel que le caillou p (fig. 107). Ayant mis ce corps p dans un vase cylindrique ou prismatique $abgf$, versez dans ce vase de l'eau ou du sable bien fin, ayant soin de rendre sa surface parallele à celle du vase, jusqu'à ce que le corps p en soit entièrement couvert. Marquez en cd la hauteur du sable ou de l'eau, ôtez ensuite le corps p du vase, le sable restant remplira l'espace $mfgn$. Donc l'espace $mcdn$ sera l'espace qu'occupoit le corps p; or il est aisé de mesurer cet espace en multipliant sa hauteur cm par la base du vase; donc il est aisé de mesurer la solidité du corps p*.*

De la Trigonométrie.

127. *La Trigonométrie est l'art de résoudre ce Problème : Trois de ces cinq choses, deux angles*

* Il peut y avoir une petite erreur à cause du sable qui peut s'attacher au caillou, ou de l'eau qui peut s'attacher à sa surface ou s'introduire dans les pores du caillou; mais c'est trop peu de chose pour y avoir égard.

& trois côtés d'un triangle étant données, trouver les deux autres.

Soit un angle quelconque acb (fig. 108) décrivez du sommet c avec un rayon à volonté un cercle $ahpg$, prolongez ac jusqu'en p , & élevez en c la ligne ch perpendiculaire sur ac . Il est évident que l'arc hb est complément de l'arc ba^* ; de même l'angle hcb mesuré par cet arc est complément de l'angle bca mesuré par l'arc ba . L'angle $bc p$ est supplément de l'angle bca & réciproquement; il en est de même des arcs qui mesurent ces angles.

Le *sinus* d'un arc ba est une ligne bd abaissée d'une des extrémités b de cet arc perpendiculairement sur le rayon ca qui passe par l'autre extrémité du même arc; bd est aussi le *sinus* de l'angle bca mesuré par cet arc. La perpendiculaire an élevée à l'extrémité a d'un des rayons ca jusqu'à la rencontre du rayon cb prolongé s'appelle la *tangente* de ce même arc ba ou de l'angle bca mesuré par cet arc. La droite cn comprise entre le centre c ou le sommet de l'angle & la rencontre de la tangente se nomme la *secante* de l'arc ba ou de l'angle bca . On appelle *sinus-verse* d'un arc ab , la partie da du rayon comprise entre le sinus bd (qu'on appelle aussi *sinus droit*) & l'arc ab . La perpendiculaire bi , sinus de l'arc bh , laquelle est $= cd$, se nomme le *sinus du complément* ou le *co-sinus* de l'arc ba ou de l'angle bca ; ih sinus verse de hb complément

* Le complément d'un angle aigu est la différence de cet angle avec un angle droit, de même le complément d'un arc $< 90^\circ$ est la différence de cet arc avec 90° . Le supplément d'un angle ou d'un arc est ce qui manque à cet angle ou à cet arc pour valoir 180° .

de ba , s'appelle le *co-sinus verse* de ba . Il est évident que hm est la tangente de l'arc hb , ou de l'angle hcb , complément de bca : on l'appelle la *co-tangente* de l'angle bca ou de l'arc ba qui en est la mesure. La *secante* cm de hb est appelée la *co-secante* de ba ou de l'angle bca . Nous ferons le sinus $\equiv \sin.$, le rayon $\equiv r$, le co-sinus $\equiv \text{co-sin.}$, la tangente $\equiv \text{tang.}$, la co-tangente $\equiv \text{co-tang.}$, la secante $\equiv \text{sec.}$, la co-secante $\equiv \text{co-sec.}$, le sinus verse $\equiv \text{sin. v.}$, le co-sinus verse $\equiv \text{co-sin. v.}$; de sorte que pour dire le sinus d'un arc a , nous dirons $\sin. a$, &c.

128. Il suit de ce que nous venons de dire, que le sinus, le co-sinus, la tangente & la co-tangente d'un angle obtus bcp sont égaux respectivement au sinus, co-sinus, tangente & co-tangente de l'angle aigu bca , qui est son supplément ; car bd étant une perpendiculaire abaissée de l'extrémité b de l'arc bhp sur le rayon pc (prolongé) qui passe par l'autre extrémité p du même arc, est évidemment le sinus de l'arc bhp aussi-bien que de l'arc ba . De même la tangente de l'arc bhp est évidemment po (127) ; mais $po \equiv an$: car les triangles rectangles nac , $pc o$ sont semblables, à cause des angles droits nac , $cp o$, & de $pc o \equiv bca$. D'ailleurs ils ont les côtés cp & ca égaux, & les angles sur ces mêmes côtés égaux ; donc ils sont égaux, & po est $\equiv na$. Et parce que hb est complément de bhp , aussi-bien que de ba , dc est le co-sinus de bhp , aussi-bien que de ba ; de même la co-tangente de phb , comme celle de ba , est $\equiv hm$ *.

* po étant dirigée dans un sens opposé à an est négative. Mais nous ne faisons ici attention qu'à la grandeur & non au signe des lignes po , hm , &c.

129. Si l'on prolonge bd jusqu'à la rencontre de la circonférence en g , à cause de bg perpendiculaire sur ca , bd sera $= gd$ (20), & par conséquent $ba = ag$; donc le sinus d'un arc ba est la moitié d'une corde bg qui soutend un arc double de ba . Or le diamètre est la plus grande des cordes; donc le plus grand des sinus est égal au rayon hc , sinus de l'arc ha , moitié de la demi-circonférence hax . Ce sinus est appelé *sinus total*, parce qu'il est le plus grand des sinus; de sorte que les sinus croissent à mesure que les arcs ab augmentent depuis 0 jusqu'à 90° , après quoi ils vont en diminuant jusqu'à 180° , où le sinus est 0.

130. Il suit de ce que nous venons de dire, que le sinus de 30° est égal à la moitié du rayon. Car si l'arc bag est supposé de 60° , la corde bg sera égale au rayon, & le sinus bd de l'arc ba de 30° sera $= \frac{bg}{2} = \frac{r}{2}$.

Plus l'arc ba sera grand, plus la tangente an & la sécante cn croîtront, cela est évident: car lorsque le point b s'éloigne de a , il est visible que le point n doit aussi s'éloigner de a , c'est-à-dire que an doit augmenter; mais an ne peut croître à moins que cn ne croisse. De plus an & cn deviendront infinies lorsque le point b tombera sur h : car nc tombera alors sur hc , & par conséquent sera parallèle à la ligne an ; donc ces droites ne pourront se rencontrer quelques prolongées qu'elles soient, c'est pourquoi on les regarde alors comme infinies.

A cause des parallèles bd & hc on aura $bi = cd$, c'est-à-dire que le co-sinus d'un arc ba est égal à la partie du rayon comprise entre le centre & le

sinus du même arc; & parce que $da = ca - cd$, il est visible que le sinus verse da d'un arc $ab < 90^\circ$ est égal à la différence du rayon & du co-sinus du même arc. Mais dp , sinus verse du supplément bhp , est égal à $pd = pc + cd$; c'est-à-dire, que le sinus verse d'un arc plus grand que 90° est égal à la somme du rayon & du co-sinus de son supplément ab . Connoissant donc le co-sinus, on aura facilement le sinus verse.

131. THÉOREME. *La tangente de 45° est égale au rayon.* Soit supposé l'arc ab de 45° , à cause de l'angle droit can , l'angle cna complément de l'angle nca fera de 45° , parce que l'angle nca est supposé de 45° ; donc le triangle nac sera isocelle, & $na = ca = r$; donc, &c.

132. THÉOREME. *L'on a toujours les proportions suivantes.* 1°. *Le rayon est au co-sinus d'un arc ou d'un angle, comme la tangente de cet arc ou de cet angle est à son sinus, ou* $r : \text{co-sin.} :: \text{tang.} : \text{sin.}$ Car les triangles cdb , can sont semblables à cause des parallèles bd & an ; donc $ca : cd :: an : bd$, ou $r : \text{co-sin.} :: \text{tang.} : \text{sin.}$ 2°. $r : \text{sin.} :: \text{co-tang.} : \text{co-sin.}$; car les triangles semblables hcm , icb donnent $r(hc) : ic = db = \text{sin.} :: hm$ (co-tang. de ab) : ib (co-sin. de ba), ou $r : \text{sin.} :: \text{co-tang.} : \text{co-sin.}$ 3°. $\text{Tang.} : r :: r : \text{co-tang.}$; car les triangles hcm , nca ont un angle droit, le premier en h , le second en a ; de plus l'angle m de l'un est égal à l'angle bcd de l'autre, ces deux angles étant alternes-internes à cause des parallèles ca , hm ; ainsi ces deux triangles sont semblables; & partant $na : ca :: hc : hm$, ou $\text{tang.} : r :: r : \text{co-tang.} = \frac{rr}{\text{tang.}}$.

133. COROLLAIRE I. Donc on a 1°. $\sin. = \frac{\text{tang.} \times \text{co-sin.}}{r}$; 2°. $\text{co-sin.} = \frac{\text{co-tang.} \times \sin.}{r}$; 3°. $\text{tang.} = \frac{r^2}{\text{co-tang.}}$, * 4°. En supposant $r = 1$, la première équation donne $\sin. = \text{tang.} \times \text{co-sin.}$, ou $\text{tang.} = \frac{\sin.}{\text{co-sin.}}$, 5°. De la seconde équation on tire aisément $\text{co-tang.} = \frac{\text{co-sin.}}{\sin.} = \frac{1}{\text{tang.}}$, parce que la troisième formule donne $\text{co-tang.} = \frac{r^2}{\text{tang.}} = \frac{1}{\text{tang.}}$. 6°. De $\text{co-tang.} = \frac{1}{\text{tang.}}$, l'on tire $\text{co-tang.} a \times \text{tang.} a = 1 = \text{co-tang.} b \times \text{tang.} b$ (a & b désignent des arcs ou des angles). Si dans la quatrième formule on substitue la valeur $\frac{1}{\text{co-tang.}}$ de tang. ,

* Lorsque l'arc dont on veut avoir la tangente devient un quart de cercle, sa co-tangente $= 0$, & alors $\text{tang.} = \frac{r}{0} = \infty$, en considérant 0 comme une quantité infiniment petite; d'ailleurs dans ce cas la tangente est infinie, comme on l'a dit ci-dessus n°. 130, parce qu'avant que la sécante & la tangente soient devenues parallèles, ces lignes se sont rencontrées sous un angle infiniment petit; donc alors elles étoient infinies, & comme on suppose que ces lignes n'ont pas diminué en devenant parallèles, on les regarde encore comme infinies; & elles ne doivent pas être regardées comme infinies précisément, parce qu'elles sont parallèles: car deux lignes parallèles sont deux lignes indéterminées qui ne peuvent véritablement jamais se rencontrer, mais qui ne sont pas plutôt infinies que finies.

l'on aura , en multipliant par *co-fin.* , la formule $\sin. = \frac{\text{co-fin.}}{\text{co-tang.}}$. Substituant dans la seconde formule $\frac{1}{\text{tang.}}$ à la place de *co-tang.* (en supposant toujours $r = 1$) on a $\text{co-fin.} = \frac{\sin.}{\text{tang.}}$.

134. COROLLAIRE II. Il suit de la troisième formule du Corollaire précédent , c'est-à-dire , de l'équation $\text{tang.} = \frac{r^2}{\text{co-tang.}}$, que si l'on a deux arcs *a* & *b* , l'on aura $\text{tang. } a : \text{tang. } b :: \frac{r^2}{\text{co-tang. } a} :$

$\frac{r^2}{\text{co-tang. } b}$, ou (parce que les fractions qui ont même numérateur , sont en raison inverse des dénominateurs) $\text{tang. } a : \text{tang. } b :: \text{co-tang. } b : \text{co-tang. } a$, c'est-à-dire que les tangentes sont en raison inverse des co-tangentes. La même chose peut se démontrer encore de cette manière : par le Théorème précédent , $\text{tang.} : r :: r : \text{co-tang.}$; donc $\text{tang. } a \times \text{co-tang. } a = r^2$, & $\text{tang. } b \times \text{co-tang. } b = r^2$; donc $\text{tang. } a \times \text{co-tang. } a = \text{tang. } b \times \text{co-tang. } b$; donc $\text{tang. } a : \text{tang. } b :: \text{co-tang. } b : \text{co-tang. } a$.

135. PROBLEME. *Étant donné le sinus a f d'un arc a m, trouver le sinus d'un arc double a m b (fig. 109). Menons b d perpendiculaire sur c a , & du point c la perpendiculaire c m sur le milieu f de la corde b a. Puisque a f est connue, son double a b le sera aussi or les triangles c f a , b d a , ayant un angle commun en a , & de plus chacun un angle droit , sont semblables ; donc c a : c f :: b a : b d , ou r : co-fin. de l'arc donné :: 2 sin. du même arc : sin. de l'arc double.*

REMARQUE I. Nous avons supposé le co-sinus cf donné, parce que le sinus af étant connu il est visible par la propriété du triangle rectangle cfa , que $cf = \sqrt{[(ca)^2 - (fa)^2]}$, ou $\text{co-sin.} = \sqrt{[r^2 - (\text{sin.})^2]}$, & réciproquement on voit que $\text{sin.} = \sqrt{[r^2 - (\text{co-sin.})^2]}$; c'est-à-dire que pour avoir le co-sinus, lorsqu'on connoît le sinus, il faut du carré du rayon soustraire le carré du sinus & prendre la racine du reste, & pour avoir le sinus quand on connoît le co-sinus, il faut retrancher le carré du co-sinus du carré du rayon & prendre la racine du reste.

REMARQUE II. Si l'on vouloit avoir le sinus de l'arc simple am , étant donné le sinus & le co-sinus de l'arc double ab , on remarqueroit que $(ba)^2 = (bd)^2 + (da)^2$, par la propriété du triangle rectangle, ou $(ba)^2 = \text{sin.}^2 a + (\text{sin. } v.)^2 a$, en supposant l'arc double $= a$; donc $ba = \sqrt{[(\text{sin.})^2 a + (\text{sin. } v.)^2 a]}$, & $af = \frac{ba}{2} = \text{sinus de l'arc simple} = \frac{1}{2} \sqrt{[\text{sin.}^2 a + (\text{sin. } v.)^2 a]}$; or connoissant le sinus, on connoitra facilement le co-sinus aussi-bien que le sinus verse da qui est ici $= ca - cd$. Voyez le n° 130.

136. PROBLEME. Connoissant les sinus de deux arcs dl , al trouver les sinus de leur somme ou de leur différence (fig. 111.). Soit l'arc $dl = b$, l'arc $al = a$. Il est évident que dq est le sinus de l'arc abd , somme de ces deux arcs; & si l'on prend $lb = dl$, $b \times \text{sinus de } al - b \times \text{sinus de } dl$, ou de $al - dl$ sera le sinus de la différence. Puisqu'on connoît le sinus de a & de b , on connoît aussi leur co-sinus (135). Des points d , l , b ayant abaissé des perpendiculaires sur ca , du point b la perpendiculaire bp

sur $d q$, du point o milieu de la corde $d b$ les perpendiculaires $o g$, $o m$, & tiré la ligne $c o$ qui, passant par le centre & le milieu de la corde $d b$, est nécessairement perpendiculaire à cette corde (20); à cause des parallèles $p b$, $g o$ les lignes $d p$, $d b$ seront divisées proportionnellement en g & en o ; or $d b$ est divisée en deux également en o : donc $d p$ est aussi divisée en deux également en g , & $d g = g p$. Mais les triangles semblables $c l n$, $c o m$ donnent $c l : c o :: l n : o m$, ou $r : \text{co-sin. } b$

$$:: \text{sin. } a : o m = \frac{\text{sin. } a \times \text{co-sin. } b}{r}. \text{ Les triangles}$$

$c l n$, $d g o$ ayant (par construction) tous leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre sont semblables (49); donc $c l : c n :: d o : g d$, ou $r : \text{co-sin. } a$

$$:: \text{sin. } b : g d = \frac{\text{sin. } b \times \text{co-sin. } a}{r}. \text{ Mais } d q = o m$$

$$+ d g = q g + g d, \text{ \& } b x = g q - p g = q g - d g; \text{ donc } d q \text{ ou } \text{sin. } (a + b) = \frac{\text{sin. } a \times \text{co-sin. } b + \text{sin. } b \times \text{co-sin. } a}{r}, \text{ \& } b x \text{ ou } \text{sin. } (a - b)$$

$$= \frac{\text{sin. } a \times \text{co-sin. } b - \text{sin. } b \times \text{co-sin. } a}{r}. \text{ C'est-à-dire, le}$$

sinus de la somme de deux arcs a & b (nous supposons a plus grand que b) est égal au produit du sinus de a par le co-sinus de b , plus le produit du sinus de b par le co-sinus de a , le tout divisé par le rayon; & le sinus de la différence de ces mêmes arcs est égal au produit du sinus de a par le co-sinus de b , moins le produit du sinus de b par le co-sinus de a , le tout divisé par le rayon.

137. PROBLEME. Connoissant les co-sinus de deux arcs a & b , trouver le co-sinus $c q$ de leur somme, & le co-sinus $c x$ de leur différence. A cause des paral-

les $d q$, $o m$, $b x$, il est visible que les lignes $d b$, $q x$ sont divisées proportionnellement en o & en m , mais la ligne $d b$ est divisée en deux également en o ; donc $q x$ est aussi divisée en deux également en m . Cela posé, les triangles semblables $c l n$, $c o m$ donnent $c l : c o :: c n : c m$, ou $r : \text{co-sin. } b$

$$:: \text{co-sin. } a : c m = \frac{\text{co-sin. } a \times \text{co-sin. } b}{r}.$$

Les triangles semblables $c l n$, $d g l$ donnent $c l : l n :: d o : g o = q m = m x$, ou $r : \text{sin. } a :: \text{sin. } b : q m$.

$$= \frac{\text{sin. } a \times \text{sin. } b}{r}; \text{ donc } c q = c m - q m =$$

$$\frac{\text{co-sin. } a \times \text{co-sin. } b - \text{sin. } a \times \text{sin. } b}{r}, \text{ \& } c x = c m +$$

$$m x = \frac{\text{co-sin. } a \times \text{co-sin. } b + \text{sin. } a \times \text{sin. } b}{r}.$$

C'est-à-dire le co-sinus de la somme de deux arcs est égal au produit des co-sinus de ces arcs moins le produit de leurs sinus, & le co-sinus de la différence des deux arcs est égal au produit des co-sinus de ces arcs, plus le produit de leurs sinus, le tout divisé par le rayon.

138. THEOREME. *La somme des sinus de deux arcs $a d = a$, $a b = b$ (fig. 112) est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la moitié de la somme de ces arcs est à la tangente de la moitié de leur différence : ou $\text{sin. } a + \text{sin. } b : \text{sin. } a - \text{sin. } b :: \text{tang. } \frac{(a+b)}{2} : \text{tang. } \frac{(a-b)}{2}$, nous sup-*

posons $a > b$. Ayant tiré le diamètre $a g$, prenez $a q = a d$, menez la corde $d q$ qui sera nécessairement perpendiculaire sur $a g$. Par le point b tirez $b m$ parallèle à $g a$, & par conséquent perpendiculaire sur $d q$; du point m menez les cordes $m d$, $m q$, & d'un rayon $m c$ égal à ce-

lui du cercle $admgq$, décrivez l'arc xc qui rencontre bm en c , & par le point c tirez la ligne ncp perpendiculaire à bm ; les lignes nc , cp seront les tangentes des angles dmb , bmq (qui ayant leur sommet à la circonférence du cercle, ont pour mesure la moitié des arcs db & bq compris entre leurs côtés). Or $db = ad - ab = a - b$, & $bq = ba + aq = ad + ba = a + b$; donc ces angles (que je désignerai par les valeurs des arcs qui les mesurent) sont, le premier $= \frac{a-b}{2}$, & le second $= \frac{a+b}{2}$; donc $nc =$

$\text{tang. } \frac{(a-b)}{2}$, & $cp = \text{tang. } \frac{(a+b)}{2}$. De plus

$oq = oi + iq = bh + di$ est la somme des sinus des arcs a & b , & $do = di - oi$ est leur différence. Mais à cause des parallèles dq , np les triangles moq , mcp sont semblables, aussi bien que les triangles mdo , mnc , & les premiers donnent $oq : cp :: mo : mc$, tandis que les derniers donnent $do : nc :: mo : mc$; donc $oq : cp :: do : nc$, ou, *alternando*, $oq : do :: cp : nc$, ou $\sin. a + \sin. b : \sin. a - \sin. b :: \text{tang. } \frac{(a+b)}{2} : \text{tang. } \frac{(a-b)}{2}$.

COROLLAIRE. Donc on a aussi $\text{co-sin. } a + \text{co-sin. } b : \text{co-sin. } a - \text{co-sin. } b :: \text{co-tang. } \left(\frac{a+b}{2}\right) : \text{tang. } \left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Car les co-sinus sont les sinus des complémens; donc par le Théorème la somme des sinus des complémens est à leur différence comme la tangente de la moitié de la somme des complémens à la tangente de la moitié de la différence de ces complémens

Mais la moitié de la somme des complémens des deux arcs , est le complément de la moitié de la somme de ces arcs , & la demi-différence des complémens est égale à la demi-différence de ces arcs. Donc, &c.

Il est facile maintenant de trouver tous les sinus. Le sinus de 30° étant donné (130), on trouvera facilement celui de 15° (135), ensuite celui de $7^\circ \frac{1}{2}$, puis celui de $3^\circ \frac{1}{4}$, & ainsi de suite en allant par les moitiés jusqu'à la douzième opération qui donne le sinus de $52'' 44''' 3'''' \frac{1}{4}$. Et parce que les sinus des arcs fort petits se confondent avec ces arcs & leur sont proportionnels, on fera comme cet arc est à son sinus, ainsi l'arc d'une minute est à son sinus. Ayant le sinus d'une minute on trouvera facilement celui de $2'$ (135). Supposant ensuite l'arc de $1' = b$, celui de $2' = a$, on trouvera (136) celui de $3'$. Faisant ensuite celui-ci $= a$ & celui de $1' = b$, on aura de même celui de $4'$, & ainsi de suite jusqu'à 30° . Ayant le sinus de 30° pour avoir celui d'un arc plus grand, *par exemple*, celui de 35° , on fera $a = 30^\circ$, & $b = 5^\circ$. Pour avoir celui de $30^\circ 1'$, on fera $a = 30^\circ$ & $b = 1'$, & ainsi de suite jusqu'à 60° . Ayant le sinus de 60° pour avoir le sinus d'un arc plus grand, *par exemple* celui de 62° , on fera $a = 60^\circ$, $b = 2^\circ$, & ainsi de suite jusqu'à 90° . A l'égard des arcs plus grands que 90° , comme leurs sinus sont les mêmes que ceux de leurs supplémens, on n'aura aucune peine à les trouver : ainsi les sinus de 100° sera le même que celui de 80° . A l'égard des co-sinus il est aisé de les avoir dès que l'on connoît les sinus : puisque le co-sinus est égal à la racine quarrée de la différence du quarré du rayon au quarré du sinus

(135). A l'égard des tangentes, les triangles rectangles semblables $c d b$, $c a n$ (*fig. 108*) donnent $c d : d b :: c a : a n$, ou $\text{co-sin.} : \text{sin.} :: r : \text{tang.}$. Donc connoissant le sinus & le co-sinus d'un arc, on trouvera aisément la tangente de cet arc. On aura aussi facilement la co-tangente par la proportion $\text{tang. } r :: r : \text{co-tang.}$. Supposant le rayon de 1000000000 parties égales, le sinus de 30° sera de 500000000 de ces mêmes parties, on trouvera en suite, par ce que nous venons de dire, les nombres qui désignent les sinus, les co-sinus & les tangentes des arcs plus grands ou plus petits que 30° . A l'égard des logarithmes de ces mêmes sinus qu'on trouve dans les tables, ayant trouvé les nombres qui désignent les sinus, on a cherché leurs logarithmes qu'on a mis à la place de ces sinus dans les tables dont on se sert maintenant, de sorte qu'à présent on ne fait guere usage que des logarithmes tant des sinus que des co-sinus, tangentes & co-tangentes.

Si l'on veut avoir la sécante par le moyen du co-sinus & du rayon, on remarquera que les triangles semblables $b c d$, $n c a$ donnent (en faisant l'angle $b c a = a$) $\text{co-sin. } a : b c = r :: c a =$

$$r : c n = \text{séc. } a = \frac{r r}{\text{co-sin. } a}. \text{ On voit aussi que } c n =$$

$$\text{séc. } a = \sqrt{[r r + (\text{tang.})^2 a]} \text{ \& } c m = \text{co-séc. } a = \sqrt{[r r + (\text{co-tang.})^2 a]}.$$

REMARQUE I. Le sinus d'un arc $a h$ de 90° est égal au rayon; mais son co-sinus est $= 0$: car le co-sinus $c d$ ou $b i$ devient 0 lorsque l'arc $b h$ devient 0, c'est-à-dire, lorsque l'arc $a b$ devient $a h$.

REMARQUE II. Pour avoir la corde d'un arc donné, cherchez le sinus de la moitié de cet arc; le double fera la corde cherchée. *Par exemple*, pour avoir la corde d'un arc de 40° , cherchez dans les tables le sinus de l'arc de 20° , le double de ce sinus fera la corde cherchée; mais cette corde appartiendra à un cercle, dont le rayon fera celui des tables. Pour avoir la corde de 40° dans un cercle donné, faites cette règle de trois. Le rayon des tables est au rayon du cercle donné comme la corde trouvée est à la corde demandée. Cette règle est fondée sur ce que dans deux cercles, les cordes de deux arcs semblables sont entr'elles comme les rayons de ces cercles.

139. THÉOREME. *Etant donné un angle, que j'appellerai a , l'on a la proportion, le sinus de l'angle a est à la somme du rayon & du co-sinus du même angle, comme la tangente de la moitié de l'angle a est au rayon.* Soit l'angle ACP (fig. 110) $= a$, l'angle inscrit ABP sera la moitié de a , & menant par le centre C de l'arc AP , la ligne CN parallèle à BP , l'angle $NCA = PBA$ sera $= \frac{a}{2}$, & AN sera $=$

$\text{tang. } \frac{a}{2}$. Mais les triangles rectangles semblables BPD , NCA donnent $PD : DB :: NA : CA$, ou $\sin. a : r + \text{co-sin. } a :: \text{tang. } \frac{a}{2} : r$. Donc $r + \text{co-sin. } a = \frac{r \sin. a}{\text{tang. } \frac{a}{2}}$.

REMARQUE. Parce que l'angle APD est mesuré par la moitié de l'arc AF , & que AF est $= AP$ dont la moitié mesure l'angle NCA , il est visible que les triangles rectangles NAC , PDA sont semblables. Donc $PD : AD :: CA : AN$, c'est-à-dire, $\sin. a : r - \text{co-sin. } a :: r : \text{tang. } \frac{a}{2}$. Ainsi $r - \text{co-sin. } a$

$$= \frac{\sin. a}{r} \cdot \text{tang. } \frac{a}{2}; \text{ \& } \frac{r - \text{co-sin. } a}{r + \text{co-sin. } a} = \frac{(\text{tang. } \frac{a}{2})^2}{r}. \text{ Donc}$$

$$rr \cdot \left(\frac{r - \cos a}{r + \cos a} \right) = (\tan \frac{a}{2})^2 : \text{mais } (\cot \frac{a}{2})^2 = \frac{r^4}{(\tan \frac{a}{2})^2}; \text{ donc } (\cot \frac{a}{2})^2 : \frac{a}{2} = rr \cdot \left(\frac{r + \cos a}{r - \cos a} \right).$$

Nous venons de voir que l'on a la proportion $\sin a : r + \cos a :: \tan \frac{a}{2} : r$; mais $\tan \frac{a}{2} : r :: r : \cot \frac{a}{2}$; ainsi $\sin a : r + \cos a :: r : \cot \frac{a}{2}$. Maintenant si

l'on fait le quart du cercle $= n$, l'on aura $\cot \frac{a}{2} =$

$$\tan \left(n - \frac{a}{2} \right) = \tan \left(\frac{n}{2} + \frac{n - a}{2} \right) = \tan \left(\frac{n + p}{2} \right),$$

en faisant $n - a = p$. Mais alors $\sin a = \sin p$, & $\sin p = \cos a$; donc la proportion $\sin a : r + \cos a ::$

$r : \cot \frac{a}{2}$ deviendra $\cos p : r + \sin p :: r :$

$\tan \left(\frac{n + p}{2} \right)$. De plus l'on a encore $\sin a : r - \cos a$

$:: r : \tan \frac{a}{2} :: \cot \frac{a}{2} : r$; donc à cause de $\cot \frac{a}{2}$

$$= \tan \left(n - \frac{a}{2} \right) = \tan \left(\frac{n}{2} + \frac{n - a}{2} \right) =$$

$\tan \left(\frac{n + p}{2} \right)$, de $\sin a = \cos p$ & de $\sin p = \cos a$,

l'on aura $\cos p : r - \sin p :: \tan \left(\frac{n + p}{2} \right) : r$. Donc

$$r + \sin p = \frac{\cos p \cdot \tan \left(\frac{n + p}{2} \right)}{r}, \quad r - \sin p =$$

$$\frac{\cos p \cdot r}{\tan \left(\frac{n + p}{2} \right)}, \quad \frac{r + \sin p}{r - \sin p} = \frac{(\tan \frac{a}{2})^2 \left(\frac{n + p}{2} \right)}{r \cdot r}; \text{ \&}$$

$$\text{enfin } \frac{rr \cdot (r + \sin p)}{r - \sin p} = (\tan \frac{a}{2})^2 \left(\frac{n + p}{2} \right).$$

De la résolution des Triangles.

140. Avant de passer à la résolution des triangles , nous allons donner une idée du *Graphometre* , qui est un instrument d'un grand usage (fig. 113). C'est un demi-cercle abd , armé de pinnules ou de deux lunettes * ; l'une de ces lunettes représentée par ad est fixe & dans le sens du diamètre du demi-cercle , l'autre qu'on peut concevoir représentée par fg (qu'on nomme *alidade*) est mobile autour du centre c du demi-cercle. La circonférence de l'instrument est graduée. On se sert du Graphometre pour mesurer les angles. *Par exemple* , pour connoître l'angle hco , ayant fixé l'instrument en enfonçant son pied dans la terre ou d'une autre manière , dirigez le diamètre ad vers le point o , ayant soin de disposer le plan de l'instrument de manière qu'il se confonde avec le plan de l'angle hco , tournez ensuite l'alidade fg jusqu'à ce que vous apperceviez l'objet h au travers des pinnules f & g . Supposons que l'alidade réponde alors à la division marquée 30 , l'angle hco sera mesuré par l'arc de 30° , c'est-à-dire que cet angle sera de 30° . Venons maintenant à la résolution des triangles rectangles ** ; pour cela nous avons besoin des Théorèmes suivans.

141. THÉOREME. *Le rayon des tables est au*

* On se sert le plus souvent de pinnules au lieu de lunettes. Les pinnules sont des plaques de métal fendues verticalement pour donner passage au rayon visuel. La lig. 113 représente un graphometre à pinnules & non à lunettes.

** Résoudre un triangle , c'est trouver les côtés & les angles de ce triangle : c'est du moins dans ce sens que nous prenons cette expression.

sinus

sinus d'un des angles aigus , comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle (fig. 114). Soit le triangle rectangle $c a p$, & supposons que $c d$ représente le rayon des tables ; du point c , comme centre , ayant décrit les arcs $d g$ & $a b$, la perpendiculaire $d f$ sera le sinus des tables de l'angle $d c f$ ou $a c p$. Or à cause des parallèles $a p$, $d f$, les triangles $a c p$, $d c f$ sont semblables & donnent $c d : d f :: c a : a p$, ou $r : \sin. a c p :: c a$ (*hypothénuse du triangle $a c p$*) : $a p$, côté opposé à l'angle c . On prouvera de même que $r : \sin. c a p :: c a : c p$; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc dans tout triangle rectangle $a c p$ l'on a cette proportion , le rayon est au co-sinus d'un angle aigu , comme l'hypothénuse est au côté adjacent à cet angle. Car l'angle $c a p$ étant complément de l'angle $a c p$, son sinus est le co-sinus de $a c p$; or nous venons de voir que $r : \sin. c a p :: c a : c p$; donc $r : \text{co-sin. } a c p :: c a : c p$; donc, &c.

142. THÉOREME. *Le rayon des tables est à la tangente d'un des angles aigus , comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle est au côté opposé à ce même angle (fig. 115).* Si l'on suppose que la partie $c f$ du côté $c b$ du triangle rectangle $a c b$ représente le rayon des tables , ayant élevé la perpendiculaire $d f$ jusqu'à la rencontre de l'hypothénuse , $f d$ sera la tangente des tables par rapport à l'angle c : mais les triangles semblables $c d f$, $c b a$ donnent $c f : d f :: c b : a b$, ou $r : \text{tang. } c :: c b : a b$; donc, &c.

On prouvera de la même manière que $r : \text{tang. } a :: a b : c b$, ou que $a b : c b :: r : \text{tang. } a$.

La résolution des triangles rectangles se réduit à 4 cas. En effet, parce que l'angle droit est une chose connue, & que les deux autres angles sont complémens l'un de l'autre, il suffit dans un triangle rectangle de connoître deux choses différentes de l'angle droit pourvu que parmi ces deux choses il y ait au moins un côté, pour pouvoir résoudre le triangle comme nous allons le voir. Maintenant ou les deux choses connues sont un des angles aigus & un côté de l'angle droit, ou un angle aigu & l'hypothénuse, ou un côté de l'angle droit avec l'hypothénuse, ou enfin les deux côtés de l'angle droit; & ces quatre cas trouveront toujours leur solution dans une des analogies des Théorèmes ci-dessus.

143. PROBLÈME I. *Trouver la hauteur d'une tour ph en supposant son pied p accessible (fig. 116.)* On s'éloignera de cet édifice à une distance co , telle que l'angle hco , compris entre les lignes qu'on imaginera menées du point c au sommet & au pied de la tour, ne soit ni trop aigu ni fort approchant de 90° *, on fixera le centre du Graphometre en c , on mesurera la distance co par le moyen d'une toise, d'une corde, &c. disposant l'instrument de maniere que le diametre ad dirigé vers le point o soit horizontal; ce qui se fait à l'aide d'un poids suspendu par un fil attaché au centre : ce fil doit alors raser le bord de l'instrument & répondre à 90° . Ayant observé le nombre

* Quand l'angle c est fort aigu ou approchant de 90° , une petite erreur dans l'angle en cause une grande sur la distance : l'erreur sera d'autant moins considérable que l'angle c approchera plus d'être $= 45^\circ$.

des degrés de l'angle $acf = hco$, parce qu'ils sont opposés au sommet, l'on fera attention que la hauteur hp de l'édifice étant perpendiculaire à l'horison est aussi perpendiculaire à la ligne horizontale co ; de sorte que le triangle hco est rectangle en o : mais dans ce triangle nous connoissons l'angle c & le côté co ; donc pour avoir la hauteur ho , on fera (141) $r : \text{tang. } hco :: co : ho$, hauteur cherchée à laquelle on ajoutera op , pour avoir la hauteur totale.

REMARQUE. On peut donc résoudre un triangle rectangle lorsqu'on connoît un des côtés & un angle aigu: car ayant un des côtés on trouvera l'autre par le dernier Théorème, parce que l'on connoîtra nécessairement l'autre angle aigu, complément du premier; mais on connoîtra l'hypothénuse par l'avant dernier Théorème.

144. PROBLEME II. Dans un triangle acb rectangle en b , connoissant deux côtés ab , bc , on propose de trouver les angles aigus (fig. 115). Faites le côté $cb : ab :: r : \text{tang. } acb$. Cette tangente étant cherchée dans les tables, fera connoître l'angle cherché. Cette analogie est la même que celle du dernier Théorème; on a mis seulement la première raison à la place de la seconde & réciproquement.

REMARQUE. L'angle c étant connu, son complément cab sera aussi connu. De plus, par l'avant dernier Théorème l'on aura $r : \sin. c :: ca : ab$, ou $\sin. c : r :: ab : ca$ (hypothénuse).

145. PROBLEME III. L'hypothénuse ac & le côté ab étant donnés, trouver les angles aigus.

Faites l'hypothénuse ac : au côté $ab :: r : \sin. bca$. Cette analogie est la même que celle de l'avant-dernier Théorème, en mettant la première raison à la place de la seconde & réciproquement. L'angle c étant connu, son complément a le sera aussi.

146. PROBLEME IV. *Etant donné un côté cb , & un des angles aigus, trouver l'autre côté.* Soit supposé l'angle a connu, son complément c le sera aussi, & parce qu'on connoît un des côtés, par exemple, le côté cb , on pourra faire cette analogie. Le rayon des tables est à la tangente de l'angle c , comme le côté cb au côté ab .

REMARQUE. Connoissant les angles aigus & les côtés, on trouvera facilement l'hypothénuse par l'avant dernier Théorème.

147. PROBLEME V. *Etant donné un des angles aigus & l'hypothénuse, trouver le côté opposé à cet angle.* Faites, le rayon est à l'hypothénuse comme le sinus de l'angle connu est au côté opposé. Et parce qu'un des angles aigus étant connu, l'autre angle est nécessairement connu, on trouvera de même le côté qui lui est opposé. Voilà la solution des quatre cas.

De la résolution des Triangles obliques.

148. THÉOREME I. *Dans tout triangle abd inscrit au cercle, ce qui est toujours possible (voyez le n°. 33); les côtés sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés (fig. 117).* La moitié de la corde ab ou du côté ab est le sinus de l'angle adb , moitié de l'angle acb , parce que l'angle d a pour mesure la moitié

de l'arc ab , c'est-à-dire, l'arc ax dont le sinus est ao moitié de ab . De même la moitié du côté ad sera le sinus de l'angle b , & la moitié du côté db , celui de l'angle a . Or les moitiés sont comme les tous; donc les côtés d'un triangle quelconque abd sont entr'eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés.

149. PROBLEME. *Etant donné un côté ab & les deux angles formés sur ce côté, trouver un des autres côtés g , par exemple.* Parce que les deux angles a & b étant donnés, l'angle d est connu (puisque les trois angles d'un triangle valent deux angles droits), on fera $\sin. d : ab :: \sin. a : g$. En faisant $\sin. d : ab :: \sin. b : f$, on connoîtra l'autre côté $f = ad$.

150. PROBLEME. *Mesurer la largeur ap d'une riviere (fig. 118).* Sur le bord ab mesurez une base ab à-peu-près égale à la largeur cherchée*, & supposant que p est un objet remarquable, situé sur l'autre bord de la riviere, comme un arbre; par exemple; mesurez avec le graphometre les angles pab , pba , ce qui vous fera aussi connoître l'angle p . Faites ensuite $\sin. p : ab :: \sin. b : ap$ largeur de la riviere.

151. THÉOREME I^h. *Dans tout triangle scalène bca (fig. 119) si du plus grand angle c on abaisse une perpendiculaire sur le plus grand côté ba , le plus grand côté sera à la somme des deux*

* Afin que l'erreur de l'angle observé, s'il y en a, influe moins dans l'erreur qu'on peut commettre sur la distance. De plus il est visible que pour avoir la largeur, il faut que ap soit perpendiculaire au lit de la riviere.

autres, comme la différence de ces deux côtés est à la différence des segmens ap , bp faits par la perpendiculaire pc . Du point c comme centre, avec le rayon cb égal au plus petit côté, décrivez un cercle, & prolongez ac jusqu'à la rencontre de la circonférence en g . A cause des deux rayons gc & bc , ag sera $= ac + bc$, & parce que $bp = pd$ (20), $ap - bp$ sera $= ap - pd = da$ différence des deux segmens ap , bp . De plus $af = ac - cf = ac - cb$ est la différence des côtés ac & cb . Mais ga & ba sont deux sécantes extérieures dont les parties hors du cercle sont réciproquement proportionnelles aux sécantes entières (56); donc $ab : ag = ac + bc :: af : ad$; donc, &c.

152. THÉOREME III. Dans tout triangle scalène abd (fig. 120) la somme des deux côtés quelconques ad , bd est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des angles a & b opposés à ces côtés, est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles. Selon ce que nous avons démontré ci-dessus (138) la somme des sinus des deux angles a & b d'un triangle abd est à la différence de ces mêmes sinus comme

$$\text{tang.} \left(\frac{a+b}{2} \right) : \text{tang.} \left(\frac{a-b}{2} \right); \text{ or les côtés}$$

opposés aux angles a & b sont dans le rapport de leur sinus (148); donc la somme des côtés opposés aux angles a & b est à la différence de ces mêmes côtés, comme la tangente de la demi-somme des angles a & b , est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

Ces trois Théorèmes suffisent pour résoudre un

triangle quelconque dans lequel sont données trois de ces cinq choses, 2 angles & 3 côtés. Il y a quatre cas; où l'on connoît deux angles & le côté compris entre ces deux angles, ce cas a déjà été résolu (149); ou l'on connoît deux côtés & l'angle compris; ou l'on connoît les trois côtés; ou enfin l'on connoît deux côtés & un angle opposé à l'un de ces côtés. Mais il faut observer dans ce dernier cas qu'on trouve un sinus qui peut également appartenir à un angle aigu ou à un angle obtus qui seroit son supplément. *Par exemple*, dans le triangle abc (fig. 121), connoissant les côtés ab , ac , si du point a comme centre avec le rayon ab , on décrit l'arc bd , le côté ad fera égal au côté ab , & les triangles dac , cab auront deux côtés égaux & le même angle c opposé à ces côtés égaux; donc on ne pourra déterminer l'angle b , à moins qu'on ne connoisse l'espece de cet angle, c'est-à-dire, s'il est aigu ou obtus: car si cet angle est aigu, le côté ab sera situé sur le côté ad , c'est-à-dire, à la gauche de la perpendiculaire ap ; mais il sera situé à la droite si cet angle est obtus. C'est pourquoi dans ce cas l'on a besoin de connoître l'espece de l'angle opposé à l'autre côté connu.

153. PROBLEME. Connoissant les côtés g & f & l'angle a opposé au côté g , connoissant de plus l'espece de l'angle b , résoudre le triangle adb (fig. 117). ~~Enites~~ (Théorème I.) $db : \sin. a :: ad : \sin. b$. Dans cette proportion les trois premiers termes sont connus, puisque l'angle a étant connu, son sinus l'est aussi par les tables; donc le sinus de l'angle b sera connu. Ce sinus peut appartenir à un angle aigu ou à un angle obtus qui

seroit son supplément : mais comme on connoît l'espece de l'angle b , il ne peut y avoir aucune difficulté. Ce sinus étant cherché dans les tables, on trouvera la valeur de l'angle cherché ; mais si l'angle b étoit obtus, on prendroit le supplément de cet angle. L'angle a & l'angle b étant connus, l'angle d le sera, & l'on connoîtra le côté ab en faisant $\sin. a : \sin. d :: db : ab$.

154. PROBLEME. *Connoissant les trois côtés ab , ca , cb d'un triangle scalène (fig. 119), trouver les angles.* De l'angle c opposé au plus grand côté, abaissez la perpendiculaire cp sur ce plus grand côté & faites (Théorème II) le grand côté est à la somme des deux autres, comme la différence af de ces deux côtés, est à la différence ad des segmens faits par la perpendiculaire cp . Du grand côté ba ôtant cette différence da , il restera db dont la moitié bp est le petit segment, qui étant retranché de ba , il restera pa grand segment. Cela posé dans le triangle rectangle bpc , on connoît l'hypothénuse bc & un côté bp ; donc (145) on connoîtra l'angle b . De même dans le triangle rectangle pca , on connoît le côté pa & l'hypothénuse ac ; donc on aura facilement l'angle a . Connoissant les angles b & a , on connoîtra facilement l'angle c .

155. REMARQUE. Nous avons supposé que bp étoit la moitié de bd , ce qui est évident, puisqu'une perpendiculaire cp , abaissée du centre d'un cercle sur une corde, coupe cette corde en deux parties égales (20). Mais le triangle bcd est isocèle ou équilatéral. Car les rayons bc & cd sont égaux, & de plus si bd est égal à bc , il est visible que les trois côtés seront égaux. Donc si du

sommet d'un angle quelconque d'un triangle équilatéral, ou si du sommet de l'angle compris entre les deux côtés égaux d'un triangle isocelle ; on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé , ce côté sera divisé en deux également.

156. PROBLEME. *Dans un triangle scalène a b d (fig. 120) connoissant deux côtés a b, b d & l'angle b compris entre ces côtés , résoudre ce triangle. Cherchez un des angles opposés aux côtés connus, en faisant (152)* $b d + a b : b d - a b ::$

$\text{tang.} \left(\frac{a+d}{2} \right) : \text{tang.} \left(\frac{a-d}{2} \right)$, le quatrième terme

de cette proportion dont les trois premiers termes sont connus, fera connoître la tangente de la demi-différence des angles a & d , dont la somme est $180^\circ - b$ (parce que la somme de deux angles d'un triangle est le supplément du troisième angle, à cause que les trois angles d'un triangle valent deux angles droits). Cette tangente étant cherchée dans les tables, fera connoître un angle qui, ajouté à la demi-somme des angles a & d , donnera le plus grand angle cherché a (car un plus grand angle est opposé à un plus grand côté), & qui retranché de cette demi-somme, donnera le plus petit angle d (voyez le calcul, n° 66. Problème I.).

157. PROBLEME. *Mesurer la hauteur f a d'une tour dont le pied est supposé inaccessible (fig. 121).* Ayant mesuré dans la campagne une base $b n$, je pose le graphometre au point de station b , & dirigeant la lunette fixe dans la ligne horizontale $d c$ & la lunette mobile vers a , je prends l'angle $a d c$. Portant ensuite l'instrument à l'autre point de station, je prends l'angle $a m c$ supplément de l'angle

a m d. Je connoîtrai donc l'angle *d a m* avec les angles *d & m*, & le côté *d m* du triangle *d a m*; donc je trouverai facilement le côté *a d*, en disant $\sin. a : d m :: \sin. a m d : a d$. Connoissant *a d*, je ferai (141) $r : a d :: \sin. d : a c^*$. Joignant au côté *a c* la hauteur $c f = d b$, hauteur du graphomètre, j'aurai *a f* hauteur cherchée. (Il s'agit ici de la hauteur de la tour au-dessus du niveau de la campagne qu'on suppose être une plaine). En opérant par les logarithmes, j'aurai $L \cdot a c = L \cdot a d + L \cdot \sin. d - L \cdot r$.

158. PROBLEME. *Mesurer la distance de deux lieux inaccessibles a & b* (fig. 123). Prenez deux points de station *c & d*, du point *d* mesurez l'angle *a d c*, & du point *c* mesurez l'angle *a c d*. Alors dans le triangle *a c d* vous connoissez deux angles & le côté *c d* que je suppose avoir été mesuré; donc vous connoîtrez facilement le troisième angle *a*, & les deux autres côtés (149) : ainsi vous connoîtrez *a d* & *a c*. Résolvez de même le triangle *b c d* dans lequel vous pouvez mesurer les angles *c & d* situés sur le côté connu *c d*, & vous trouverez facilement le côté *b c*. Mais dans le triangle *a c b* vous pouvez mesurer facilement l'angle *c* compris entre les côtés connus *a c*, *b c*; donc (156) vous pourrez facilement trouver un des autres angles du même triangle, l'angle *c b a*, par exemple, ce qui fera connoître le troisième angle. Cela posé dans le triangle *a c b*, on connoitra facilement le côté *a b* cherché, en faisant (148) $\sin. a b c : a c ::$

* Cette analogie est la même que celle du numéro cité en faisant changer de place aux moyens.

$\sin. a c b : a b$, distance cherchée ; ou $L \cdot a b = L \cdot a c + L \cdot \sin. a c b - L \cdot \sin. a b c$. *Par exemple*, supposant qu'on ait trouvé le côté $a c$ de 120 toises, le côté $c b$ de 142 toises & l'angle $a c b$ de 48° . Pour avoir les angles $c a b$, $c b a$ & le côté $a b$, je retranche 48° de 180° , il me reste 132° pour la somme des angles $c a b$, $c b a$, & par conséquent 66° pour leur demi-somme. Je fais $(156) 142' + 120' = 262' : 142' - 120' = 22' :: \text{tang. } 66^\circ :$

$\text{tang.} \left(\frac{c a b - c b a}{2} \right)$. En opérant par les logarithmes,

Log. 22.....1.342422

Log. tang. 66°10.351417

/ Somme.....11.693839

Log. 262.....2.418301

Reste.....9.275538.

c'est-à-dire, de la somme des logarithmes des moyens, retranchant le logarithme de l'extrême connu, le reste 9.275538 donne le logarithme de l'extrême cherché. Ce logarithme dans les tables est fort approchant de celui de $10^\circ. 41'$. * ajoutant cette quantité à la demi-somme des angles ci-dessus, j'aurai le plus grand angle $c a b$ de $76^\circ. 41'$, & par conséquent l'angle $a b c$ de $55^\circ. 19'$. Enfin pour avoir le côté $a b$, je fais cette proportion arithmétique $\log. \sin. a b c : \log. a c :: \log. \sin. a c b : \log. a b$, & je trouve le côté cherché $a b$ de 108.4 à-peu-près.

* Il y a une petite erreur, puisque l'on ne prend qu'un angle approché, mais elle est peu considérable.

159. PROBLEME. *Mesurer* 1°. la hauteur ab , 2°. la pente ad d'une montagne inaccessible da (fig. 124). Ayant mesuré la base gf , je mesure les angles agf , afg (supplément de afb), ce qui me fait connoître l'angle gaf . Dans le triangle gaf je connois les angles & un côté gf ; donc je connoîtrai facilement les côtés af , ag . Dans le triangle agb rectangle en b (puisque la ligne ab hauteur de la montagne est perpendiculaire sur la ligne horizontale gfb), je connois l'angle g & l'hypothénuse; donc je trouverai facilement le côté ab , en disant (141) $r : ga :: \sin. g : ab$, ou $L \cdot r \cdot L \cdot ga : L \cdot \sin. g \cdot L \cdot ab$. Maintenant prenant un point p tel qu'ayant mesuré l'angle dfp , je puisse appercevoir de ce point le pied d de la montagne, je mesure le côté fp & l'angle fpd ; donc dans le triangle dfp , je connois un côté fp , les deux angles qui comprennent ce côté, & par conséquent le troisième angle; donc je connoîtrai facilement le côté fd . Cela posé dans le triangle agd je connois le côté ag , le côté $gd = gf + fd$ & l'angle g compris entre ces côtés; donc je trouverai facilement le côté ad (156) c'est-à-dire la pente de la montagne.

160. PROBLEME. *Lever une carte géographique* (fig. 125). Prenez une base ab qui ne soit pas moindre que la dixième ou huitième partie de la distance des deux objets les plus éloignés qu'on veut représenter sur la carte *. Ayant mesuré ab prenez

* L'erreur sera d'autant plus petite que la distance des deux objets les plus éloignés différera moins de la base ab . De plus nous supposons les objets situés sur un plan horizontal, & l'erreur sera d'autant plus petite que ces objets appro-

avec le graphomètre la grandeur des angles dab , cab , nab , mab , xab . Transportez-vous ensuite de a en b , & mesurez les angles nba , cba , dba , xba , mba . Comme l'angle hba seroit trop obtus, prenez bn pour base & mesurez les angles hnb , hbn . Cela fait, supposons que ab soit de 800', prenez une ligne à discrétion pour en faire une échelle de 100 parties égales, Ce qu'on peut faire en portant une petite ouverture de compas dix fois sur une ligne arbitraire pq , ouvrant ensuite le compas de manière que les deux pointes soient dix fois plus éloignées. Portez cette nouvelle ouverture neuf fois sur la même ligne à compter depuis la dixième division, & vous aurez l'échelle pq de 100 parties. Supposant maintenant que chaque division de l'échelle vaille 20 toises, tirez sur le papier une ligne ab qui doit être de quarante parties de l'échelle, faites en a & en b les angles dab , cab , &c. nba , cba , &c. tels que vous les avez trouvés dans l'opération; & tirant les lignes ca , cb , &c. ces lignes détermineront par leur rencontre la position du point c , &c. Faisant ensuite sur nb les angles hnb , hbn , de la grandeur trouvée, vous aurez la position de l'objet h . Il est visible que les objets d , c , n , h , &c. seront placés sur le papier comme ils le sont sur le terrain *; ainsi le Problème sera résolu. Pour con-

cheront plus d'être situés dans un tel plan. Dans nos Institutions Mathématiques nous avons enseigné la méthode de placer sur une carte les points qui sont au-dessus ou au-dessous de l'horizon, de mesurer un terrain, de lever les plans, &c.

* On suppose que ces objets sont situés sur un plan horizontal. Si cela n'étoit pas, on pourroit néanmoins repré-

noître la distance du point n au point h , par exemple, ouvrez le compas de n en h , & portant cette ouverture sur l'échelle, supposons qu'elle contienne 18 divisions $\frac{1}{4}$, puisque nous avons supposé chaque division de 10', la distance de ces points sera de 375'.

161. PROBLEME. Trouver le rapport approché du diamètre à la circonférence d'un cercle (fig. 126). Inscrivez dans ce cercle un polygone régulier de 48 côtés, circonscrivez au même cercle un pareil polygone, ce qui est facile; car divisant 360 par 48, le quotient $7\frac{1}{2}$ qui est le quart de 30, fait connoître l'angle au centre d'un tel polygone. Or (132) il est facile de trouver le sinus de l'angle de 30 degrés, & ensuite celui de sa moitié

15° puis celui de $7\frac{1}{2}$ moitié de ce dernier (135). Supposant donc l'arc gd de 7 degrés 30' (on a fait l'arc gd plus grand qu'il ne devoit être afin d'éviter la confusion), gd sera le côté du polygone inscrit, pb celui du polygone circonscrit. Tirant par le milieu de cet arc le rayon oc , dx sera le sinus & ob la tangente de 3° 45'; or en supposant le rayon = 10000000, le sinus dx de 3° 45' est = 654031, & la tangente du même arc est = 655435; donc $gd = 2gx = 1308062$, & $bp = 2bo = 1310870$. Multipliant gd & bp par 48, le périmètre du polygone inscrit sera 62786976, & celui du polygone circonscrit sera = 62921760. L'arc god étant plus grand que la corde gd , & plus petit que pb , on peut le considérer (*) sans une grande erreur comme moyen arithmétique entre ces deux lignes, & considérer de même la circonférence comme moyenne arithmétique entre les périmètres dont nous venons de parler; c'est pourquoi prenant la demi-somme des périmètres trouvés, on aura la circonférence du cercle à-peu-près = 62854368. Mais le rayon étant = 10000000, le dia-

senter la situation respective de ces objets on lever la carte en employant la méthode dont nous avons parlé dans la seconde édition de nos Institutions.

* Parce que le polygone régulier circonscrit étant plus grand que le cercle, chaque côté d'un tel polygone est plus grand que l'arc correspondant.

mètre sera ≈ 20000000 ; ainsi le diamètre est à la circonférence à-peu-près comme $20000000 : 62854368$, ou comme $200 : 628 \cdot 54368$ (en divisant par 100000), ou comme $200 : 628$ (en négligeant la fraction décimale), ou comme $100 : 314$ à-peu près (en divisant ces deux derniers nombres par 2), ce qui donne un des rapports dont nous avons déjà parlé (79).

162. PROBLEME. *Connoissant les trois côtés a, b, c d'un triangle scalene abd (fig. 127), trouver l'aire de ce triangle.* Cherchez par la méthode ci-dessus (154) les angles a, b, c & le segment ap du triangle proposé. Cela posé , dans le triangle abp , rectangle en p , on connoîtra l'hypothénuse ab , l'angle a & le côté ap ; donc on trouvera facilement le côté bp , c'est-à-dire , la valeur de la perpendiculaire abaissée de l'angle b sur le côté opposé ad . Multipliant la base ad par la moitié de la hauteur bp , l'on aura la surface du triangle proposé.

D'une autre manière. Soit $bp = y$ & $ap = x$, par la propriété du triangle rectangle abp , on a $x^2 + y^2 = b^2$. De même le triangle rectangle bpd donne , en faisant attention que $pd = a - x$, $y^2 + a^2 - 2ax + x^2 = c^2$. Retranchant cette équation de la première , il vient $2ax - a^2 = b^2 - c^2$, ou (en transposant) $2ax = a^2 + b^2 - c^2$, d'où je tire

$$x = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a} = \frac{(b + c) \cdot (b - c)}{2a} + \frac{a}{2} ;$$

c'est-à-dire que pour avoir x il faut trouver une quatrième proportionnelle aux lignes $2a, b + c, b - c$, & lui ajouter $\frac{a}{2}$. Dès

qu'on aura trouvé $x = ap$, on retranchera le carré de x du carré de l'hypothénuse b , prenant la racine du reste , on aura $y = bp$, dont la moitié étant multipliée par a , donnera l'aire du triangle proposé.

163. PROBLEME. *Trouver l'angle a du même triangle abd , sans avoir recours à la méthode ci-dessus (154).* Du point a comme centre avec le rayon $ab = b$ décrivez l'arc bg , tirez la corde bo , & du point a le rayon ao par le milieu de cette corde. Cela posé ab est $= ag$ par la propriété du cercle, & pg

$= ag - ap = b - x$. mais le triangle rectangle bpg donne $y^2 + b^2 - 2bx + x^2 = p^2$ (en supposant l'hypothénuse $bg = p$) ou, en substituant b^2 à la place de $y^2 + x^2$, $2b^2 - 2bx = p^2$, ou $p^2 = 2b(b - x)$. Mettant pour x la valeur trouvée dans le problème précédent, on a $p^2 = 2b \times$

$$\left(b + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a}\right) = 2b \cdot \left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right);$$

or $2ab - a^2 - b^2 = -(b - a)^2$; donc $p^2 = 2b \times$

$$\left(\frac{c^2 - (b - a)^2}{2a}\right) = \frac{2b}{2a} [c^2 - (b - a)^2] = \frac{b}{a} [c^2 - (b - a)^2].$$

Faisant $b - a = n$, on aura $p^2 = \frac{b}{a} \times$

$$(c^2 - n^2) = \frac{b}{a} \times (c + n) \times (c - n), \text{ \& remettant la}$$

valeur de n , on a $p^2 = \frac{b}{a} \times (c + b - a) \cdot (c + a - b)$

$$= \frac{b}{a} \times (c + b + a - 2a) \cdot (c + a + b - 2b); \text{ donc}$$

appellant $2m$ la somme des trois côtés, on aura $p^2 = \frac{b}{a} \times$

$$(2m - 2a) \cdot (2m - 2b) = \frac{4b}{a} (m - a) \cdot (m - b).$$

Mais dans le triangle rectangle ago , on a $ag = ab = b : og$

$$:: r : \sin. oag, \text{ ou } b : \frac{p}{2} :: r : \sin. gao; \text{ donc } \frac{p}{2} =$$

$$\frac{b \cdot \sin. gao}{r}, \text{ ou } p = \frac{2b}{r} \sin. gao, \text{ \& } p^2 = \frac{4b^2}{r^2} \cdot \sin.^2 gao.$$

Egalant les deux valeurs de p^2 , on a $\frac{4b}{a} (m - a) \cdot (m - b)$

$$= \frac{4b}{r^2} \sin.^2 gao, \text{ divisant par } 4b \text{ \& faisant disparaître les dé-}$$

nominateurs, il vient $r^2 (m - a) \cdot (m - b) = a \cdot b (\sin. gao)^2$,
d'où l'on tire $a \cdot b : (m - a) \cdot (m - b) :: r^2 : (\sin. gao)^2$.

C'est-à-dire, le produit des deux côtés a & b qui comprennent l'angle cherché bad , est au produit des différences de la demi-somme m des trois côtés à chacun des côtés de cet angle, comme le carré du rayon au carré du sinus de la moitié de

cet

cet angle. Prenant la racine du quatrième terme de cette proportion l'on aura le sinus de la moitié de l'angle a , ce qui fera connoître la moitié de cet angle par le moyen des tables; connoissant la moitié, on connoitra l'angle entier. On s'y prendra de même pour connoître un autre angle quelconque.

164. PROBLÈME. Connoissant les trois côtés du même triangle trouver sa surface indépendamment de la méthode ci-dessus (162). Nous avons déjà trouvé (162) $x^2 + y^2 = b^2$; d'où l'on tire $y^2 = b^2 - x^2 = (b + x) \cdot (b - x)$, & en

mettant pour x la valeur $\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$, on a $y^2 =$

$$\begin{aligned} & \left(b + \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a} \right) \times \left(b - \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a} \right) = \\ & \left(\frac{2ab + b^2 + a^2 - c^2}{2a} \right) \times \left(\frac{2ab - b^2 - a^2 + c^2}{2a} \right) = \\ & = \left(\frac{(b + a)^2 - c^2}{2a} \right) \times \left(\frac{c^2 - (b - a)^2}{2a} \right) = \\ & \left(\frac{(a + b + c) \times (a + b - c)}{2a} \right) \times \left(\frac{(c + b - a) \times (c - b + a)}{2a} \right); \end{aligned}$$

done en ôtant la fraction, $4a^2 y^2 = (a + b + c) \times (a + b - c) \times (b + c - a) \times (c + a - b)$ *, ou $4a^2 y^2 = (a + b + c) \times (a + b + c - 2c) \cdot (a + b + c - 2a) \cdot (a + b + c - 2b)$. Donc supposant la somme des trois côtés $= 2p$, on aura $4a^2 y^2 = (2p) \cdot (2p - 2c) \cdot (2p - 2a) \cdot (2p - 2b) = 16p \times (p - c) \cdot (p - a) \cdot (p - b)$; donc en divisant par 16, l'on aura $\frac{a^2}{4} y^2 = p(p - c)(p - a)(p - b)$, & prenant la

racine quarrée, il vient $\frac{a}{2} y = \sqrt{[p(p - c) \cdot (p - a) \cdot (p - b)]}$.

Mais $\frac{a}{2} y$ est le produit de la moitié de la base du triangle par sa

hauteur; donc $\frac{a}{2} y$ est l'aire du triangle. C'est pourquoi l'aire d'un triangle dont on connoît les trois côtés se trouve en retranchant de la demi-somme des trois côtés chacun des côtés du triangle, multipliant ces trois restes entr'eux & par la demi-somme, &

* a doit être multiplié par lui-même, parce qu'il se trouve dans deux facteurs du second membre de l'équation précédente.

prenant la racine du produit. Soit, *par exemple*, le côté $a d = a = 5$ toises, $b = 4$, $c = 3$, $2p$ sera $= 12$, $p = 6$, $p - c = 3$, $p - a = 1$, $p - b = 2$; donc $\sqrt{[p \cdot (p - c) \times (p - a) \cdot (p - b)]} = \sqrt{(6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2)} = \sqrt{36} = 6$, c'est-à-dire que l'aire de ce triangle sera de 6 toises quarrées.

165. PROBLEME. *Etant donnés les côtés d'un triangle $a b d$, connoître si un angle cherché est aigu ou obtus.* L'équation $2ax - a^2 = b^2 - c^2$ (162) devient en transposant, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$; c'est-à-dire, que le quarré d'un côté c opposé à un angle aigu a vaut moins que la somme des quarrés des deux autres côtés. Mais dans la figure 128, ap étant toujours la distance x de l'angle cherché à la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle b sur la base $a d$ prolongée s'il le faut, dp sera $= x + a$; mais le triangle rectangle $a b p$ donne $(bp)^2 + (ap)^2 = (ab)^2$, ou $y^2 + x^2 = b^2$, & le triangle rectangle $b p d$ donne $y^2 + a^2 + 2ax + x^2 = c^2$ (parce qu'ici $dp = a + x$). Retranchant la première équation de la seconde, l'on trouve $a^2 + 2ax = c^2 - b^2$, ou en transposant, $c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$. Mais (dans la fig. 128) le côté c est opposé à un angle obtus; donc le quarré d'un côté opposé à un angle obtus est plus grand que la somme des quarrés des deux autres côtés, au contraire le quarré d'un côté opposé à un angle aigu vaut moins que la somme des quarrés des deux autres côtés. Ainsi en supposant qu'on connoît les côtés d'un triangle, il est facile de s'assurer quel est l'angle obtus, ou même s'il y en a.

166. REMARQUE. Ce que nous avons dit ci-dessus sur la théorie des sinus, co-sinus, &c. suffit pour ceux qui veulent s'en tenir à ce qu'on appelle *Elémens de Mathématiques*, & ils peuvent s'arrêter ici. Mais qu'il nous soit permis d'approfondir un peu cette matiere en faveur des jeunes Géometres qui veulent aller plus loin.

167. Si l'arc $a b$ (fig. 108) est regardé comme positif, son sinus $b d$ sera positif aussi-bien que son co-sinus $c d$. Lorsque cet arc deviendra $= ha = 90^\circ$, son sinus sera égal au rayon $= r$ & son co-sinus $= 0$; cet arc devenant $a h u$ plus grand qu'un quart de cercle, aura son sinus $u q$ tourné du

même côté , & par conséquent positif ; mais son co-sinus $c q$ se trouvant de l'autre côté du centre dans une situation opposée à $c d$ co-sinus de $a b$, sera négatif ; & enfin il deviendra $= -r$, lorsque l'arc $b a$ deviendra égal à la demi-circonférence $a h p = 2m$, en faisant le quart de cercle $a h = m$; au contraire son sinus deviendra $= 0$. Si l'arc devient $a h z > 2m$, mais plus petit que $3m$, son sinus $q z$ & son co-sinus $c q$ seront négatifs ; puisque ces lignes sont dans une situation opposée à celle des lignes $b d$, $c d$. Si l'arc dont nous parlons & que nous désignerons par a devient $= 3m = 270^\circ$, son co-sinus deviendra $= 0$, & son sinus $= -r$. en supposant a plus grand que $3m$, mais moindre que $4m = 360^\circ$, son sinus $d g$ sera négatif & son co-sinus $c d$ positif . Si $a = 4m = 360^\circ$, son sinus sera $= 0$ & son co-sinus $= r$, si a devient plus grand que $4m$, par exemple , $= 4m + a b$, mais moindre que $5m$, son sinus $b d$ sera positif aussi-bien que son co-sinus ; de sorte qu'en ajoutant une ou même plusieurs circonférences à un arc , cela ne change rien à son sinus , ou à son co-sinus . En prenant a pour l'origine de l'arc $a b$ positif , l'arc $a g$ sera négatif , mais son co-sinus sera positif si cet arc est $< m$. Si cet arc a négatif devient plus grand que m , mais moindre que $2m$, son sinus & son co-sinus seront tous les deux négatifs ; si cet arc devient plus grand que $2m$ & moindre que $3m$, son sinus deviendra positif , mais son co-sinus restera négatif . Cet arc étant plus grand que $3m$, mais moindre que $4m$, son sinus continuera d'être positif & son co-sinus sera aussi positif . En général un arc positif , plus petit que $2m$, a toujours son sinus positif ; mais un arc positif plus

grand que $2m$ & plus petit que $4m$, a son sinus négatif. Un arc positif a , plus petit que m , a toujours son co-sinus positif; il l'a négatif lorsque cet arc est entre m & $3m$, positif lorsqu'il est entre $3m$, $4m$ & m . A l'égard d'un arc a négatif, son sinus est négatif l'arc étant entre 0 & $2m$, & positif l'arc étant entre $2m$ & $4m$. Le co-sinus est positif l'arc étant entre 0 & m , négatif entre m & $3m$; mais il est positif si a est entre $3m$ & $4m$. On ne change rien au sinus, ni au co-sinus en ajoutant à l'arc une ou plusieurs circonférences entières, soit avec le signe $+$ ou avec le signe $-$. En supposant $r = 1$, on aura $\sin. 0 = 0$, $\text{co-sin. } 0 = 1$, $\sin. m = 1$, $\text{co-sin. } m = 0$, $\sin. 2m = 0$, $\text{co-sin. } 2m = -1$, $\sin. 3m = -1$, $\text{co-sin. } 3m = 0$, $\sin. 4m = 0$, $\text{co-sin. } 4m = 1$. Ainsi tous les sinus & co-sinus sont renfermés entre $+1$ & -1 . On a encore $\text{co-sin. } a = \sin. (m - a)$, $\sin. a = \text{co-sin. } (m - a)$, & parce que le triangle cdb est rectangle en d , on a $(cd)^2 + (bd)^2 = (cb)^2$, ou $(\text{co-sin. } a)^2 + (\sin. a)^2 = r^2 = 1$.

168. L'arc a étant positif & moindre que m , sa tangente an & sa co-tangente hm sont positives. Mais si a est plus grand que m & moindre que $2m$, sa co-tangente & sa tangente seront négatives. Car soit l'arc ah , sa tangente se trouvera sur le prolongement de la ligne an qui passe par l'origine de l'arc a , & d'ailleurs elle doit être terminée par la rencontre du rayon cu qui passe par l'autre extrémité du même arc; or cu ne peut rencontrer an , à moins de prolonger cette ligne jusqu'en $2q$. A l'égard de la co-tangente $h2p$, il est évident que sa situation est opposée à hm co-tangente de l'arc ab ; donc, &c.

Si a devient plus grand que $2m$, mais moindre que $3m$, la tangente & la co-tangente deviendront positives ; car an est la tangente de l'arc ahz , & hm la co-tangente. Si a devient plus grand que $3m$ & moindre que $4m$, la tangente & la co-tangente deviendront négatives ; ainsi l'arc $ahxg$ aura pour tangente la ligne $a2q$, & pour co-tangente la ligne $h2p$. On peut voir par-là que l'origine de la co-tangente d'un arc doit être éloignée de 90° de l'origine de cet arc.

A un arc ag négatif, répondra une tangente & une co-tangente négatives, si cet arc est plus petit que m ; s'il est plus grand que m & plus petit que $2m$, la tangente & la co-tangente sont positives. Ainsi l'arc ag a pour tangente $a2q$, & pour co-tangente $h2p$; mais l'arc axz a pour tangente an & pour co-tangente hm . Si cet arc devient axu plus grand que $2m$ & moindre que $3m$, la tangente & la co-tangente redeviendront négatives ; & enfin ces lignes seront positives lorsque cet arc $axhb$ fera plus grand que $3m$ & moindre que $4m$.

169. COROLLAIRE. Donc un arc dont la tangente seroit positive & la co-tangente négative & réciproquement, est absurde & imaginaire. C'est d'ailleurs ce qui suit de la formule tang. $a \times$

co-tang. $a = r^2$, car l'on a tang. $a = \frac{r^2}{\text{co-tang. } a}$;

or r^2 est une quantité positive ; donc tang. $a \times$ co-tang. a est aussi une quantité positive ; ce qui ne peut être à moins que co-tang. a & tang. a ne soient toutes deux positives ou toutes deux négatives. Donc si co-tang. a est positive, l'on aura

G g 3

$\text{tang. } a = \frac{r^2}{\text{co-tang. } a}$ positive ; mais cette quantité sera négative , si $\text{co-tang. } a$ est négative.

170. En supposant $r=1$, l'on a 1°. $\sin. (a+b) = \sin. a \cdot \text{co-sin. } b + \text{co-sin. } a \cdot \sin. b$; 2°. $\text{co-sin. } (a+b) = \text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b - \sin. a \cdot \sin. b$; 3°. $\sin. (a-b) = \sin. a \cdot \text{co-sin. } b - \sin. b \cdot \text{co-sin. } a$; 4°. $\text{co-sin. } (a-b) = \text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b + \sin. a \cdot \sin. b$; 5°. $\text{tang. } a = \frac{\sin. a}{\text{co-sin. } a}$; 6°. $\text{co-tang. } a = \frac{\text{co-sin. } a}{\sin. a}$.

Cela posé l'on aura $\text{tang. } (a+b) = \frac{\sin. a \cdot \text{co-sin. } b + \sin. b \cdot \text{co-sin. } a}{\text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b - \sin. a \cdot \sin. b}$, & divisant le second membre haut & bas par $\text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b$,

$$\text{il vient } \text{tang. } (a+b) = \frac{\frac{\sin. a}{\text{co-sin. } a} + \frac{\sin. b}{\text{co-sin. } b}}{1 - \frac{\sin. a \cdot \sin. b}{\text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b}} =$$

$$\frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \cdot \text{tang. } b} , \text{ De même } \text{co-tang. } (a+b) =$$

$$\frac{\text{co-sin. } (a+b)}{\sin. (a+b)} = \frac{\text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b - \sin. a \cdot \sin. b}{\sin. a \cdot \text{co-sin. } b + \sin. b \cdot \text{co-sin. } a}$$

$$= \frac{\frac{\text{co-sin. } a}{\sin. a} - \frac{\sin. b}{\text{co-sin. } b}}{1 + \frac{\sin. b \cdot \text{co-sin. } a}{\text{co-sin. } b \cdot \sin. a}} \quad (\text{ en divisant haut \& bas$$

$$\text{par } \sin. a \cdot \text{co-sin. } b) = \frac{\text{co-tang. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{co-tang. } a \cdot \text{tang. } b} . \text{ On trou-}$$

$$\text{vera par un calcul semblable } \text{tang. } (a-b) =$$

* a & b désignent des arcs ; nous supposons $a > b$,

$$\frac{\sin. (a - b)}{\cos\text{-}\sin. (a - b)} = \frac{\text{tang. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{tang. } a \cdot \text{tang. } b}, \text{ \& } \cos\text{-}\text{t. } (a - b)$$

$$= \frac{\cos\text{-}\sin. (a - b)}{\sin. (a - b)} = \frac{\cos\text{-}\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } b \cdot \cos\text{-}\text{tang. } a}.$$

En ajoutant ensemble les valeurs de $\sin. (a + b)$ & de $\sin. (a - b)$, & divisant par 2 on aura

$$\sin. a \cdot \cos\text{-}\sin. b = \frac{\sin. (a + b) + \sin. (a - b)}{2}.$$

En retranchant la valeur de $\sin. (a - b)$ de celle de $\sin. (a + b)$, & divisant le résultat par 2, il

$$\text{vient } \sin. b \cdot \cos\text{-}\sin. a = \frac{\sin. (a + b) - \sin. (a - b)}{2}.$$

En ajoutant les valeurs de $\cos\text{-}\sin. (a - b)$, de $\cos\text{-}\sin. (a + b)$ & divisant par 2, l'on a $\cos\text{-}\sin. a \cdot \cos\text{-}\sin. b =$

$$\frac{\cos\text{-}\sin. (a - b) + \cos\text{-}\sin. (a + b)}{2}.$$

Retranchant la valeur de $\cos\text{-}\sin. (a + b)$ de celle de $\cos\text{-}\sin. (a - b)$, & divisant ensuite par 2, l'on trouve cette quatrième

$$\text{formule } \sin. a \cdot \sin. b = \frac{\cos\text{-}\sin. (a - b) - \cos\text{-}\sin. (a + b)}{2}.$$

En faisant $a + b = m$, $a - b = n$, l'on aura $(a + b) + (a - b) = 2a = m + n$, ou $a =$

$$\frac{m + n}{2}, \text{ \& } (a + b) - (a - b) = 2b = m - n,$$

$$\text{ou } b = \frac{m - n}{2}.$$

Si dans les quatre dernières formules qu'on vient de trouver, on substitue les valeurs de a & de b , qu'on fasse disparaître le dénominateur, & que de plus on fasse changer de place aux membres de chaque équation, l'on trouvera les 4 formules suivantes :

Fig 4

$$1^{\circ}. \sin. m + \sin. n = 2 \cdot \sin. \left(\frac{m+n}{2} \right) \cdot \text{co-sin.} \left(\frac{m-n}{2} \right).$$

$$2^{\circ}. \sin. m - \sin. n = 2 \cdot \sin. \left(\frac{m-n}{2} \right) \cdot \text{co-sin.} \left(\frac{m+n}{2} \right).$$

$$3^{\circ}. \text{cof. } n + \text{cof. } m = 2 \cdot \text{cof.} \left(\frac{m+n}{2} \right) \cdot \text{co-sin.} \left(\frac{m-n}{2} \right).$$

$$4^{\circ}. \text{cof. } n - \text{cof. } m = 2 \cdot \sin. \left(\frac{m+n}{2} \right) \cdot \sin. \left(\frac{m-n}{2} \right).$$

REMARQUE. Rien n'empêche de considérer m & n chacune comme un seul arc, & non comme la somme ou la différence de deux arcs. Si l'on fait $n = 0$, les deux dernières formules donneront, à cause de $\text{co-sin. } 0 = 1$, $1 + \text{co-sin. } m = 2 \cdot (\text{co-sin.})^2 \frac{1}{2} m$, & $1 - \text{co-sin. } m = 2 \cdot (\sin.)^2 \frac{1}{2} m$;

$$\text{donc } \frac{1 - \text{co-sin. } m}{1 + \text{co-sin. } m} = \frac{(\sin.)^2 \frac{1}{2} m}{(\text{co-sin.})^2 \frac{1}{2} m} = (\text{tang.})^2 \frac{1}{2} m,$$

$$\text{et } \frac{1 + \text{co-sin. } m}{1 - \text{co-sin. } m} = (\text{co-tang.})^2 \frac{1}{2} m.$$

171. PROBLÈME. Trouver les facteurs de la quantité $a^2 + b^2$. Supposant $a^2 + b^2 = 0$, l'on aura $a^2 = -b^2$, $a = \pm \sqrt{(-b^2)} = \pm \sqrt{(-1 \times b^2)} = \pm b \sqrt{(-1)}$; donc $a + b \sqrt{(-1)}$, & $a - b \sqrt{(-1)}$ sont les facteurs cherchés. En effet en les multipliant l'un par l'autre l'on retrouvera la quantité proposée,

172. Nous avons déjà dit que $(\sin. a)^2 + (\text{co-sin. } a)^2 = r^2 = 1$; or par le Problème précédent, en supposant $\sin. a = a$, & $\text{co-sin. } a = b$, l'on aura $[\text{co-sin. } + \sin. \sqrt{(-1)}] [\text{co-sin. } - \sin. \sqrt{(-1)}] = r^2$ *, & $[\text{co-sin. } a + \sin. a \sqrt{(-1)}]$

* Co-sin. & sin. désignent le co-sinus & le sinus d'un même

$\times [\text{co-sin. } a - \text{sin. } a \sqrt{(-1)}] = [\text{co-sin. } b + \text{sin. } b \sqrt{(-1)}] \cdot [\text{co-sin. } b - \text{sin. } b \sqrt{(-1)}] = r^2$. Si l'on multiplie $\text{co-sin. } a + \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}$ par $\text{co-sin. } b + \text{sin. } b \cdot \sqrt{(-1)}$, le produit sera $\text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b - \text{sin. } a \cdot \text{sin. } b + (\text{co-sin. } a \cdot \text{sin. } b + \text{sin. } a \cdot \text{co-sin. } b) \times \sqrt{(-1)}$; mais en faisant $r = 1$, $\text{co-sin. } a \times \text{co-sin. } b - \text{sin. } a \cdot \text{sin. } b = \text{co-sin. } (a + b)$, & $\text{co-sin. } a \cdot \text{sin. } b + \text{sin. } a \cdot \text{co-sin. } b = \text{sin. } (a + b)$; donc le produit que nous venons de trouver est $\text{co-sin. } (a + b) + \text{sin. } (a + b) \times \sqrt{(-1)}$. De même $[\text{co-sin. } a - \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}] \cdot [\text{co-sin. } b - \text{sin. } b \times \sqrt{(-1)}] = \text{co-sin. } (a + b) - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } (a + b)$. On trouve par un calcul semblable $[\text{co-sin. } a \pm \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}] \times [\text{co-sin. } b \pm \text{sin. } b \cdot \sqrt{(-1)}] \times [\text{co-sin. } x \pm \text{sin. } x \sqrt{(-1)}] = \text{co-sin. } (a + b + x) \pm \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } (a + b + x)$.

173. COROLLAIRE I. Donc supposant $b = a$ on aura $[\text{co-sin. } a \pm \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^2 = [\text{co-sin. } 2a \pm \text{sin. } 2a \cdot \sqrt{(-1)}]$, & en supposant $x = b = a$, on aura $[\text{co-sin. } a \pm \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^3 = \text{co-sin. } 3a \pm \text{sin. } 3a \cdot \sqrt{(-1)}$: en général $[\text{co-sin. } a \pm \text{sin. } a \times \sqrt{(-1)}]^n = \text{co-sin. } na \pm \text{sin. } na \cdot \sqrt{(-1)}$.

174. COROLLAIRE II. De la dernière équation on tire, en prenant $+$ pour le signe du radical & transposant, $\text{sin. } na \cdot \sqrt{(-1)} = -\text{co-sin. } na + [\text{co-sin. } a + \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^n$, & prenant le signe du radical en $-$, on a $\text{sin. } na \cdot \sqrt{(-1)} = \text{co-sin. } na - [\text{co-sin. } a - \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^n$. Ajoutant ces deux équations & divisant par $2 \cdot \sqrt{(-1)}$, on trouve l'équation $\text{sin. } na =$

$$\frac{[\text{co-sin. } a + \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^n - [\text{co-sin. } a - \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^n}{2 \cdot \sqrt{(-1)}}.$$

arc ou d'un même angle a , sans qu'il soit nécessaire de le spécifier,

On trouve aussi en retranchant la seconde équation de la première, transposant & divisant par 2, $\text{co-sin. } na =$

$$\frac{[\text{co-sin. } a + \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^n + [\text{co-sin. } a - \text{sin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^n}{2}.$$

175. COROLLAIRE III. Elevant les deux Binomes à la puissance n par la formule de *Newton*, on trouve les deux formules suivantes sans imaginaires.

$$\begin{aligned} \text{I. } \text{sin. } na &= \frac{n}{1} (\text{co-sin. } a)^{n-1} \cdot \text{sin. } a - \\ &\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\text{co-sin. } a)^{n-3} (\text{sin. } a)^3 + \\ &\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (\text{co-sin. } a)^{n-5} \times \\ &(\text{sin. } a)^5 - \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \text{co-sin. } na &= (\text{co-sin. } a)^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (\text{co-sin. } a)^{n-2} \\ &\times (\text{sin. } a)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\text{co-sin. } a)^{n-4} \\ &\times (\text{sin. } a)^4 - \&c. \end{aligned}$$

REMARQUE I. La première formule est composée des termes de rang pair, c'est-à-dire, du second, quatrième, sixième, &c. du Binome $[\text{co-sin. } a + \text{sin. } a]^n$, & la seconde des termes de rang impair du même Binome. Dans les deux formules le premier terme est positif, les autres étant alternativement négatifs & positifs.

176. REMARQUE II. Nous avons supposé $r = 1$; mais si l'on vouloit exprimer le rayon, il faudroit diviser les deux formules précédentes

par $r^{\text{sin.}}$. Voici une autre maniere de trouver ces formules en exprimant le rayon. Les formules

$$\text{co-sin. } (a + b) = \frac{\text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b - \text{sin. } a \cdot \text{sin. } b}{r},$$

$$\text{sin. } (a + b) = \frac{\text{sin. } a \cdot \text{co-sin. } b + \text{sin. } b \cdot \text{co-sin. } a}{r} \text{ peu-}$$

vent s'exprimer ainsi :

$$\text{co-sin. } (a + b) = [(\text{co-sin. } a + \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } a) \times (\text{co-sin. } b + \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } b) + (\text{co-sin. } a - \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } a) (\text{co-sin. } b - \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } b)] : * 2r;$$

$$\text{sin. } (a + b) = [(\text{co-sin. } a + \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } a) \times (\text{co-sin. } b + \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } b) - (\text{co-sin. } a - \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } a) (\text{co-sin. } b - \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } b)] : 2 \cdot r \cdot \sqrt{(-1)}.$$

Multipliant la dernière équation par $\sqrt{(-1)}$ pour l'ajouter à la première & l'en retrancher ensuite, on trouvera les équations suivantes :

$$(M) \quad \text{co-sin. } (a + b) + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } (a + b) = \frac{[\text{co-sin. } a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } a] \cdot [\text{co-sin. } b + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } b]}{r},$$

$$(P) \quad \text{co-sin. } (a + b) - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } (a + b) = \frac{[\text{co-sin. } a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } a] \cdot [\text{co-sin. } b - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } b]}{r}.$$

S'il s'agit du sinus ou du co-sinus de $(a - b)$, il

* Les deux points indiquent la division; c'est-à-dire, que la quantité qui précède les deux points est le dividende, & que celle qui suit est le diviseur; ou, ce qui revient au même, la quantité qui précède les deux points est le numérateur d'une fraction, dont la quantité qui suit les deux points est le dénominateur.

suffira de changer le signe de $\sin. b$, parce que b étant un arc quelconque, $-\sin. b$ est $= \sin. -b$, & $\text{co-sin.} (-b) = \text{co-sin.} b$. Si on suppose $a = b$, les équations précédentes se changent en celles-ci : $\text{co-sin.} 2a + \sqrt{(-1)} \cdot \sin. 2a =$
 $\frac{[\text{co-sin.} a + \sqrt{(-1)} \cdot \sin. a]^2}{r}$, $\text{co-sin.} 2a - \sqrt{(-1)} \times$

$\sin. 2a = \frac{[\text{co-sin.} a - \sqrt{(-1)} \cdot \sin. a]^2}{r}$. Ajoutant ces deux dernières équations, retranchant ensuite la seconde de la première, & divisant par 2 on a les deux équations suivantes : $\text{co-sin.} 2a =$
 $\frac{[\text{co-sin.} a + \sqrt{(-1)} \sin. a]^2 + [\text{co-sin.} a - \sqrt{(-1)} \cdot \sin. a]^2}{2 \cdot r}$.

$$\sqrt{(-1)} \cdot \sin. 2a = \frac{[\text{co-sin.} a + \sqrt{(-1)} \cdot \sin. a]^2 - [\text{co-sin.} a - \sqrt{(-1)} \cdot \sin. a]^2}{2 \cdot r}.$$

Si avant d'ajouter & de retrancher ces équations on en prend les racines quarrées, on trouvera les deux équations suivantes : $\text{co-sin.} a =$
 $\frac{[\text{co-sin.} 2a + \sqrt{(-1)} \cdot \sin. 2a]^{\frac{1}{2}} + [\text{co-sin.} 2a - \sqrt{(-1)} \cdot \sin. 2a]^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot r^{\frac{1}{2}}}$,

$$\sqrt{(-1)} \cdot \sin. a = \frac{[\text{co-sin.} 2a + \sqrt{(-1)} \cdot \sin. 2a]^{\frac{1}{2}} - [\text{co-sin.} 2a - \sqrt{(-1)} \cdot \sin. 2a]^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot r^{\frac{1}{2}}}.$$

Ajoutant un troisième arc d aux arcs a & b , il est visible par les équations M & P, que $\text{co-sin.} (a+b+d) + \sqrt{(-1)} [\sin. (a+b+d)] =$
 $\frac{[\text{co-sin.} (a+b) + \sqrt{(-1)} \cdot \sin. (a+b)] \cdot [\text{co-sin.} d + \sqrt{(-1)} \cdot \sin. d]}{r}$.

$$\text{co-sin. } (a+b+d) - \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } (a+b+d)} =$$

$$[\text{co-sin. } (a+b) - \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } (a+b)}] \cdot [\text{co-sin. } d - \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } d}]$$

Substituant les valeurs de $\text{co-sin. } (a+b) + \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } (a+b)}$, & de $\text{co-sin. } (a+b) - \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } (a+b)}$ que donnent les équations M & P, on aura $[(\text{co-sin. } a + \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } a) \times (\text{co-sin. } b + \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } b) (\text{co-sin. } d + \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } d)] : r^2 = \text{co-sin. } (a+b+d) + \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } (a+b+d)$, & $[(\text{co-sin. } a - \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } a) (\text{co-sin. } b - \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } b) \times (\text{co-sin. } d - \sqrt{-1} \cdot \text{sin. } d)] : r^2 = \text{co-sin. } (a+b+d) - \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } (a+b+d)}$. Supposant $a = b = d$, ajoutant la dernière équation à la première, l'en retranchant ensuite, transposant & divisant par 2, l'on aura les deux équations suivantes :

$$\text{co-sin. } 3a =$$

$$\frac{[\text{co-sin. } a + \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } a}]^3 + [\text{co-sin. } a - \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } a}]^3}{2 \cdot r^2}$$

$$\sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } 3a =}$$

$$\frac{[\text{co-sin. } a + \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } a}]^3 - [\text{co-sin. } a - \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } a}]^3}{2 \cdot r^2}$$

Si avant d'ajouter & de retrancher ces équations on prend la racine cubique des deux membres, nous aurons $\text{co-sin. } a =$

$$\frac{[\text{co-sin. } 3a + \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } 3a}]^{\frac{1}{3}} + [\text{co-sin. } 3a - \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } 3a}]^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot r^{\frac{2}{3}}}$$

$$\sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } a =}$$

$$\frac{[\text{co-sin. } 3a + \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } 3a}]^{\frac{1}{3}} - [\text{co-sin. } 3a - \sqrt{(-1) \cdot \text{sin. } 3a}]^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot r^{\frac{2}{3}}}$$

En général l'analogie fait assez voir qu'on aura,

ayant attention de diviser la formule du sinus par $\sqrt{(-1)}$, les formules suivantes : $\text{co-sin. } na =$

$$\frac{[\text{co-sin. } a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } a]^n + [\text{co-sin. } a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } a]^n}{2 \cdot r^{n-1}},$$

$\text{sin. } na =$

$$\frac{[\text{co-sin. } a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } a]^n - [\text{co-sin. } a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin. } a]^n}{2 \cdot r^{n-1} \sqrt{(-1)}}.$$

De ces formules on déduira aisément par le Binome de *Newton*, celles dont nous avons parlé ci-dessus, mais elles se trouveront divisées par r^{n-1} ; de sorte qu'en supposant $\text{co-sin. } a = p$, $\text{sin. } a = b$, l'on aura les formules suivantes :

$$\text{sin. } na = \left[\frac{n}{1} p^{n-1} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^{n-5} b^5 - \&c. \right] : r^{n-1},$$

$$\& \text{ co-sin. } na = \left[p^n - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^{n-4} b^4 - \&c. \right] : r^{n-1}.$$

Si l'on suppose l'arc a infiniment petit, son sinus se confondra avec cet arc, & son co-sinus sera $= r$, & pour que l'arc $n \cdot a$ soit d'une grandeur finie, il faudra supposer n infiniment grand, & alors les produits $n \cdot (n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, &c. se réduiront aux puissances seconde, troisième, &c. de n selon le nombre des facteurs de ces produits: car dans cette supposition $n-1 = n$, $n-2 = n$, &c. Faisant donc l'arc fini $n \cdot a = d$, on aura $\frac{d}{n} = a = \text{sin. } a$, $\frac{d^2}{n^2} = (\text{sin.})^2 a = b^2$ (en

supposant $\sin. a = b$, $\frac{d^3}{n^3} = b^3$, &c. & $\cos. a = 1$
 $= p$, ainsi toutes les puissances de $p = \cos. a$
 seront $=$ à l'unité. Substituant ces valeurs dans
 les formules ci-dessus & supposant $r = 1$, l'on a
 les formules suivantes :

$$\sin. na = \sin. d = d - \frac{d^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{d^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \&c.$$

$$\cos. na = \cos. d = 1 - \frac{d^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{d^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \&c.$$

177. COROLLAIRE. Puisque r étant $= 1$,
 on a $\tan. a = \frac{\sin. a}{\cos. a}$, il suit des deux for-
 mules précédentes qu'on aura $\tan. na = \tan. d$

$$= \frac{d - \frac{d^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \&c.}{1 - \frac{d^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.}$$

178. REMARQUE. Parce que (133) $\sin = \frac{\tan \times \cos}{r}$
 $= \frac{r \cdot \cos}{r}$, en faisant $\tan = r$, on aura $\cos. a = p =$
 $\frac{\sin. a \cdot r}{r} = \frac{br}{r}$. Substituant cette valeur de p dans les formules
 ci-dessus (176), faisant une équation fractionnaire telle que
 le premier membre soit $\frac{\sin. na}{\cos. na} = \tan. na$, & que le

second membre ait pour numérateur la valeur de $\sin. n a$, & pour dénominateur celle de $\cos. n a$, divisant de plus le numérateur & le dénominateur de cette dernière fraction par b^n & les multipliant par r^n , on aura $\tan. n a =$

$$\left[\frac{n \cdot r^n}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{n-2} t^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r^{n-4} t^4 - \&c. \right] : \left[r^n - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} r^{n-2} t^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^{n-4} t^4 - \&c. \right]$$

Cette expression est composée de la puissance n du Binôme $r + t$, mais dont le numérateur est composé des termes de rang pair & multiplié par le rayon, le dénominateur contenant les termes de rang impair : les termes du numérateur & du dénominateur ayant alternativement les signes $+$ & $-$.

REMARQUE I. En faisant $r = 1$, cette formule deviendrait plus simple.

REMARQUE II. De la formule $\cos. n a = p^n - \&c.$, trouvée ci-dessus (176), on déduit facilement la sécante de $n a$ qu'on peut exprimer ainsi :

$$\sec. n a = \frac{r^{n+1}}{p^n - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} b^2 + \&c.}, \text{ parce que}$$

les triangles $c b d$, $c a n$ (fig. 108), en supposant l'arc $a b = n \cdot a$, donnent $c d : c b :: c a : c n$, ou $\cos. n a : r :: r :$

$$\sec. n a = \frac{r^2}{\cos. n a}.$$

179. PROBLÈME. Trouver le sinus d'un arc multiple de l'arc a indépendamment de la formule ci-dessus (176). Faisant $r = 1$, $b = a$, $\cos. b = \cos. a = q$, si dans la formule $\sin. (a + b) = \sin. a \cos. b + \sin. b \cos. a$, on suppose

Suppose b successivement $= a, 2a, 3a, \&c.$ on aura

$$\text{Sin. } a = \sqrt{(1 - q^2)}^*$$

$$\text{Sin. } 2a = 2q \sqrt{(1 - q^2)}$$

$$\text{Sin. } 3a = (4q^2 - 1) \sqrt{(1 - q^2)}$$

$$\text{Sin. } 4a = (8q^3 - 4q) \sqrt{(1 - q^2)}$$

$$\text{Sin. } 5a = (16q^4 - 12q^2 + 1) \sqrt{(1 - q^2)}$$

$$\text{Sin. } 6a = (32q^5 - 32q^3 + 6q) \sqrt{(1 - q^2)}$$

$$\text{Sin. } 7a = (64q^6 - 80q^4 + 24q^2 - 1) \sqrt{(1 - q^2)}$$

$$\text{En général sin. } na = \left(2^{n-1} q^{n-1} - (n-2) \cdot 2^{n-3} q^{n-3} \right. \\ \left. + \frac{(n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2} 2^{n-5} q^{n-5} - \&c. \right) \sqrt{(1 - q^2)}.$$

En supposant sin. $a = p$, on trouvera

$$\text{Sin. } a = p$$

$$\text{Sin. } 2a = 2p \sqrt{(1 - p^2)}$$

$$\text{Sin. } 3a = 3p - 4p^3$$

$$\text{Sin. } 4a = (4p - 8p^3) \sqrt{(1 - p^2)}$$

$$\text{Sin. } 5a = 5p - 20p^3 + 16p^5$$

$$\text{Sin. } 6a = (6p - 32p^3 + 32p^5) \sqrt{(1 - p^2)}$$

$$\text{Sin. } 7a = 7p - 56p^3 + 112p^5 - 64p^7$$

$$\text{Sin. } 8a = \&c.$$

Pour trouver chacune des tables précédentes, il n'y a qu'à supposer le dernier sinus trouvé $= \text{sin. } b$, tandis que le sinus & le co-sinus de a seront toujours désignés par p & q , faisant attention que sinus de $a = \sqrt{(1 - q^2)}$, & co-sin. $a = \sqrt{(1 - p^2)}$, & chercher le sinus de $a + b$ par la formule sin. $(a + b) = \text{sin. } a \cdot \text{co-sin. } b + \text{sin. } b \cdot \text{co-sin. } a$. On suppose $r = 1$.

* Car le carré 1 du rayon étant égal au carré du sinus plus le carré du co-sinus q , on a le carré du sinus $= 1 - q^2$, & sinus $= \sqrt{(1 - q^2)}$.

180. PROBLEME. Trouver les co-sinus des arcs multipliés indépendamment de la formule ci-dessus (176). Si dans la formule $\text{co-sin. } (a + b) = \text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b - \text{sin. } a \cdot \text{sin. } b$, on fait successivement $b = a, 2a, 3a$ &c. on aura

$$\text{Co-sin. } a = q$$

$$\text{Co-sin. } 2a = 2q^2 - 1$$

$$\text{Co-sin. } 3a = 4q^3 - 3q$$

$$\text{Co-sin. } 4a = 8q^4 - 8q^2 + 1$$

$$\text{Co-sin. } 5a = 16q^5 - 20q^3 + 5q$$

En général, en exprimant le rayon, on a $r^{n-1} \text{co-sin. } na =$

$$2^{n-1} q^n - \frac{n}{1} r^2 \cdot 2^{n-3} q^{n-2} + \frac{n \cdot (n-3)}{1 \cdot 2} r^4 \cdot 2^{n-5} q^{n-4} - \&c.$$

On peut aussi exprimer les co-sinus des arcs multipliés par la table suivante.

$$\text{Co-sin. } a = \sqrt{1 - p^2}$$

$$\text{Co-sin. } 2a = -2p^2 + 1$$

$$\text{Co-sin. } 3a = (-4p^2 + 1) \sqrt{1 - p^2}$$

$$\text{Co-sin. } 4a = 8p^4 - 8p^2 + 1$$

$$\text{Co-sin. } 5a = (16p^4 - 12p^2 + 1) \sqrt{1 - p^2}$$

$$\text{Co-sin. } 6a = -32p^6 + 48p^4 - 18p^2 + 1$$

$$\text{Co-sin. } 7a = \&c.$$

Pour que les Comménçans puissent mieux concevoir la formation des tables des Problèmes précédens, nous allons démontrer quelques-unes des équations des deux premières tables. La première $\text{sin. } a = \sqrt{1 - q^2}$ est évidente (note du n° 179). La seconde se tire facilement de la formule $\text{sin. } (a + b) = \text{sin. } a \cdot \text{co-sin. } b + \text{sin. } b \cdot \text{co-sin. } a = 2pq$ (en supposant $a = b$) $= 2q \sqrt{1 - q^2}$. La troisième se tire de la même formule en faisant $b = 2a$; car alors le second membre de cette formule devient $\text{sin. } a \text{co-sin. } 2a + \text{sin. } 2a \cdot \text{co-sin. } a = p \cdot \text{co-sin. } 2a + 2p \cdot q^2$. Or $\text{co-sin. } 2a = \sqrt{1 - (\text{sin. } 2a)^2} = \sqrt{1 - 4p^2 q^2} = \sqrt{1 - 4p^2 + 4p^4} = 1 - 2p^2$, parce que $q^2 = 1 - p^2$. Substituant maintenant la valeur de q^2 dans $2pq^2$, on aura

sin. $3a = 3p - 4p^3$, troisième équation de la seconde table. On peut de celle-ci tirer sa correspondante dans la première table, en substituant pour p la valeur $\sqrt{1 - q^2}$ & réduisant. On peut voir par-là comment il faut s'y prendre pour trouver les autres équations de ces mêmes tables, aussi bien que les équations des tables du dernier problème.

181. PROBLÈME. *Exprimer les puissances des sinus & co-sinus d'un arc a par les sinus & co-sinus de cet arc ou de ses multiples.* Il est visible que les termes de rang impair de la seconde table de l'avant-dernier Problème donnent des puissances impaires de p , & les termes de rang pair de la seconde table du dernier Problème donnent des puissances paires de p . Maintenant on aura sin. $a = p$; & de l'équation $2p^2 + 1 = \text{co-sin. } 2a$, on tirera $2p^2 = 1 - \text{co-sin. } 2a$. Passant à la seconde table de l'avant-dernier Problème, de l'équation sin. $3a = 3p - 4p^3$, on tire $4p^3 = 3p - \text{sin. } 3a$. Revenant à la seconde table du dernier Problème, l'équation co-sin. $4a = 8p^4 - 8p^2 + 1$ donne $8p^4 = \text{co-sin. } 4a - 4 \text{ co-sin. } 2a + 3$, (en substituant la valeur de $8p^2$ prise de la seconde équation de la seconde table du même Problème, & réduisant): en suivant ce procédé on formera la table suivante.

$$\text{Sin. } a = \text{sin. } a = p$$

$$2p^2 = 1 - \text{co-sin. } 2a$$

$$4p^3 = 3p - \text{sin. } 3a$$

$$8p^4 = 3 - 4 \text{ co-sin. } 2a + \text{co-sin. } 4a$$

$$16p^5 = 10p - 5 \text{ sin. } 3a + \text{sin. } 5a$$

$$32p^6 = 10 - 15 \text{ co-sin. } 2a + 6 \text{ co-sin. } 4a - \text{co-sin. } 6a$$

$$64p^7 = 35 \text{ sin. } a - 21 \text{ sin. } 3a + 7 \text{ sin. } 5a - \text{sin. } 7a$$

$$128p^8 = \&c.$$

Il est visible que les puissances impaires de $p = \text{sin. } a$ sont exprimées en sinus d'arcs multipliés, tandis que les puissances paires de p sont exprimées en co-sinus d'arcs multiples. De plus la loi des coefficients numériques est la même que celle du binôme de Newton, excepté que dans les puissances paires

* Voyez la seconde équation de la seconde table du dernier Problème.

le nombre abstrait qui forme le premier terme du second membre de l'équation, n'est que la moitié de celui de même rang que donne le Binome. *Par exemple*, dans la quatrième équation, en commençant par le dernier terme, l'on a $\text{co-sin. } 4a - 4 \text{ co-sin. } 2a + 3 = 8p^4$, on voit que 3 est la moitié de 6, coefficient numérique du troisième terme du binome $a + b$ élevé à la quatrième puissance. Cela posé il est visible qu'on a besoin de deux formules, selon que l'exposant de p est pair ou impair; ainsi nous aurons $2^{n-1} p^n =$

$$2^{n-1} (\text{sin. } a)^n = \pm \text{sin. } n a \mp n \text{sin. } (n-2) \cdot a \pm \frac{n \cdot (n-1)}{2} \times \\ \text{sin. } (n-4) \cdot a \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \text{sin. } (n-6) \cdot a \\ \dots \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \&c.}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \&c.} \cdot \text{sin. } a, n \text{ étant}$$

un nombre impair. On a renversé l'ordre des termes de la table par rapport au second membre de l'équation. Mais si n étoit un nombre pair, on auroit $2^{n-1} p^n =$

$$\pm \text{co-sin. } n a \mp n \text{co-sin. } (n-2) \cdot a \pm \frac{n \cdot (n-1)}{2} \times \\ \text{co-sin. } (n-4) \cdot a \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \text{co-sin. } (n-6) \cdot a \\ \dots \mp \frac{1}{2} \left(\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \&c.} \right) \text{co-sin. } 0 \cdot a^n.$$

Dans la première formule dans laquelle n est un nombre impair, les signes supérieurs auront lieu si $n = 4m + 1$, mais il faudra se servir de signes inférieurs si $n = 4m - 1$, m étant un nombre entier pair ou impair^{**}. Dans la seconde formule dans laquelle n est un nombre pair, on se servira des signes supérieurs si $n = 4m$, m étant un nombre pair ou impair; mais l'on fera usage des signes inférieurs si $n = 2m$, m étant un nombre impair.

* Dans la supposition de $r = 1$, $\text{co-sin. } 0 \cdot a = \text{co-sin. } 0 = 1$.

** En supposant $m = 1$, $4m + 1$ sera $= 5$; or en faisant $n = 5$, on voit par la table que les signes supérieurs doivent avoir lieu; qu'on doit se servir des inférieurs en supposant $m = 2$, & $n = 4m - 1 = 7$.

182. Pour avoir une formule semblable par rapport aux puissances des co-sinus d'un arc, on fera des deux premières tables des problèmes ci-dessus (179) le même usage que nous venons de faire des deux dernières, & l'on formera la table suivante.

$$\begin{aligned}
 q &= \text{co-sin. } a \\
 2 \, q^2 &= 1 + \text{co-sin. } 2a \\
 4 \, q^3 &= 3 \text{ co-sin. } a + \text{co-sin. } 3a \\
 8 \, q^4 &= 3 + 4 \text{ co-sin. } 2a + \text{co-sin. } 4a \\
 16 \, q^5 &= 10 \text{ co-sin. } a + 5 \text{ co-sin. } 3a + \text{co-sin. } 5a \\
 32 \, q^6 &= 10 + 15 \text{ co-sin. } 2a + 6 \text{ co-sin. } 4a + \text{co-sin. } 6a \\
 64 \, q^7 &= 35 \text{ co-sin. } a + \&c.
 \end{aligned}$$

Renversant l'ordre des termes qui sont à la droite du signe d'égalité, on formera la formule suivante, n étant un nombre pair ou impair, $2^{n-1} (\text{co-sin. } a)^n = \text{co-sin. } na + n \text{ co-sin. } (n-2) \cdot a +$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \text{co-sin. } (n-4) \cdot a + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times$$

$$\text{co-sin. } (n-6) \cdot a \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \&c.} \right)$$

$$\times \text{co-sin. } 0 \cdot a, \text{ ou } + \left(\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \&c.}{1 \cdot 2 \&c.} \right) \text{co-sin. } a, \text{ selon}$$

que n est pair ou impair.

REMARQUE. Il seroit facile d'avoir l'expression des tangentes & des co-tangentes de l'arc multiple $n \cdot a$, en se

souvenant que $\text{tang.} = \frac{\text{sin}}{\text{co-sin}}$, & $\text{co-tang.} = \frac{\text{co-sin}}{\text{sin}}$; car on

concleroit facilement que $\text{tang. } na = \frac{\text{sin. } na}{\text{co-sin. } na} = \&c.$ De

même $\text{co-tang. } na = \frac{\text{co-sin. } na}{\text{sin. } na} = \&c.$, ou il faudroit avoir

égard à la nature du nombre n . Pour avoir la formule des co-sécantes, on feroit attention que les triangles semblables $c h m$,

H h 3

cib (fig. 108) donnent $ci = b d = \sin : r :: r : \text{co-féc} = \frac{r^2}{\sin} =$

$\frac{1}{\sin}$, en faisant $r = 1$; donc $\text{co-féc. } na = \frac{1}{\sin. na} = \&c.$ Et

de même on aurait $\text{co-tang. } na = \frac{1}{\text{tang. } na}$

$$1 - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} i^2 + \&c.$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^3 + \&c. *$$

183. PROBLÈME. Exprimer en puissances des sinus ou co-sinus de l'arc simple le sinus ou le co-sinus de l'arc multiple. Si n est pair, la seconde table du Problème ci-dessus (179)

donne, en supposant n pair, $\sin. na = \left(\mp 2^{n-1} p^{n-1} \pm \right.$

$$(n-2) \cdot 2^{n-3} p^{n-3} \mp \frac{(n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2} (2)^{n-5} p^{n-5} \dots$$

$\left. + np \right) \sqrt{(1-p^2)}$. Le signe supérieur a lieu lorsque $n = 4m$, m étant un nombre pair, mais on se servira du signe inférieur si m est impair. Si n est un nombre impair, on aura

$$\sin. na = \mp 2^{n-1} p^n \pm n \cdot 2^{n-3} p^{n-2} \mp \frac{n \cdot (n-3)}{1 \cdot 2}$$

$\times (2^{n-5} p^{n-4} \pm \&c.$ Le signe supérieur a lieu si $n = 4m-1$, & l'inférieur si $n = 4m+1$, m étant pair ou impair.

La première table du Problème ci-dessus (180) donne, en supposant n un nombre impair, $\pm \text{co-sin. } na = nq -$

$$\frac{n \cdot (n^2-1)}{2 \cdot 3} q^3 + \frac{n \cdot (n^2-1) \cdot (n^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q^5 - \&c. **.$$

* C'est le quotient de 1 divisé par la formule de la tangente (178) en faisant $r = 1$.

** Si, par exemple, $m = 1$, & $n = 3 = 4m-1$, on aura $\text{co-sin. } 3a = 3q - 4q^3$, ou $+\text{co-sin. } 3a = 4q^3 - 3q$; les autres termes de la série étant $= 0$, ce qui est facile

si n est un nombre pair, l'on aura $\pm \text{co-sin. } na = 1 - \frac{n^2}{1 \cdot 2} q^2 + \frac{n^2 \cdot (n^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} q^4 - \frac{n^2 \cdot (n^2 - 4) \cdot (n^2 - 16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} q^6 + \&c.$

Le signe supérieur a lieu pour le premier membre de l'équation dans cette dernière formule du co-sinus, si $n = 4m$, m étant un nombre pair ou impair tel que 8, *par exemple*. On se servira du signe $-$ si $n = 2m$, m étant impair. Mais dans la première formule du co-sinus, on fera usage du signe $+$ si $n = 4m + 1$, & du signe $-$, si $n = 4m - 1$, m étant un nombre pair ou impair.

184. COROLLAIRE. Si l'on suppose $\text{sin. } a = x$, $\text{sin. } 3a = b$, $n = 3$, l'on aura par la seconde formule du Problème, l'équation $4x^3 - 3x + b = 0$, équation qui est dans le cas irréductible, b étant plus petit que $1 = r$; & les trois racines de cette équation sont $\text{sin. } \frac{a}{3}$, $\text{sin. } \frac{a+m}{3}$, $\text{sin. } \frac{a+2m}{3}$, m désignant la circonférence du cercle; car les sinus de a , $a+m$, $a+2m$ sont égaux. Si b avoit le signe $-$; la troisième formule donneroit la même équation avec cette différence que b auroit le signe $-$, & les racines seroient dans ce cas $\text{co-sin. } \frac{a}{3}$, $\text{co-sin. } \frac{m+a}{3}$, $\text{co-sin. } \frac{2m+a}{3}$; car $\text{co-sin. } a$, $\text{co-sin. } (m+a)$, $(\text{co-sin. } (2m+a))$ sont des quantités égales, & de plus la somme de ces racines est $= 0$, ce qui n'est pas surprenant, parce que toutes n'ont pas le même signe. Si *par exemple* l'arc a est de 90° , les trois racines seront, en supposant $r = 1$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, -1 dont la somme $= 0$.

De-là on peut tirer une méthode pour résoudre toute équation du troisième degré dans le cas irréductible. Soit l'équation $x^3 - dx \pm q = 0$ qu'on suppose dans le cas irréductible, la comparant avec notre équation $4x^3 - 3x \pm b = 0$, ou (divisant par 4 & exprimant le rayon) $x^3 - \frac{3r^2x}{4} \pm \frac{r^2b}{4} = 0$, nous aurons $\frac{3r^2}{4} = d$; $\frac{br^2}{4} = q$. De la première des deux

à comprendre en faisant attention que $n^2 - 9$ est alors $= 0$, ce qui rend le troisième terme $= 0$. D'ailleurs l'exposant de q ne peut pas être plus grand que n .

dernières équations on tire $r^2 = \frac{4d}{3}$, ou $r = \sqrt{\left(\frac{4d}{3}\right)}$, de la seconde en substituant la valeur de r^2 , ou de r^2 si l'on ne veut pas introduire r , on tire $b = \frac{3q}{d}$. Faisant r (rayon de

l'équation) ou 1 (si r n'est pas exprimé) : b ou $\sqrt{\left(\frac{4d}{3}\right)}$:

$\frac{3q}{d}$:: R (rayon des tables) : $\frac{3Rq}{d\sqrt{\left(\frac{4d}{3}\right)}}$, ce quatrième terme

étant cherché dans les tables donnera le sinus d'un arc a si b est positif, ou son co-sinus si b est négatif, & les racines seront

telles que nous venons de le voir, c'est-à-dire, $x = \sin. \frac{a}{3}$,

$x = \sin. \frac{m+a}{3}$ &c., ou $x = \text{co-sin. } \frac{a}{3}$, $x = \&c.$

185. PROBLÈME. Couper la circonférence d'un cercle en un nombre $2n$ de parties égales par des lignes tirées d'un point m situé sur le diamètre du cercle, mais hors du centre. Avant de résoudre ce Problème, qui renferme le célèbre Théorème de M. Cotes, nous allons établir deux Lemmes.

LEMME I. Soit l'arc $ab = a$ (fig. 129), son co-sinus $sp = \frac{x}{2}$, $sm = z$, je dis que $bm = z^2 - xz + r^2$, en faisant $sa = sg = r$. Car $(bp)^2 = (sb)^2 - (sp)^2 = r^2 - \frac{x^2}{4}$, & $(bm)^2 = (bp)^2 + (pm)^2$, à cause du triangle

rectangle m ; or $pm = \frac{x}{2} - z$ ou $pm = z - \frac{x}{2}$, selon

que le point m tombe de différens côtés de bp par rapport au centre s : mais dans l'un & l'autre cas $(pm)^2 = z^2 - zx + \frac{x^2}{4}$. Cette quantité étant ajoutée à $(bp)^2 = r^2 - \frac{x^2}{4}$ donne $(bm)^2 = z^2 - zx + r^2$.

LEMME II. Si dans la formule ci-dessus (180) $r = 1$ & $\text{co-sin. } na = z^{n-1} q^n - \frac{n}{2} z^{n-2} q^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2} z^{n-3} q^{n-2} - \dots$

$\times r^4 2^{n-5} \cdot q^{n-4} - \&c.$ on multiplie les deux membres par 2, qu'on fasse $x = 2q$, ou $q = \frac{x}{2}$ & $\text{co-sin. } n a = c$, il est

évident qu'on aura $x^n = n r^2 x^{n-2} + \frac{n \cdot (n-3)}{1 \cdot 2} r^4 x^{n-4} - \frac{n \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^6 x^{n-6} \&c. = 2c \cdot r^{n-1}$.

Si on suppose successivement $n = 0, 1, 2, 3, \&c.$ on aura $2 \cdot \text{co-sin. } (0 \cdot a) = 2r$. On aura encore

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot \text{co-sin. } 1 \cdot a = x \\ 2 \cdot \text{co-sin. } 2 \cdot a = x^2 - 2r^2 \\ 2 \cdot \text{co-sin. } 3 \cdot a = x^3 - 3r^2 x^* \\ \&c. \end{array} \right\} = 2c \cdot r^{n-1},$$

x étant le double co-sinus de l'arc simple. Si dans les équations que nous venons de trouver, on fait $x = z + \frac{r^2}{z}$,

on aura pour le double co-sinus de $0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \&c.$ ces autres valeurs $2r, z + \frac{r^2}{z}, z^2 + \frac{r^4}{z^2}, z^3 + \frac{r^6}{z^3}, \&c.$ En

général $z^n + \frac{r^{2n}}{z^n} = 2c \cdot r^{n-1}$, ou faisant disparaître la

fraction & transposant, $z^{2n} - 2c r^{n-1} z^n + r^{2n} = 0$. Mais

cette équation a pour racines les doubles co-sinus de $a, a + \frac{2m}{n}, a + \frac{4m}{n}, a + \frac{6m}{n}, \&c.$ m désignant la demi-circon-

férence du cercle, & a l'arc dont le double co-sinus $= 2c$.

Mais le double co-sinus de a est $= x$ (par supposition), & désignant par $x', x'', x''', \&c.$ les doubles co-sinus de $a + \frac{2m}{n}, a + \frac{4m}{n}, \&c.$ on aura $z + \frac{r^2}{z} = x, z + \frac{r^2}{z} = x',$

$\&c.$ pour les facteurs de l'équation trouvée; or ces facteurs

doivent être chacun $= 0$, ce qui donne $z + \frac{r^2}{z} - x = 0,$

* L'équation du double co-sinus de $0 \cdot a$, c'est-à-dire, $2 \cdot \text{co-sin. } (0 \cdot a) = 2r$ est évidente. Les autres peuvent se déduire de la formule, ou de la première table du n° (189), pourvu qu'on forme cette table en exprimant le rayon r .

d'où l'on tire $z^2 - zx + r^2 = 0$ &c. ; donc l'équation précédente est composée d'un nombre n de trinomes $z^2 - zx + r^2$, $z^2 - zx' + r^2$, $z^2 - zx'' + r^2$, &c. *. Venons maintenant à la solution du Problème.

Il suit de ce que nous venons de dire, que l'équation $z^{2n} - 2cr^{n-1}z^n + r^{2n} = 0$ est le produit de tous les quarrés $(bm)^2$, $(cm)^2$, &c. ; donc si on suppose $c = -r$, hypothèse qui renferme que la demi-circonférence est divisée en un nombre n de parties égales, & par conséquent la circonférence en un nombre $2n$ des mêmes parties, les x , x' , x'' , &c. donneront les doubles co-sinus des arcs a , $3a$, $5a$, &c. ; puisque dans ce cas $\frac{m}{n} = a$. Donc les produits $z^2 - xz + r^2$, $z^2 - x'z + r^2$, &c. dénotent les quarrés des droites paires cm , mf , &c. Si l'on extrait la racine quarrée de $z^{2n} - 2cr^{n-1}z^n + r^{2n}$ en faisant $c = r$, on aura $z^n - r^n = mc \times mf$, &c. En effet, dans la supposition de $c = r$, supposition qui désigne que la circonférence entière est divisée en un nombre n de parties égales, l'arc est $= 0$, & son co-sinus est évidemment égal au rayon, ou $= +r$, & l'on a la racine que nous venons de trouver ; mais dans la supposition de $c = -r$, c'est-à-dire, dans la supposition de c négatif, on a $z^{2n} + 2r^n z^n + r^{2n} = 0$, dont la racine est $z^n + r^n = mb \times md$, &c. c'est-à-dire, que cette racine dénote le produit des droites impaires mb , md , &c. ; donc $(z^n - r^n) \times (z^n + r^n) = z^{2n} - r^{2n} = mc \times mf \times mb \times md$, &c. ** équation qui renferme la solution du Problème, & le célèbre Théorème de M. Cotes.

* Ainsi cette équation est résoluble en un nombre n de trinomes.

** Cette équation est évidemment résoluble en $2n$ facteurs ; puisque les racines sont au nombre de $2n$; & parce que l'équation $z^{2n} \mp 2r^n z^n + r^{2n} = 0$, est composée d'un nombre n de facteurs trinomes, elle est résoluble en un nombre n de ces facteurs. De plus parce que les racines réelles d'une équation donnent chacune un facteur simple réel, les racines imaginaires se trouvant toujours en nombre pair dans une

186. REMARQUE. La circonférence étant divisée en un nombre $2n$ de parties égales, chacun des facteurs $z^n - r^n$, $z^n + r^n$, représente toutes les droites paires, ou toutes les droites impaires : car il ne peut représenter à la fois les unes & les autres, puisque chacun n'a qu'un nombre n de dimensions. Mais le facteur $z^n - r^n$, qui répond à la supposition de $c = +r$, doit évidemment représenter la droite qui répond à l'arc $0 \cdot a = 0$, ou ma , & comme il ne peut représenter deux droites de suite ; il ne peut représenter mb . Si on suppose $n = 5$, il est visible que le facteur $z^n + r^n$ doit représenter la droite mg qui répond à $c = -r$. Donc il ne peut représenter ma ; donc, &c.

Trigonométrie Sphérique.

187. Si un angle solide C (fig. 130) est formé par trois angles plans ACB, ACD, BCD (que nous appellerons *côtés* de l'angle solide) ; ces angles auront pour mesure les arcs AB, AD, BD décrits entre leurs côtés du point C comme centre ; & si nous supposons que ces arcs sont décrits avec le même rayon, le point C pourra être regardé comme le centre d'une sphère ; ces arcs seront des parties de trois grands cercles de la sphère : & formeront un triangle BAD qu'on nomme *triangle sphérique*. La trigonométrie *sphérique* s'occupe de la résolution de ces sortes de triangles comme la trigonométrie *plane*, ou *rectiligne* (c'est celle dont nous avons déjà parlé sous le nom de trigonométrie) traite des triangles rectilignes, c'est-à-dire, des triangles dont tous les côtés sont des lignes droites. Pour mesurer un angle sphérique, tel que l'angle B ; par exemple, il suffit de trouver la mesure de l'angle formé par les deux plans ACB, DCB qui, en se joignant dans la ligne BC, forment cet angle ; mais, selon ce qu'on a dit ci-dessus (n.º 83.), un tel angle est égal à celui que formeroient deux perpendiculaires menées à la ligne BC par un même point B, par exemple,

équation, & telles que leur produit deux à deux est un facteur rationnel du second degré, il s'ensuit que toute équation rationnelle est résoluble en facteurs réels, simples ou doubles, ou en partie simples & en partie doubles.

l'une dans le plan DCB , l'autre dans le plan ABC . Mais ces lignes étant perpendiculaires au rayon commun BC des arcs BA & BD seroient évidemment des tangentes de ces arcs ; donc en général un angle sphérique quelconque formé par deux arcs de grands cercles sur la surface d'une sphere est égal à celui que forment entr'elles les tangentes de ces arcs menées au point où ils se rencontrent.

188. Un triangle sphérique ABD n'est autre chose qu'une partie d'une surface sphérique terminée par trois arcs de grands cercles de cette sphere AB , AD , BD , qui sont les côtés de ce triangle, dont les angles A , B , D sont les mêmes que ceux que formeroient les tangentes de ces arcs, menées aux points A , B , D .

Les angles plans ACB , ACD , BCD , qui sont les côtés de l'angle solide C , ont pour mesure les arcs AB , AD , BD qui forment le triangle sphérique ABD . Et si l'on exprime les côtés & les angles d'un triangle sphérique par degrés, minutes, secondes, tierces, &c., ces nombres seront les mesures des côtés & des angles de l'angle solide $ACBD$.

189. On peut facilement concevoir la construction d'un angle solide de trois côtés, & d'un triangle sphérique de la manière suivante. On prendra pour base un secteur de cercle ACD (fig. 131), & l'on menera par son centre une ligne CE perpendiculaire, ou inclinée au plan du secteur. On décrira ensuite du centre C & dans le plan ACE un arc AE qui terminera le secteur ACE , on décrira de même avec le rayon $DC = AC$ l'arc ED qui terminera le secteur ECD . Le secteur ACD qu'on prend pour base étant supposé plus petit qu'un demi-cercle, son supplément à 360 degrés sera plus grand qu'un demi-cercle ; & l'angle qui sera opposé à ce supplément, sera le supplément de l'angle AED . Mais celui-ci vaut moins de deux angles droits, puisque, si l'on conçoit le plan du secteur ACE prolongé, les plans AED , ACE formeront deux angles de suite, qui ne vaudront que deux angles droits ; donc si un angle AED vaut moins de deux angles droits, le côté opposé vaudra moins de 180° , & le côté opposé au supplément de cet angle, c'est-à-dire, le côté opposé à un angle saillant ou extérieur & supplément à 360° de l'angle AED , vaut plus de 180° . Mais dans la trigonométrie sphérique on ne considère pas ces sortes d'angles, ni les côtés qui leur sont opposés ; ainsi dans la suite il ne sera question que des triangles

dont tous les angles & les côtés sont moindres que 180° . Au reste si un des angles du triangle est droit, le triangle sphérique est appelé *rectangle*, le côté opposé à l'angle droit prend le nom d'*hypothénuse*, l'on nomme *base* l'un des autres côtés, & le troisième s'appelle *la perpendiculaire*. Si aucun des angles n'est droit, le triangle sphérique se nomme *obliquangle*.

Dans la suite lorsqu'il sera question d'un triangle sphérique rectangle, nous désignerons sa base par B ou *b*, le côté perpendiculaire par P ou *p*, l'hypothénuse par H ou *h*, l'angle droit par R ou *r*, l'angle compris entre l'hypothénuse & la base, & opposé à la perpendiculaire par M ou *m*, & enfin l'angle opposé à la base, & formé par la rencontre de l'hypothénuse & du côté perpendiculaire, par N ou *n*.

190. THÉOREME. Dans un triangle sphérique rectangle NRM (fig. 132), si l'angle M est plus petit ou plus grand qu'un angle droit, le côté P qui lui est opposé sera plus petit ou plus grand qu'un quart de cercle; & si l'angle M est droit, le côté P sera un quart de cercle. Je fais passer par la ligne CM dans laquelle le plan de l'hypothénuse coupe le plan de la base, un plan MCD perpendiculaire au plan de la base; cela posé, puisque le plan P est perpendiculaire au même plan B, DC commune intersection des plans P & MCD sera perpendiculaire à B (voyez le n° 82). Donc le point D sera éloigné du plan de la base de 90° , en comptant cette distance sur un grand cercle de la sphere dont le point C est supposé le centre; & par conséquent DR & Dr seront des quarts de cercle. Donc le côté NR sera plus petit qu'un quart de cercle, ou égal à un quart de cercle, ou plus grand qu'un quart de cercle, selon que M sera plus petit qu'un angle droit, qu'il sera un angle droit, ou plus grand qu'un angle droit. Car si $M = 90^\circ$, MN tombera sur DM; puisque l'angle DMR est droit, le point D étant éloigné du plan B de 90° degrés. Si $M < 90^\circ$, l'arc MN sera situé entre le plan DCM & la base; donc le point N sera éloigné de B de moins de 90° , mais il sera éloigné de B de plus de 90° si $M > 90^\circ$: parce qu'alors MN sera situé au-delà du plan DCM, c'est-à-dire, sera situé entre ce plan & le prolongement de celui de la base.

COROLLAIRE. En prenant P pour base, B devient le côté perpendiculaire; donc N sera aussi de même espèce que le côté opposé, c'est-à-dire, que l'angle N sera aigu, droit ou obtus, selon que B sera $< 90^\circ$, ou $= 90^\circ$, ou $> 90^\circ$; de sorte

qu'un angle situé sur l'hypothénuse est toujours de la même espèce que le côté opposé, & réciproquement.

191. THÉOREME. Dans un triangle sphérique rectangle si les côtés B & P sont tous les deux plus petits, ou tous les deux plus grands qu'un quart de cercle, l'hypothénuse sera plus petite qu'un quart de cercle; si l'un de deux côtés est plus grand & l'autre plus petit qu'un quart de cercle, l'hypothénuse sera plus grande qu'un quart de cercle. Mais si l'un de deux côtés est un quart de cercle, l'hypothénuse sera aussi un quart de cercle. Dans le plan RMr (fig. 133) sur lequel est située la base, & auquel le plan RAr est perpendiculaire, menons la ligne MC oblique au diamètre Rr^* , à laquelle le plan DAE (qui coupe en AC le plan rAR) doit être perpendiculaire; donc la ligne AC , commune section des plans ADE , RAr perpendiculaires au plan RMr , sera perpendiculaire sur ce dernier plan & sur la ligne rCR située sur RMr ; les angles ACR , ACr seront droits, & les arcs AR & Ar seront des quarts de cercle. Les angles formés par la ligne MC & toutes celles qu'on peut mener par le point C dans le plan DAE , seront droits (82). Donc MCg sera droit, gCM , aussi-bien que NCM , sera $< 90^\circ$; mais MCn sera $> 90^\circ$. D'où il suit que dans un triangle rectangle sphérique NRM , dont les côtés B, P sont plus petits qu'un quart de cercle, l'hypothénuse NM est plus petite que le quart de cercle Gm . De même dans le triangle MrN , dont les côtés Nr , Mr , c'est-à-dire, B & P sont plus grands qu'un quart de cercle, l'hypothénuse MN est plus petite qu'un quart de cercle. Mais dans le triangle sphérique MRn dans lequel nR ou P est plus grand qu'un quart de cercle, tandis que MR ou B est plus petit qu'un quart de cercle, l'hypothénuse Mn sera plus grande que le quart de cercle Mg . De même dans le triangle sphérique rMn , dans lequel nr ou P est plus petit qu'un quart de cercle, & rM ou B plus grand qu'un quart de cercle, l'hypothénuse est plus grande qu'un quart de cercle. Mais si P devient AR, alors l'hypothénuse mesurant l'angle droit ACM , devient un quart de cercle.

COROLLAIRE. De-là il suit réciproquement que l'hypothénuse d'un triangle sphérique étant aiguë, c'est-à-dire, moindre qu'un quart de cercle, les deux côtés P & B seront tous les

* Il faut concevoir que la ligne Rr , dont une partie est ponctuée, passe par le centre C de la sphère,

deux plus grands ou plus petits qu'un quart de cercle, si l'hypothénuse est obtuse ou plus grande qu'un quart de cercle, l'un des côtés sera plus grand & l'autre plus petit qu'un quart de cercle; mais si l'hypothénuse est un quart de cercle, l'un des côtés au moins sera un quart de cercle; car il est visible que B & P peuvent être à la fois des quarts de cercle.

192. REMARQUE. Si l'hypothénuse est moindre qu'un quart de cercle, le triangle sera ou NMR dont les côtés P & B sont moindres qu'un quart de cercle, & dont les angles M & N sont aigus, ou NMr auquel le premier triangle NMR est contigu. Si l'hypothénuse est plus grande qu'un quart de cercle, le triangle sera ou nMR ou nM mais nMr a pour triangle contigu un triangle situé de l'autre côté du plan RAr , dont l'hypothénuse est le supplément de l'hypothénuse Mn , & par conséquent plus petite qu'un quart de cercle, & dont la base est supplément de la base Mr & $= MR$, & par conséquent aussi plus petite qu'un quart de cercle. Mais rn ou le côté perpendiculaire est aussi plus petit qu'un quart de cercle; donc tous les côtés de ce triangle seront plus petit chacun qu'un quart de cercle, & par conséquent les angles situés sur l'hypothénuse seront aigus*. Il y aura aussi sur la base CMR un triangle contigu au triangle nMR , dont l'hypothénuse (située au-dessous de la base) sera le supplément de nM , & dont le côté perpendiculaire (situé aussi au-dessous de la même base) sera supplément de nR . On voit donc qu'un triangle sphérique rectangle, dont l'un des côtés est plus grand qu'un quart de cercle, a un triangle contigu, dont les côtés sont moindres qu'un quart de cercle, dont la base & les angles sur l'hypothénuse sont aigus; or les côtés & l'hypothénuse de ce triangle que nous appellons *contigu*, sont toujours égaux aux côtés & à l'hypothénuse de l'autre où sont leurs suppléments.

193. PROBLÈME. Dans un triangle sphérique-rectangle, dont les côtés soient moindres qu'un quart de cercle, & dont par conséquent les angles sur l'hypothénuse soient aigus, étant don-

* L'espèce de l'hypothénuse détermine l'espèce du triangle. Or l'hypothénuse est plus petite ou plus grande qu'un quart de cercle, ou elle est égale à un quart de cercle. Mais parce qu'on peut regarder l'angle droit comme le plus grand des angles aigus, ou comme le plus petit des angles obtus, on ne distingue que deux espèces de triangles sphériques-rectangles, l'une, dont l'hypothénuse est plus grande qu'un quart de cercle, l'autre, dont l'hypothénuse est moindre qu'un quart de cercle.

nés, ou les deux angles aigus ou les deux côtés, ou un angle aigu & un côté, ou l'hypothénuse avec un angle aigu ou avec un côté, résoudre ce triangle. Ayant pris, au lieu du triangle sphérique, un angle solide de trois côtés $NCMR$ (fig. 134), tel que RM soit perpendiculaire sur MC , & que les plans MNR , NRC soient perpendiculaires sur la base RCM ; NR commune intersection de ces derniers plans sera perpendiculaire à la même base RCM , aussi-bien qu'aux lignes RC , RM situées sur cette base & passant par le point R . Mais la ligne MC située sur le plan $RM C$ perpendiculaire au plan NMR & perpendiculaire à la commune intersection RM de ces plans, est évidemment perpendiculaire au plan NRM aussi bien qu'à la ligne MN . Donc les triangles NRC , RCM , NCM & NRM seront tous rectangles, & l'angle M de l'angle solide sera le même que l'angle M de l'angle plan NMR (83). Supposons maintenant qu'on développe ces triangles sur un plan (fig. 135), & qu'on emploie les mêmes lettres dont on s'est servi dans l'angle solide trilatère; il est visible que les triangles RCM , NCM rectangles en M donnent $CM : MN :: r : \text{tang. } H^*$, & $CM : MR :: r : \text{tang. } B$. Donc $CM : r :: MN : \text{tang. } H$ & $CM : r :: MR : \text{tang. } B$, & partant $MN : MR :: \text{tang. } H : \text{tang. } B$.

Le triangle NRM donne $MN : MR :: r : \text{co-sin. } M$. De cette analogie & de la précédente on peut en tirer cette autre.

I. $r : \text{co-sin. } M :: \text{tang. } H : \text{tang. } B$, ou $r : \text{co-sin. } M :: \text{co-tang. } B : \text{co-tang. } H$; parce que (134) les tangentes sont en raison inverse des co-tangentes.

Mais il est visible qu'on peut changer les dénominations M , N en mettant l'une à la place de l'autre, si l'on appelle B ce qu'on vient d'appeler P , & réciproquement; donc on aura $r : \text{co-sin. } N :: \text{co-tang. } P : \text{co-tang. } H$.

Mais si l'on prend NC (qui se trouve deux fois dans la figure) pour rayon, le triangle $M C N$ donnera $NC : r :: MN : \text{sin. } H$, tandis que le triangle $N C R$ donne $NC : r :: NR : \text{sin. } P$. Donc $MN : NR :: \text{sin. } H : \text{sin. } P$. D'un autre côté le triangle NRM fait voir que $NM : NR :: r : \text{sin. } M$; donc

II. $r : \text{sin. } M :: \text{sin. } H : \text{sin. } P$, & en changeant entr'elles les dénominations M & N , B & P , $r : \text{sin. } N :: \text{sin. } H : \text{sin. } B$.

* H désigne l'angle $M C N$ ou l'arc qui mesure cet angle, ou l'hypothénuse du triangle sphérique correspondant, B désigne la base du même triangle sphérique, ou l'arc qui mesure l'angle $R M C$, & P la perpendiculaire ou le côté perpendiculaire du même triangle sphérique.

Maintenant

Maintenant si l'on prend RC pour rayon, le triangle RCM donnera $RC : r :: RM : \sin. B$; mais par le triangle $NR C^*$, $RC : r :: NR : \tan. P$. Donc $RM : NR :: \sin. B : \tan. P$. D'un autre côté le triangle $NR M$ donne $RM : RN :: r : \tan. M$; c'est pourquoi l'on a cette troisième analogie.

III. $r : \tan. M :: \sin. B : \tan. P$, ou $r : \sin. B :: \tan. M : \tan. P$, ou $r : \sin. B :: \cotan. P : \cotan. M$; & en changeant les dénominations, $r : \sin. P :: \cotan. B : \cotan. N$.

Par la seconde analogie, on a les deux proportions suivantes, $r : \sin. H :: \sin. M : \sin. P$, & $r : \sin. H :: \sin. N : \sin. B$. Donc $\sin. B : \sin. N :: \sin. P : \sin. M$; de cette analogie & de la troisième $r : \sin. B :: \cotan. P : \cotan. M$, on tire aisément, en multipliant par ordre, $r : \sin. N :: \sin. P \times \cotan. P : \sin. M \cdot \cotan. M$. Et parce que (132) $r : \sin :: \cotan : \cosin$, ou $r \cdot \cosin = \sin \cdot \cotan$; si au lieu de $\sin. P \cdot \cotan. P$, & de $\sin. M \cdot \cotan. M$, on écrit respectivement $r \cdot \cosin. P$, $r \cdot \cosin. M$; l'on aura la quatrième analogie suivante.

IV. $r : \sin. N :: \cosin. P : \cosin. M$, & en changeant les dénominations, $r : \sin. M :: \cosin. B : \cosin. N$. Mais par la troisième analogie, $\cotan. M : \cotan. P :: \sin. B : r$, & par l'analogie II, $\sin. M : \sin. P :: r : \sin. H$; donc, en multipliant par ordre, $\sin. M \cdot \cotan. M : \sin. P \cdot \cotan. P :: \sin. B : \sin. H$. Si à la place de $\sin. M \times \cotan. M$ & de $\sin. P \cdot \cotan. P$, on écrit respectivement $r \cdot \cosin. m$, $r \cdot \cosin. P$, il viendra $\cosin. M : \cosin. P :: \sin. B : \sin. H$. Mais l'analogie I donne $r : \cosin. M :: \cotan. B : \cotan. H$; donc, en multipliant encore par ordre, on trouvera $r \cdot \cosin. P :: \sin. B \cdot \cotan. B : \sin. H \times \cotan. H$, & par une substitution semblable à celle dont nous venons de faire usage,

V. $r : \cosin. P :: \cosin. B : \cosin. H$. Mais l'analogie I donne $r : \cosin. M :: \cotan. B : \cotan. H$, proportion que j'appellerai (a). Par l'analogie II, on a la proportion suivante $\sin. M : \sin. P :: r : \sin. H$, proportion que je désignerai par (b). L'analogie III donne $r : \sin. B :: \cotan. P : \cotan. M$, ou $\sin. B : r :: \cotan. M : \cotan. P$, & en changeant les dénominations, $\sin. P : r :: \cotan. N : \cotan. B$. Multipliant par ordre les termes de cette dernière proportion par

* C'est celui dans lequel se trouve la lettre P .

ceux des proportions a & b , il vient $\sin. M : \cos. M :: r \times \cos. N : \sin. H \times \cos. H$. Mais $\sin. \cos. = r \times \cos.$, ou $\cos. M = \frac{\sin. M. \cos. H}{r}$, & $\sin. H \times \cos. H = r. \cos. H$; donc en substituant ces valeurs, on aura

$$VI. r : \cos. M :: \cos. N : \cos. H.$$

194. Les six analogies que nous venons de trouver, & quatre autres dont nous avons besoin, & que nous avons déduites par le changement des dénominations, sont les suivantes

$$I. r : \cos. M :: \cos. B : \cos. H, \\ \text{ou } \cos. M : r :: \cos. H : \cos. B$$

$$II. r : \sin. H :: \sin. M : \sin. P$$

$$III. r : \sin. B :: \cos. P : \cos. M$$

$$IV. r : \sin. N :: \cos. P : \cos. M$$

$$V. r : \cos. B :: \cos. P : \cos. H$$

$$VI. r : \cos. M :: \cos. N : \cos. H$$

$$VII. r : \cos. N :: \cos. P : \cos. H$$

$$VIII. r : \sin. H :: \sin. N : \sin. B$$

$$IX. r : \sin. P :: \cos. B : \cos. N$$

$$X. r : \sin. M :: \cos. B : \cos. N$$

195. Etant donné dans un triangle rectangle, dont les côtés sont plus petits qu'un quart de cercle & les angles sur l'hypothénuse aigus, outre l'angle droit deux autres choses quelconques, c'est-à-dire, ou les côtés ou les angles aigus, ou un angle avec l'hypothénuse, ou un angle & un côté, ou l'hypothénuse & un côté, on trouvera facilement les autres par les analogies précédentes, qu'on peut regarder comme autant de Théorèmes. Supposons, *par exemple*, que dans le triangle rectangle NMR (fig. 133) on connoisse l'angle M , la base B ou le côté adjacent, & qu'on demande l'hypothénuse, la première analogie nous dit que le rayon est au co-sinus de l'angle M , comme la co-tangente du côté qui lui est adjacent est à la co-tangente de l'hypothénuse. Je cherche donc dans les tables le co-sinus de l'angle M , & la co-tangente du côté B ou de l'arc MR , dont le nombre des degrés est connu par supposition; ainsi je connoîtrai les trois premiers termes de la I analogie, & par conséquent je trouverai facilement le quatrième. Si l'on veut employer les logarithmes, on ajou-

tera les logarithmes des moyens, on retranchera le logarithme du rayon, & l'on aura le logarithme de la co-tangente de l'hypothénuse. Ce logarithme étant cherché dans les tables dans la colonne des co-tangentes, fera connoître l'hypothénuse.

196. Si quelque côté du triangle sphérique étoit plus grand qu'un quart de cercle, au lieu de ce triangle on résoudroit le contigu, dont les côtés & les angles sur l'hypothénuse valent moins de 90 degrés (192). Or connoissant les côtés & les angles de ce triangle contigu, il sera très-facile de connoître les angles & les côtés du triangle proposé. Mais, parce que le sinus d'un angle obtus est le même que celui d'un angle aigu qui est son supplément; si ce qu'on cherche est exprimé par un sinus, il faudra tâcher de connoître (par le n° 190) si l'angle ou le côté cherché est plus petit ou plus grand que 90°. S'il s'agit d'un angle obtus, son co-sinus doit avoir le signe — aussi-bien que la tangente & la co-tangente; mais il ne peut y avoir de cas douteux que lorsque M & P sont donnés, ou bien N & B. Supposons les plans de deux demi-cercles M N m, M R m (fig. 135.B) inclinés l'un à l'autre, & qui se coupent dans la ligne M m; si par le centre C de ces demi-cercles on fait passer le plan N C R perpendiculaire au demi-cercle M R m, l'on aura deux triangles sphériques-rectangles M N R, N m R, qui auront chacun un angle droit en R les angles M & m égaux; & le côté N R = P commun. Donc étant donnés M & P, on ne peut pas déterminer B ou H, c'est-à-dire, on ne peut pas savoir si ce qu'on cherche est plus ou moins de 90°. Mais les cas douteux n'ont guère lieu dans la pratique de l'astronomie, où l'on n'emploie dans le calcul des triangles rectangles que des arcs moindres que 90°, parce que quand on a des arcs plus grands, on prend leurs suppléments en les supposant prolongés jusqu'à la demi-circumference. Comme si (dans la fig. 135.B) on avoit à calculer le triangle rectangle m N R, on calculeroit le triangle M N R par le moyen duquel ayant trouvé M N, par exemple, de 60°, on concluroit que N m, supplément de M N, est de 120°.

197. THÉOREME. Si dans un triangle sphérique obtiquangle M T m (fig. 136 & 137) on abaisse du point T le côté ou l'arc T R perpendiculaire au côté opposé M m, ce côté tombera dans l'angle T = M T m, si M & m sont tous les deux aigus ou tous les deux obtus; mais T R tombera hors de l'angle T, si l'un des deux angles M, m est aigu & l'autre obtus. Considérons les trian-

gles rectangles $TM R$ & $Tm R$ qui ont le côté $TR = P$ commun, si M est supposé aigu, & m obtus (fig. 136), le côté P devrait être de même espèce que M (190); & comme il doit aussi être de même espèce que l'angle m qui lui est opposé dans le triangle $Tm R$, il seroit à la fois plus petit & plus grand qu'un quart de cercle, ce qui étant impossible, on doit conclure que M & m sont de même espèce lorsque P tombe dans l'angle T . Si P (fig. 137) tombe hors de l'angle T , & qu'on suppose M aigu aussi bien que $Tm M$, $Tm R$ sera obtus, & P devrait alors être à la fois plus petit & plus grand qu'un quart de cercle; car P doit être de même espèce que M dans le triangle RTM , & de même espèce que $Tm R$ dans le triangle $Tm R$. D'où il suit que M & $Tm R$ sont de même espèce; donc si M est aigu, $Tm M$, supplément de $Tm R$, sera obtus, & réciproquement. Donc P tombera hors de l'angle T , si M & m sont de différente espèce; mais il tombera dans l'angle T , si M & m sont de même espèce.

198 SCHOLIE. Lorsque P tombe dans l'angle T (fig. 136), le triangle obliquangle $M Tm$ résulte de l'addition des triangles rectangles $M T R$, $m T R$; au contraire dans le cas de la fig. 137 ce triangle est la différence des deux triangles rectangles dont on vient de parler. Si dans le triangle rectangle $T R M$ (fig. 136 & 137) nous désignons les côtés, l'hypothénuse & les angles comme ci-dessus par H, B, P, M, N , & que dans l'autre triangle $Tm R$ qui a le côté $T R$, nous désignons les mêmes quantités par h, b, P, m, n (on met P & non pas p , parce que $T R$ est le même pour les deux triangles); dans le premier cas dans lequel M & m sont tous les deux aigus, ou tous les deux obtus, T sera $= N + n$ (fig. 138), & $Mm = B + b$. Mais si M & m sont de différente espèce (fig. 139) l'on aura $T = N - n$, & $Mm = B - b$. Donc on aura toujours $T = N \pm n$, & $Mm = B \pm b$; les signes supérieurs ont lieu si M & m sont de même espèce, mais on emploiera les signes inférieurs si M & m sont d'espèce différente. Il est aisé de voir que N désigne l'angle formé par les arcs H & P .

199. PROBLEME. Trouver des analogies par le moyen desquelles étant données dans un triangle sphérique obliquangle, trois de ces six choses; trois angles & trois côtés, on puisse trouver les autres. Ayant mené le côté TR (fig. 138 & 139) perpendiculairement sur le côté opposé; prolongé s'il le faut

on appliquera à chacun des triangles rectangles rectangles MTR , mTR les analogies trouvées ci dessus. Par l'analogie II l'on aura $R : \sin. H :: \sin. M : \sin. P^*$, & $R : \sin. h :: \sin. m : \sin. P$. Donc $1^\circ R \cdot \sin. P = \sin. H \cdot \sin. M = \sin. h \cdot \sin. m$; donc 2° .

I. $\sin. H : \sin. h :: \sin. m : \sin. M$.

Par l'analogie III l'on a $R : \sin. B :: \text{co-tang. } P : \text{co-tang. } M$, & $R : \sin. b :: \text{co-tang. } P : \text{co-tang. } m$; donc $1^\circ R : \text{co-tang. } P :: \sin. B : \text{co-tang. } M :: \sin. b : \text{co-tang. } m$; donc 2° .

II. $\sin. B : \sin. b :: \text{co-tang. } M : \text{co-tang. } m$.

Par l'analogie IV l'on a $R : \sin. N :: \text{co-sin. } P : \text{co-sin. } M$, & $R : \sin. n :: \text{co-sin. } P : \text{co-sin. } m$; donc $R : \text{co-sin. } P :: \sin. N : \text{co-sin. } M :: \sin. n : \text{co-sin. } m$, & par conséquent

III. $\sin. N : \sin. n :: \text{co-sin. } M : \text{co-sin. } m$.

Donc *componendo*, $(\sin. N + \sin. n) : (\text{co-sin. } M + \text{co-sin. } m) :: \sin. N : \sin. n$, & *dividendo* $(\sin. N - \sin. n) : (\text{co-sin. } M - \text{co-sin. } m) :: \sin. N : \sin. n$; & partant $(\sin. N + \sin. n) : (\text{co-sin. } M + \text{co-sin. } m) :: (\sin. N - \sin. n) : (\text{co-sin. } M - \text{co-sin. } m)$, ou $(\sin. N + \sin. n) : (\sin. N - \sin. n) :: (\text{co-sin. } M + \text{co-sin. } m) : (\text{co-sin. } M - \text{co-sin. } m)$. Mais (selon ce qu'on a dit ci-dessus n $^\circ$. 138) l'on a les proportions $(\sin. N + \sin. n) : (\sin. N - \sin. n) :: \text{tang. } \left(\frac{N+n}{2} \right) : \text{tang. } \left(\frac{N-n}{2} \right)$, $(\text{co-sin. } M + \text{co-sin. } m) : (\text{co-sin. } M - \text{co-sin. } m) :: \text{co-tang. } \left(\frac{M+m}{2} \right) : \text{co-tang. } \left(\frac{M-m}{2} \right)$, ou en désignant les complémens de M & de m par cM & cm , $(\text{co-sin. } M + \text{co-sin. } m) : (\text{co-sin. } M - \text{co-sin. } m) :: \text{tang. } \left(\frac{1}{2} cM + \frac{1}{2} cm \right) : \text{tang. } \left(\frac{1}{2} cM - \frac{1}{2} cm \right)$. L'on a donc l'analogie suivante

IV. $\text{tang. } \left(\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} n \right) : \text{tang. } \left(\frac{1}{2} N - \frac{1}{2} n \right) :: \text{tang. } \left(\frac{1}{2} cM + \frac{1}{2} cm \right) : \text{tang. } \left(\frac{1}{2} cM - \frac{1}{2} cm \right)$. Mais parce que a, b, f, g , étant des angles ou des arcs, on a $\text{tang. } b : \text{tang. } a :: \text{co-tang. } a : \text{co-tang. } b$, & $\text{tang. } f : \text{tang. } g :: \text{co-tang. } g : \text{co-tang. } f$, on aura, en substituant les co-tangentes aux tangentes dans la proportion précédente, $\text{co-tang. } \left(\frac{1}{2} N - \frac{1}{2} n \right) : \text{co-tang. } \left(\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} n \right) :: \text{co-tang. } \left(\frac{1}{2} cM - \frac{1}{2} cm \right) : \text{co-tang. } \left(\frac{1}{2} cM + \frac{1}{2} cm \right)$, ou $\text{co-tang. } \left(\frac{1}{2} cM + \frac{1}{2} cm \right) : \text{co-tang. } \left(\frac{1}{2} cM - \frac{1}{2} cm \right) :: \text{co-tang. } \left(\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} n \right) : \text{co-tang. } \left(\frac{1}{2} N - \frac{1}{2} n \right)$. Il est bon de retenir cette formule,

* Nous désignons ici le sinus total ou le rayon par R , au lieu que nous l'avons désigné par r dans l'analogie I I.

dont nous ferons usage dans la première table suivante. Si l'on connoît $N + n$, on connoitra par les tables, co-tang. $(\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} n)$, & le quatrième terme de la proportion, dont je suppose les trois premiers connus, fera trouver la demi-différence des angles N & n . Ajoutant cette demi-différence à leur demi-somme, l'on aura le plus grand angle que je suppose être N ; retranchant la même demi-différence de la demi-somme; l'on aura le plus petit angle que je suppose $= n$. Si l'on connoissoit $N - n$, avec m & M , le troisième terme de la proportion seroit le terme cherché. L'ayant trouvé, on auroit facilement N & n .

D'un autre côté l'analogie V donne $R : \text{co-sin. } P :: \text{co-sin. } B : \text{co-sin. } H$, & $R : \text{co-sin. } P :: \text{co-sin. } b : \text{co-sin. } h$, & de là l'on tire aisément

$$V. \text{co-sin. } B : \text{co-sin. } b :: \text{co-sin. } H : \text{co-sin. } h. \quad ::$$

Puisque $\text{co-sin. } B : \text{co-sin. } b :: \text{co-sin. } H : \text{co-sin. } h$, l'on aura $(\text{co-sin. } B + \text{co-sin. } b) : (\text{co-sin. } B - \text{co-sin. } b) :: (\text{co-sin. } H + \text{co-sin. } h) : (\text{co-sin. } H - \text{co-sin. } h)$. Mais $(\text{co-sin. } B + \text{co-sin. } b) : (\text{co-sin. } B - \text{co-sin. } b) :: \text{tang. } (\frac{1}{2} c B + \frac{1}{2} c b) : \text{tang. } (\frac{1}{2} c B - \frac{1}{2} c b)$, & $(\text{co-sin. } H + \text{co-sin. } h) : (\text{co-sin. } H - \text{co-sin. } h) :: \text{tang. } (\frac{1}{2} c H + \frac{1}{2} c h) : \text{tang. } (\frac{1}{2} c H - \frac{1}{2} c h)$; ainsi l'on a l'analogie suivante.

$$VI. \text{tang. } (\frac{1}{2} c B + \frac{1}{2} c b) : \text{tang. } (\frac{1}{2} c B - \frac{1}{2} c b) :: \text{tang. } (\frac{1}{2} c H + \frac{1}{2} c h) : \text{tang. } (\frac{1}{2} c H - \frac{1}{2} c h), \text{ ou co-tang. } (\frac{1}{2} c H + \frac{1}{2} c h) : \text{co-tang. } (\frac{1}{2} c H - \frac{1}{2} c h) :: \text{co-tang. } (\frac{1}{2} c B + \frac{1}{2} c b) : \text{co-tang. } (\frac{1}{2} c B - \frac{1}{2} c b).$$

Enfin, de l'analogie VII, on tire $R : \text{co-sin. } N :: \text{co-tang. } P : \text{co-tang. } H$, ou $R : \text{co-tang. } P : \text{co-sin. } N : \text{co-tang. } H$, & $R : \text{co-tang. } P :: \text{co-sin. } n : \text{co-tang. } h$; donc

$$VII. \text{co-sin. } N : \text{co-sin. } n :: \text{co-tang. } H : \text{co-tang. } h.$$

200. Ces sept analogies contiennent la solution du Problème proposé. Supposons que ce que l'on cherche, angle ou côté, est désigné par Q , ce qui est opposé à la chose cherchée côté ou angle par T , les choses adjacentes de part & d'autre de ce que l'on cherche, de manière que ce que l'on cherche angle ou côté soit compris entr'elles par K & k , & les choses entre lesquelles est compris ce qui est opposé à ce l'on cherche par P & p , en mettant les lettres majuscules d'un côté, & les petites lettres de l'autre; de manière que P & K soient contigus l'un à l'autre, aussi bien que p & k , on aura cinq lettres K, P, k, p, T , dont trois marqueront dans chaque cas les trois choses données,

Q étant toujours ce que l'on cherche. Les lettres K, k & P, p peuvent être mises les unes pour les autres, sans représenter des cas réellement différens, *par exemple*, le cas $K k P$ n'est pas réellement différent du cas représenté par $K k p$, parce qu'il importe peu de quel côté on écrive les lettres K, k & P, p , pourvu que l'on conserve le reste de l'ordre. Par la même raison la combinaison $K p T$ est censée la même que $k P T$. Cela posé il est facile de voir que tous les cas possibles se réduisent aux six suivans. I. $K k P$ ou $k K p$, II. $K k T$ ou $k K T$, III. $K P p$ ou $K p P$, IV. $K P T$ ou $k p T$, V. $K p T$ ou $k P T$, VI. $P p T$ ou $p P T$. Mais parce que la chose cherchée Q peut être un angle ou un côté, il y a en tout douze questions à résoudre.

Si on cherche un côté, & que T (chose opposée à ce qu'on cherche) soit connu, supposez que Q est h (dans les fig. 138 & 139), & que T est M . Mais si vous cherchez un angle, supposez que Q est M , & que T est h . Mais si T n'est pas donné, & qu'on cherche un côté, supposez que ce côté est représenté par $B \mp b$, & que l'angle cherché est $= N \mp n$. Ayant ensuite marqué (dans les figures 138 & 139) les autres choses qui sont censées données, j'ai joint ici deux tables, par le moyen desquelles on peut répondre aux douze questions dont on a besoin dans la résolution des triangles sphériques oblique-angles. Si l'on cherche un côté, on fera usage de la première table, & de la seconde lorsqu'on cherchera un angle. Au reste dans ces tables nous avons désigné le sinus par \sin , le cosinus par \cos , la cotangente par \cot : ainsi $\cot. M$ exprime la cotangente de l'angle M , $\cos. H$ le cosinus de l'arc H , &c.

ON CHERCHE UN CÔTÉ.

Cas.	Choses données.	on demande	Premiere Analogie.	Seconde Analogie.
$\frac{K P}{k p} T$	$m, H, M.$	h	$\sin. m : \sin. M :: \sin. H : \sin. h.$	
$\frac{P P}{p p} T$	$H, B \mp b, M.$	h	$\cos. M : r :: \cos. H : \cos. B.$	$\cos. B : \cos. b :: \cos. H : \cos. h.$
$\frac{K P}{k p} T$	$N \mp n, H, M.$	h	$\cos. M : r :: \cos. H : \cos. N.$	$\cos. N : \cos. n :: \cos. H : \cos. h.$
$\frac{K k}{k K} T$	$N \mp n, m, M.$	h	$\cos. (\frac{1}{2} cM + \frac{1}{2} cM) : \cos. (\frac{1}{2} cM - \frac{1}{2} cM) :: \cos. (\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} n) : \cos. (\frac{1}{2} N - \frac{1}{2} n)$	$r : \cos. m :: \cos. n :: \cos. h.$
$\frac{K P}{k p} P$	$H, h, M.$	$B \mp b$	$\cos. M : r :: \cos. H : \cos. B.$	$\cos. H : \cos. h :: \cos. B : \cos. b.$
$\frac{K k}{k K} P$	$H, m, M.$	$B \mp b$	$\cos. M : r :: \cos. H : \cos. B.$	$\cos. M : \cos. :: \sin. B : \sin. b.$

ON CHERCHE UN ANGLE.

Cas.	choses données.	on demande	Premiere Analogie.	Seconde analogie.
$\frac{K}{k} \frac{P}{p} \frac{T}{T}$	$M, h, H.$	m	$\sin. h : \sin. H :: \sin. M : \sin. m.$	
$\frac{P}{p} \frac{P}{p} \frac{T}{T}$	$M, N \mp n, H.$	m	$\cot. M : r :: \cos. H : \cot. N$	$\sin. N : \sin. n :: \cos. M : \cos. m.$
$\frac{K}{k} \frac{P}{p} \frac{T}{T}$	$B \mp b, M, H.$	m	$\cos. M : r :: \cot. H : \cot. B.$	$\sin. B : \sin. b :: \cot. M : \cot. m.$
$\frac{K}{k} \frac{k}{k} \frac{T}{T}$	$B \mp b, h, H$	m	$\cot. (\frac{1}{2} cH + \frac{1}{2} ch) : \cot. (\frac{1}{2} cH - \frac{1}{2} ch) :: \cot. (\frac{1}{2} cB + \frac{1}{2} cb) : \cot. (\frac{1}{2} cB - \frac{1}{2} cb)$	$\cot. b : \cot. h :: r : \cos. m.$
$\frac{K}{k} \frac{k}{k} \frac{P}{p}$	H, h, M	$N \mp n$	$\cot. M : r :: \cos. H : \cot. N.$	$\cot. H : \cot. h :: \cos. N : \cos. n$
$\frac{K}{k} \frac{P}{p} \frac{P}{p}$	H, m, M	$N \mp n$	$\cot. M : r :: \cos. H : \cot. N$	$\cos. M : \cos. m :: \sin. N : \sin. n$

201. L'usage de ces tables est facile à comprendre. Supposons que dans un triangle $M N m$ on connoisse les angles m , M , le côté opposé à l'angle m & qu'on demande le côté h opposé à l'angle M , la premiere analogie de la premiere table vous dit que le sinus de l'angle m est à celui de l'angle M , comme le sinus de l'arc H opposé à l'angle m est au sinus de l'arc ou du côté h cherché. Mais ce même sinus pouvant appartenir à un arc plus petit qu'un quart de cercle ou à son supplément, on ne peut s'assurer par cette regle si h est plus grand ou moindre qu'un quart de cercle. Ici K représente l'angle $T m M$ l'angle $m T M$ étant représenté par k , cet angle dans la fig. 139 est une des choses entre lesquelles est compris le côté ou l'arc h cherché. Mais M est compris entre le côté H & le côté B ; ainsi p ou P est ici représenté par H . A l'égard de T ou de la chose opposée à ce qu'on cherche, il est visible que c'est l'angle M opposé au côté cherché h .

Supposons maintenant qu'étant donné le côté H , la base $M m = B \mp b$ (selon que le côté NR tombe en dehors ou en dedans de l'angle $M T m$, ou selon que les angles M & m sont tous les deux de différente ou de même espece (197)) l'angle M , & qu'on cherche h c'est-à-dire, le côté opposé à l'angle M . Or l'angle M est compris entre H & $M m$; ainsi H & $B \mp b$ représentent ici P & p . L'analogie co-sin. $M : r ::$ co-tang. $H : \text{co-tang. } B$ fera évidemment trouver la valeur de B ; B étant connu, b le sera aussi, puisqu'on connoît $B \mp b$ (par supposition). C'est pourquoi par la seconde analogie (qui est à la droite de celle dont nous venons de parler) co-sin. $B : \text{co-sin. } b ::$ co-sin. $H : \text{co-sin. } h$, on trouvera la valeur de h .

Au reste on peut se dispenser de faire attention à la premiere colonne de chaque table; supposons, *par exemple*, qu'étant donné le côté H adjacent à l'angle M avec les deux angles M & m qui comprennent le côté $M m$ auquel est opposé l'angle $N \mp n$ cherché. Les données H , m , M se trouvent au bas de la seconde colonne de la seconde table, & à côté dans la troisième colonne je trouve $N \mp n$. L'analogie cot. $M : r ::$ cof. $H : \text{cot. } N$ me fait trouver N . L'analogie (qui est à côté) cof. $M : \text{cof. } m ::$ sin. $N : \text{sin. } n$ me fera connoître n , pourvu que je sache si n est un angle aigu ou obtus. Donc je trouverai facilement $N \mp n$, le signe supé-

rieur aura lieu si M & m sont d'espece différente , & le signe inférieur, si M & m sont de même espece.

202. Cependant on ne peut pas toujours s'assurer par le moyen des regles précédentes si le côté ou l'angle cherché est plus grand ou moindre que 90° . Car supposons que le plan du demi-cercle ANB (fig. 40.) est oblique à celui du demi-cercle ADB & que du centre C de la sphere avec le rayon CN , on décrive l'arc NR perpendiculaire au plan du demi-cercle ADB , qu'on décrive de même, en prenant $RD = RE$, les arcs ND , NE , il est visible que les triangles sphériques rectangles NRD , NRE ayant les côtés qui comprennent l'angle droit égaux, sont égaux *. Donc les angles NDR , NER sont égaux entr'eux aussi-bien que leurs supplémens $ND A$, $NE B$. C'est pourquoi l'on peut former deux triangles sphériques obliquangles différens $ND A$, $NE B$ dans lesquels les angles A & B soient égaux entr'eux aussi-bien que les côtés ND , NE qui leur sont opposés, & les angles $ND A$ & $NE B$. De-là il suit 1°. qu'étant donnés deux angles A , ADN , & le côté ND adjacent à l'un de ces angles, le triangle n'est pas déterminé; puisque deux triangles différens peuvent avoir ces trois choses égales. 2°. Deux côtés donnés NA , ND & l'angle A non compris entre ces côtés ne déterminent pas non plus un triangle sphérique NAD ; puisque le triangle NAE a ces trois mêmes choses égales.

De-là il suit que toutes les fois que par le moyen de deux angles & d'un côté qui n'est pas compris entre ces angles, on cherche un côté ou un angle, on ne peut s'assurer si ce que l'on a trouvé vaut plus ou moins de 90° . De sorte qu'étant donnés M , m , & H , il y a de l'ambiguïté, à moins qu'on ne sache d'ailleurs si le côté ou l'angle cherché est aigu ou obtus. Il y aura aussi la même ambiguïté, lorsqu'on cherchera un angle ou un côté par le moyen des trois données H , h , M , c'est-à-dire, par le moyen de deux côtés & d'un angle qui ne sera pas compris entre ces côtés. Ainsi dans le premier cas de la seconde table on ne fait pas si l'angle

* Si dans deux triangles rectangles, dont les côtés qui comprennent l'angle droit sont supposés égaux, on conçoit les côtés qui comprennent l'angle droit de l'un appliqués sur ceux qui comprennent l'angle droit de l'autre, il est visible que ces côtés se confondront aussi-bien que les deux hypothénuses, & que ces triangles ne formeront qu'un seul & même triangle; de sorte qu'ils sont égaux en tout.

cherché m est aigu ou obtus ; parce que le même sinus peut appartenir à deux angles différens , supplémens l'un de l'autre.

Dans le cinquième cas de la même table l'ambiguïté consiste en ce qu'on n'a pas plus de raison pour prendre la somme , que la différence des angles N & n . Dans le cinquième cas de la première table on ne sait pas non plus si l'on doit prendre la somme ou la différence de B & de b .

Dans les cas différens de ceux dont on vient de parler , il ne sauroit y avoir aucun doute.

FIN DU TOME PREMIER.

T A B L E

D E S M A T I E R E S

Contenues dans le Tome premier.

C A L C U L.	Page
<i>De l'Arithmétique.</i>	3
<i>De l'Addition.</i>	4
<i>De la Soustraction.</i>	7
<i>De la Multiplication.</i>	10
<i>De la Division.</i>	15
<i>Des Fractions.</i>	21
<i>Des Fractions Décimales.</i>	29
<i>De l'Evaluation des Fractions.</i>	34
<i>De la multiplication & division des Nombres complexes.</i>	ibid.
<i>De l'Algebre.</i>	39
<i>Des Fractions algébriques.</i>	53
<i>Des Raisons & Proportions.</i>	94
<i>Des Progressions géométriques.</i>	109
<i>Des Proportions & Progressions arithmétiques.</i>	117
<i>Des Logarithmes.</i>	121
<i>Des Equations.</i>	132
<i>Des Problèmes indéterminés, semidéterminés, & plus que déterminés.</i>	159
<i>Des Equations à deux termes.</i>	203
<i>Des Equations de tous les degrés.</i>	209
<i>De la résolution des Equations par le moyen des diviseurs d'un ordre quelconque.</i>	242
<i>Des Equations des Degrés supérieurs.</i>	283

<i>De l'Infini.</i>	290
<i>Des Séries ou Suites.</i>	293
<i>Usage des Séries récurrentes dans la recherche des Racines des Equations.</i>	322
<i>Des Fractions continues.</i>	336

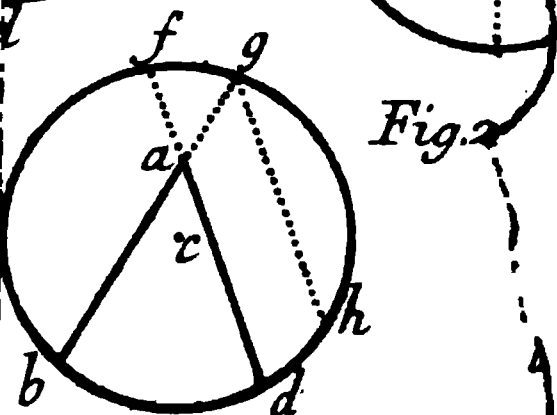
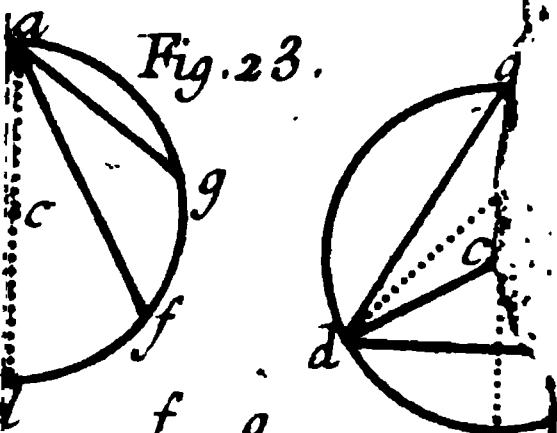
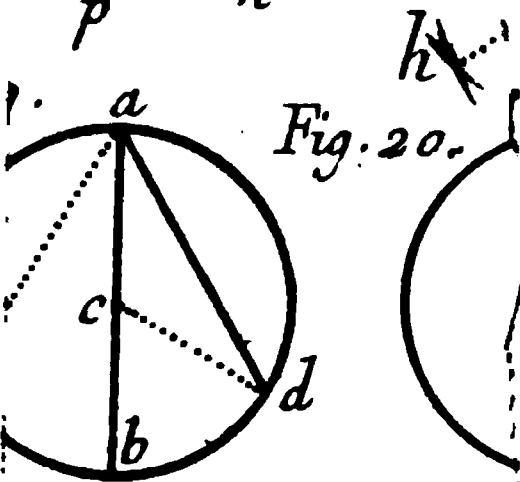
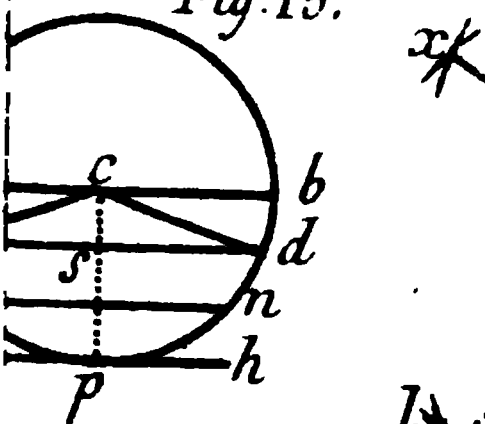
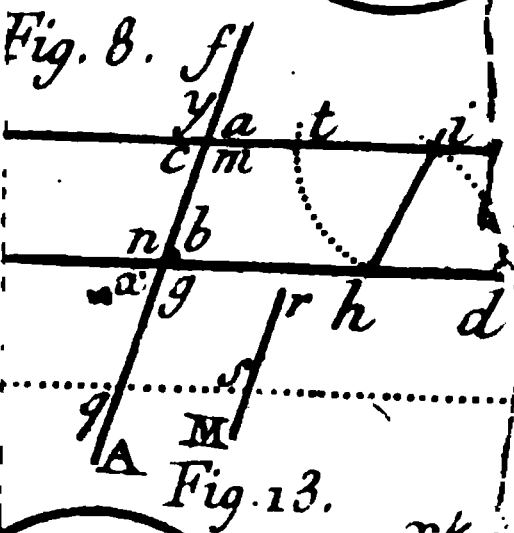
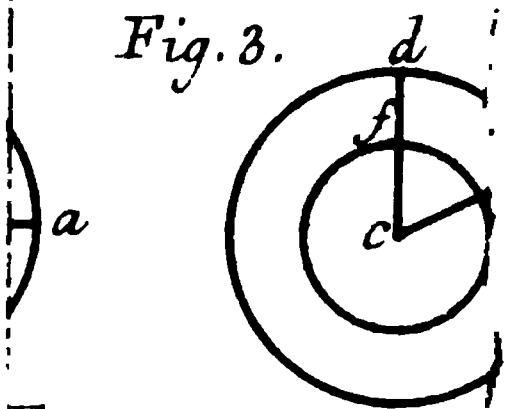
T A B L E

D E L A

G É O M É T R I E.

D E L A G É O M É T R I E.	Page 341
<i>De la Mesure des Angles.</i>	358
<i>Des Polygones.</i>	363
<i>Des Lignes proportionnelles.</i>	373
<i>De la Mesure & du Rapport des Surfaces.</i>	385
<i>Des Plans.</i>	402
<i>Des Solides.</i>	406
<i>Du Rapport des Surfaces des Solides.</i>	419
<i>De la solidité des Solides & de leur Rapport.</i>	422
<i>De la Trigonométrie.</i>	433
<i>De la résolution des Triangles.</i>	448
<i>De la résolution des Triangles obliquangles.</i>	452
<i>Trigonométrie sphérique.</i>	491

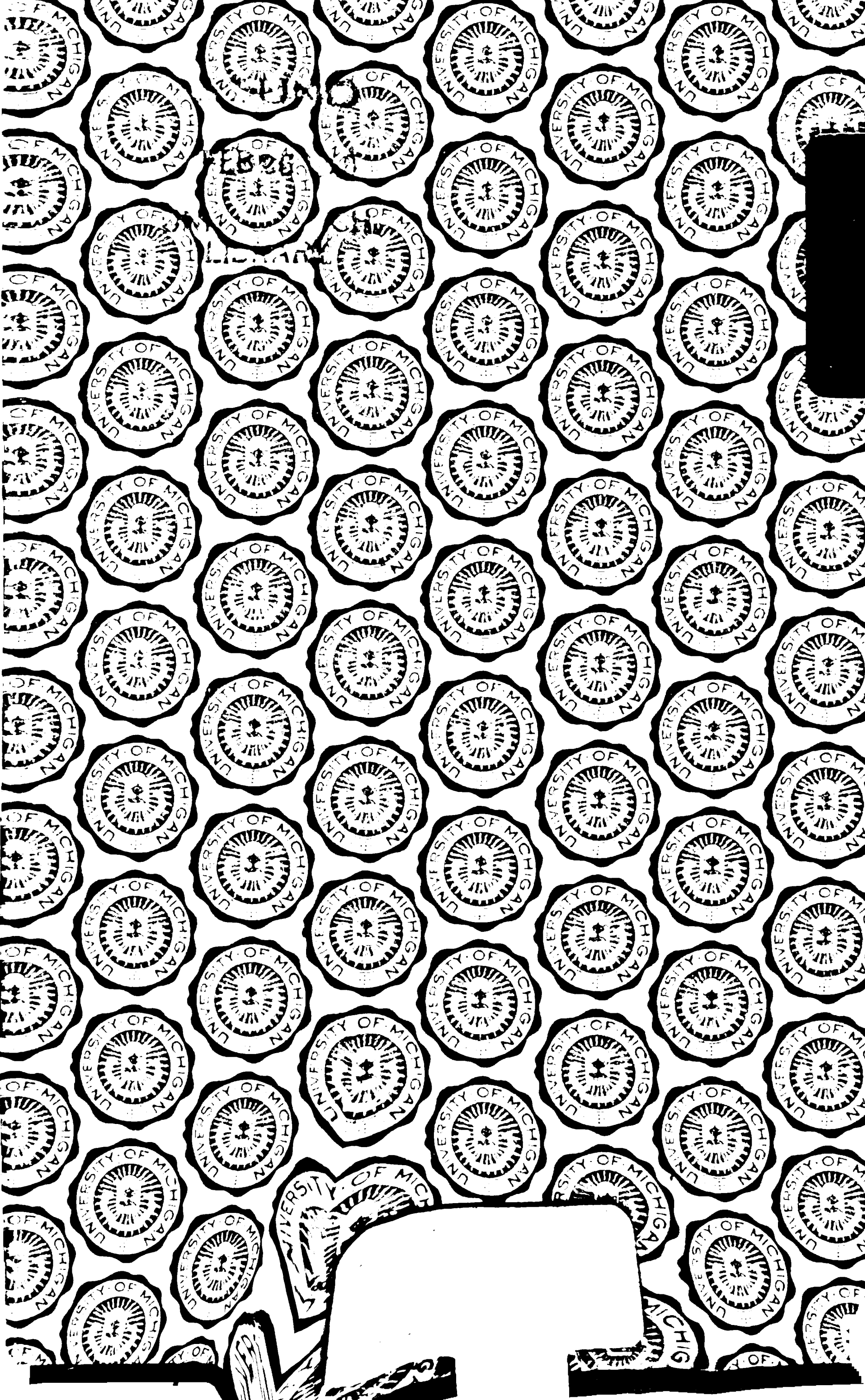
FIN de la Table du Tome premier.



UNIVERSITY OF MICHIGAN



3 9015 06531 7862



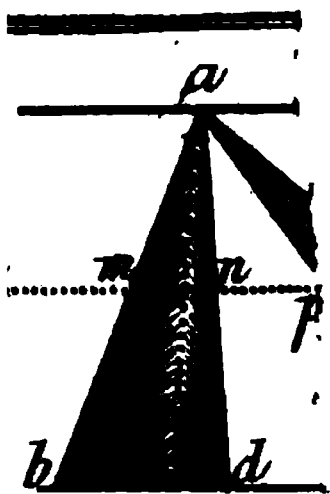


Fig. 10 B.

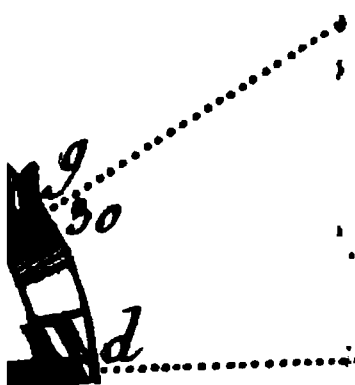
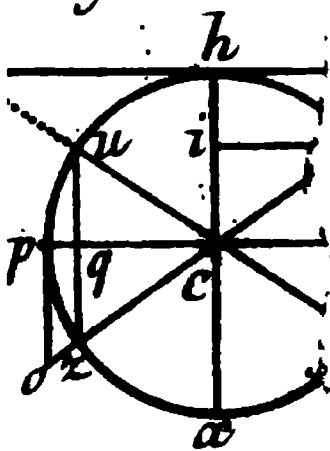


Fig. 11 B.

